

Geschichte.

● **Hofmann, J. E.:** Geschichte der Mathematik. Erster Teil. (Sammlung Taschen Band 226.) Berlin: Walter de Gruyter u. Co. 1953. 200 S. DM 2,40.

Diese auf zwei Bändchen berechnete Geschichte der Mathematik tritt an die Stelle der früher von H. Wieleitner (zuletzt im Neudruck 1939) erschienenen. Sie ist dessen Ansehen gewidmet. Verf. will einen Überblick über die Mathematikgeschichte geben, in dem auch die Ausstrahlungen auf die mit ihr verbundenen Nachbargebiete gestreift sind. Das vorliegende erste Bändchen reicht von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Nach einem kurzen einleitenden Überblick mit Angaben wichtiger allgemeiner Werke zur Geschichte der Mathematik und zur Kulturgeschichte bringt der erste Abschnitt die vor-griechische Mathematik (S. 9—20), der zweite handelt von der Mathematik der Griechen (S. 21—48), der dritte von der Entwicklung im Mittelalter (S. 49—82), der vierte von der Mathematik zur Zeit des Humanismus (S. 82—114) und der fünfte von der Mathematik des Frühbarock (S. 115—155), d. h. in der Zeit von 1550—1650. Es folgt ein ausführliches Namen- und Schriftenverzeichnis (S. 156—198) und auf den beiden letzten Seiten ein Sachverzeichnis. Am Schluß jedes Abschnitts und Unterabschnitts sind die wichtigsten einschlägigen Werke zur Mathematik- und Kulturgeschichte angegeben. — Es handelt sich keineswegs um eine kurze Fassung der Geschichte der Mathematik, die Verf. zusammen mit O. Becker 1951 herausgegeben hat (vgl. dies Zbl. 43, 241), sondern um eine völlig neue, nach den Quellen bearbeitete Darstellung, die den heutigen Stand unseres Wissens und unserer Einsicht wieder-gibt und mit sicherem Gefühl das für die Entwicklung und den Fortschritt der Mathematik Wesentliche heraushebt. Das Werk ist sehr sorgfältig gearbeitet, leicht, fast spannend zu lesen. Es charakterisiert auf engem Raum jeden bedeutenden Mathematiker durch seine wichtigsten Leistungen und die ihm eigenen Methoden und verfällt doch nicht in den Fehler, zu viele Namen und Tatsachen anzuführen. Besonders reizvoll ist die Einordnung der Mathematikgeschichte in die Entwicklung der allgemeinen Geistesgeschichte. Dabei sind Mittelalter und Renaissance stärker berücksichtigt als in anderen Einführungswerken, während die antike Mathematik knapper behandelt ist. Das letzte Kapitel des fünften Abschnitts mit der Überschrift „Auf dem Wege zu neuen Einsichten“ leitet zum Hochbarock und damit zur modernen Mathematik über, die in einem zweiten Bändchen dargestellt werden soll. — Das Werk eignet sich zur Einführung in die Geschichte der Mathematik für Studierende, für alle Mathematiker, die sich mit den Grundzügen der geschichtlichen Entwicklung ihrer Wissenschaft vertraut machen wollen, und für jeden Geisteswissenschaftler, der sich für alle Aspekte des menschlichen Geistes interessiert. Wer sich eingehender mit den Problemen beschäftigen will, findet Anleitung und Wegweiser in den allgemeinen Literaturangaben und in dem Namen- und Schriftenverzeichnis.

E. Löffler.

Adamo, Marco: La cultura geometrica dei popoli antichi. La geometria particolarmente rappresentativa presso i popoli della Mesopotamia. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, Suppl. 13—88 (1953).

In einer früheren Arbeit [ibid. 22, 1—12 (1953)] hat der Verf. einen Plan für eine neuartige Betrachtung der Geschichte der geometrischen Darstellungen entwickelt, der die Tatsache benützt, daß die Mathematik alle Bereiche des Lebens (Kunst, Recht usw.) durchdringt. Setzt soll dies an Beispielen der babylonischen Mathematik durchgeführt werden. Verf. untersucht die verschiedenen Formen der ebenen und räumlichen Darstellung und kommt zu der Feststellung, daß folgende Verfahren verwendet wurden: 1) Die plastische Methode unter Verwendung von Modellen. — 2) Die Orthogonalprojektion. — 3) Eine „gemischte“ Projektion (z. B. anderer Maßstab für die Darstellung des Königs). — 4) Die Zentralprojektion. — Dazu werden schöne Beispiele der babylonischen Kunst im Bild wiedergegeben. In der Hauptsache handelt es sich aber doch um Erzeugnisse der freien, nicht einer konstruierenden Perspektive. Einführend schickt der Verf. einige Kapitel voraus, die einen Einblick in den Umfang der überlieferten babylonischen Mathematik ermöglichen sollen, die aber — abgesehen von Symmetrie und Ähnlichkeit — nur lose mit dem Thema in Verbindung stehen.

K. Vogel.

Hermelink, Heinrich: Ein bisher übersehener Fehler in einem Beweis des Archimedes. Archives Internat. Hist. Sci. 25, 430—433 (1953).

Verf. macht aufmerksam auf einen Fehler in der Schrift „De conoidibus et sphairoidibus“, und zwar in Satz XXI (Inhalt des senkrecht abgeschnittenen Rotationsparaboloids ist gleich dem Anderthalbfachen des Kegels mit gleicher Grundfläche und Höhe). Auf die Frage, ob der Fehler auf Archimedes selbst

oder auf einen späteren Bearbeiter zurückgeht; hat neuerdings S. Heller [Abh. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Neue Folge, Heft 63, 1—39 (1954)] die Antwort dahingehend gegeben, daß die fehlerhafte Schlußfolgerung durch den Abschreiber hineingetragen wurde.

K. Vogel.

● **Stamatis, E.:** Eine Bemerkung zur Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ nach den Alten. Plato 5, Nr. 2, 3 S. (Athen: Andreas Sideris) (1953) [Griechisch].

Verf. zeigt, daß die von Archytas mittels der Methode der arithmetischen-harmonischen Mittel erhaltenen arithmetischen Mittel der Ordnung m ($m=1, 2, 3, 4$) zur Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ mit den aus dem Verhältnis $d_n:a_n$, $a_{n+1} = a_n + d_n$, $d_{n+1} = 2a_n + d_n$, $a_1 = d_1 = 1$ gewonnenen Werten für $n = 2^m$ übereinstimmen. Die deutsche Zusammenfassung am Schluß ist leider nicht ganz verständlich.

O. Volk.

Boyer, Carl B.: Early contributions to analytic geometry. Scripta math. 19, 97—108 (1953), 230—238 (1954).

Verf. sieht schon in den ersten Versuchen, arithmetische und geometrische Einsichten zu verbinden, Vorstufen der analytischen Geometrie. Er berichtet über die wohlbekannten einschlägigen Ergebnisse der Ägypter, der Babylonier und der frühen Griechen, verweist auf die durch Zenons Paradoxien und die Entdeckung des Irrationalen ausgelöste „Grundlagenkrise“ und ihre Überwindung und geht auf die drei „Hauptprobleme der griechischen Mathematik“ ein. Schließlich behandelt er die ersten „Örter“, die Quadratrix des Hippias und die Kegelschnitte des Menaichmos. Unter den zahlreichen Literaturverweisen im Text vermisste ich einige beachtliche deutsche Publikationen der letzten 30 Jahre.

J. E. Hofmann.

Millás-Vallierosa, J.: Über die astronomischen Tafeln des Königs Peter IV. von Aragon. Actes Septième Congr. Internat. d'Histoire Sci. Jerusalem, Août 1953, 451—454 (1953) [Spanisch].

Grundlage dieser Tafeln ist ein Almanach für 60 Jahre, der von Pedro Gilbert und Dalmacio Planes für Peter IV. (reg. 1336—1387) auf Grund von Beobachtungen in den Jahren 1360—1366 erstellt wurde [Reste herausgegeben von L. Thorndike, Isis 26, 310—320 (1937)]. Hieraus berechnete Ya'qob Carsono auf Geheiß des Königs vollständige Tafeln, die in hebräischer Übersetzung größtenteils erhalten sind und vom Verf. zur Ausgabe vorbereitet werden.

H. I. Hermelink.

● **Galilei, Galileo:** Dialogue on the great world systems. Translated by T. Salusbury, revised and annotated with an introduction by Giorgio de Santillana. Chicago: University of Chicago Press 1953. LVIII, 506 p., 3 pls., 32 figs., 9 diagrs. \$ 12,50.

● **Galilei, Galileo:** Dialogue concerning the two chief world systems. Ptolemaic and Copernican. Translated by Stillman Drake, foreword by Albert Einstein. Berkeley and Los Angeles: University of California Press 1953. XXVIII, 496 p., 2 ills., 31 figs. \$ 10,—.

Krbek, F. von: Geschichte des Prinzips von d'Alembert. Wiss. Z. Univ. Greifswald, math.-naturw. R. 2, 15—22 (1953).

Hofmann, Jos. E.: Über Portas Quadratur krummlinig begrenzter ebener Figuren. Arch. internat. Hist. Sci. 23/24, 193—208 (1953).

Der Italiener Giambattista della Porta (1538—1615) ist im wesentlichen durch naturwissenschaftliche Arbeiten bekannt. Er hat aber auch eine mathematische Schrift, die Elementa curvilinearum, verfaßt, die erstmals 1601 und in erweiterter Fassung 1610 gedruckt wurde. Dieses Werk ist nicht sehr bedeutend und enthält, auch für die damalige Zeit, nur wenig Neues. Es ist deshalb auch in größeren Werken über Geschichte der Mathematik kaum erwähnt. Verf. berichtet über Aufbau, Methode und Inhalt des Werks, weil er es als bisher übersehene Quelle für einige spätere elementargeometrische Studien erkannt hat. Es handelt von der Quadratur ebener Flächen, die ganz oder teilweise von Kreisbögen be-

ntzt sind. In den beiden ersten Büchern finden sich hübsche Sätze über elementar quadrier-
e Flächen der genannten Art. Das dritte Buch, das von der Überzeugung ausgeht, daß
e derartige Figur elementar quadrierbar sei, setzt sich die Quadratur des Kreises zum
l. Das Verfahren, das Porta dabei einschlägt, ist originell, beruht aber auf einem Irrtum,
später zu einer neuen wissenschaftlichen Erkenntnis führte. Verf. schildert die Gedanken-
ge Portas unter Verwendung der Originalfiguren, gibt in zahlreichen Fußnoten Hinweise
Portas Quellen und auf andere einschlägige Arbeiten und stellt zum Schluß einen zweiten
richt über das Weiterwirken der Portaschen Methoden in Aussicht. *E. Löffler.*

Tenea, Luigi: *Relazioni fra i due Pietro-Paolo Caravaggi et Vincenzio Vivioni.*
Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 86, 835—846 (1953).

Hille, Einar: *Mathematics and mathematicians from Abel to Zermelo.* Math.
g. 26, 127—146 (1953).

I. Gedanken über die Mathematik und die Mathematiker um 1850 in Frank-
ch, Deutschland und Groß-Britannien und Irland. II. Entwicklung der Analysis,
besondere der komplexen Funktionentheorie, bis zum 1. Weltkrieg, gesehen
den Mathematikern Cauchy, Abel und Jacobi, Weierstraß, Riemann,
rmite, Poincaré, Picard, Hilbert. *H. L. Schmid.*

Brun, Viggo: *The manuscript of Abel's Paris treatise found.* Nordisk mat.
skrift 1, 91—97 und engl. Zusammenfassg. 143—144 (1953) [Norwegisch].

Abels Abhandlung: *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-
ndue de fonctions transcendantes* aus dem Jahr 1826 wurde bekanntlich
t 1841 gedruckt. Der Mathematiker Libri — später wegen Bücher- und Hand-
rftendiebstahls mit 10 Jahren Zuchthaus bestraft — überwachte den Druck.
ttem ist das Originalmanuskript verloren gewesen, bis Verf. es 1952 in Florenz
der entdeckte. — Bericht über die Entdeckung und Vergleich des Manuskriptes
dem bekannten gedruckten Text. *W. Maak.*

Schröder, Kurt: *Zur Geschichte der Mathematik in Berlin und allgemeine
merkungen zu ihrer künftigen Entwicklung.* Ber. Math-Tagung Berlin 14. 1. bis
1. 1953, 1—4 (1953).

Lange-Nielsen, Fr.: *Niels Henrik Abel.* Nordisk mat. Tidskrift 1, 65—90 und
gl. Zusammenfassg. 143 (1953) [Norwegisch].

Kurze Biographie und Charakterisierung der Werke Abels. Hervorgehoben
d besonders, daß die wichtigsten Entdeckungen betr. Elliptische Funktionen
r Abel (und nicht gleichzeitig von Jacobi) gemacht wurden. Jacobi wird
geworfen, daß er Abel in völlig unzureichender Weise — nämlich fast gar
ht — zitiert hat. *W. Maak.*

Otradnych, F. P.: *Eine Episode aus dem Leben des Akademiemitgliedes
A. Markov.* Istoriko-mat. Issledovanija 6, 495—508 (1953) [Russisch].

Bachmutskaja, E. Ja.: *Über die pädagogische Tätigkeit V. A. Steklovs am
arkover Technologischen Institut.* Istoriko-mat. Issledovanija 6, 529—534
53) [Russisch].

Dachija, S. A.: *P. L. Čebyšev und die Popularisierung der Mathematik in
Bland.* Istoriko-mat. Issledovanija 6, 239—244 (1953) [Russisch].

Prudnikov, V. E.: *Über die Artikel P. L. Čebyševs, M. V. Ostrogradskijs,
Ja. Bunjakovskijs und I. I. Somovs im „Enzyklopädischen Wörterbuch, zu-
nmengestellt von russischen Gelehrten und Literaten“.* Istoriko-mat. Issledo-
nija 6, 223—237 (1953) [Russisch].

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Beth, E. W.:** *Einführung in die Philosophie der exakten Wissenschaften.*
twerpen-Amsterdam: Uitgeverij, N. V. Standaard-Boekhandel. 1953. 144 S.
lb. F. 8,90 [Holländisch].

Dieses in der „Philosophische Bibliotheek“ erschienene Buch ist aus Vorlesungen ent-
nden, die Verf. an der Universität Amsterdam gehalten hat. Der erste Abschnitt (S. 7—52)

handelt von der Entstehung, der Entwicklung und den Problemen der Philosophie der exakten Wissenschaften. Als wesentliche Hauptströmungen erscheinen Wissenschaftskritik, Neupositivismus und Logizismus. Hauptgebiete sind die Logik und allgemeine Methodenlehre, die Philosophie der Mathematik, die Naturphilosophie, die Anwendung der gewonnenen methodologischen Erkenntnisse außerhalb der exakten Wissenschaften und die Geschichtsschreibung über die Philosophie der exakten Wissenschaften. Diese Strömungen und Teilgebiete werden gekennzeichnet, verglichen und durch Hinweise auf gewisse Gegenströmungen beleuchtet. Schließlich werden Leben und Werke einiger Autoren besprochen, die Grundlegendes zur Philosophie der exakten Wissenschaften beigetragen haben. Der zweite Abschnitt (S. 53—73) behandelt mit Beispielen die Grundlagen der Mathematik, ausgehend von den Griechen, über Kant, die nicht-euklidischen Geometrien, die Mengenlehre, die Paradoxien, die Axiomatik, den Intuitionismus bis zum Relativismus der Gegenwart. Der dritte Abschnitt (S. 74—95) bringt eine knappe Einführung in die Methoden, Ergebnisse und Probleme der modernen Logik. Im vierten Abschnitt (S. 96—107) wird das Raumproblem behandelt. Verf. erläutert die mathematischen Theorien, die sich auf die von der euklidischen abweichenden Raumformen beziehen, und erörtert die verschiedenen Antworten auf die Frage, welche von diesen Raumformen der wirklichen Struktur „unseres“ Raumes entsprechen. Ein kurzer Schlußparagraph beschäftigt sich mit dem psychologischen Aspekt des Raumproblems. Im fünften Abschnitt (S. 108—124) werden einige Gegenwartsprobleme der Philosophie der anorganischen Naturwissenschaft besprochen, insbesondere das sog. natürliche Weltbild, die kosmologischen Theorien in ihren drei Phasen (Astronomie der Griechen, klassische Naturwissenschaft von Galilei bis zur Thermodynamik, die Quantentheorie), die Subjektivität der Sinnesqualitäten, der Erklärungswert der kosmologischen Theorien. Dabei wird die entscheidende Bedeutung des Unterschieds zwischen der Umgangssprache und der für eine bestimmte Theorie kennzeichnenden speziellen Sprache hervorgehoben. Im Schlußwort (S. 125—129) geht Verf. auf das Verhältnis zwischen der Philosophie der exakten Wissenschaften und der allgemeinen systematischen Philosophie ein und streift auch die Methodenlehre der biologischen Wissenschaften. Es folgt (S. 130—135) eine Zeittafel, die wichtige Daten aus der Entwicklung der Philosophie der exakten Wissenschaften und gleichzeitige Veröffentlichungen allgemein-philosophischen und anderen Inhalts einander gegenüberstellt. Eine reichhaltige Bibliographie sowie Namen- und Sachverzeichnis bilden den Schluß. — Das Buch erfüllt in ausgezeichnete Weise den im Vorwort bezeichneten Zweck, eine knappe, verständliche und übersichtliche Einführung in ein Wissenschaftsgebiet zu geben, das in steigendem Maße Interesse erregt und Bedeutung erlangt, und als Ergänzung zu Vorlesungen oder zum Selbststudium zu dienen. Besonders hervorzuheben sind die umfassende Beherrschung der internationalen Literatur, die objektive Haltung gegenüber den verschiedenen Richtungen und Theorien neben klarer eigener Stellungnahme und die einfache, mit zahlreichen Beispielen durchsetzte Darstellung.

E. Löffler.

● Braithwaite, R. B.: Scientific explanation. A study of the function of theory, probability and law in science. London: Cambridge University Press 1953. XII, 376 p. 40 s.

Wegen seiner ersten drei Kapitel ist dies Buch für mich der wichtigste Beitrag zur Methodologie der Wissenschaften, den ich überhaupt kenne. — Bei den Versuchen der letzten Jahrzehnte, die empirische Deutung wissenschaftlicher Theorien zu begreifen, hat sich unzweideutig ergeben, daß der Erfahrungssinn theoretischer Urteile nicht ihre Beweisbarkeit sein kann, sondern ihre Nachprüfbarkeit: logische Konsequenzen dieser Urteile werden mit Erfahrungstatsachen konfrontiert. Dagegen wurde sehr lange und von vielen die Meinung verfochten, daß die nichtlogischen Konstanten einer Theorie explizit logisch zurückführbar sein müßten auf das „Gegebene“, obwohl jedwede Andeutung auch nur der theoretischen Möglichkeit einer solchen Zurückführung selbst in den einfachsten Fällen fehlte. Von manchen wurde die These denn auch angezweifelt, aber sie hielt sich sogar noch, nachdem Ramsey sie explizit widerlegt hatte. — Verf. gibt nun ein einfacheres und überzeugenderes Gegenbeispiel. Man hat einen Kalkül mit den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, mit den Axiomen $\alpha \leftrightarrow \lambda \mu$, $\beta \leftrightarrow \mu \nu$, $\gamma \leftrightarrow \nu \lambda$ und mit einer Syntax, die in der Hauptsache einen Klassenkalkül liefert. Dieser Kalkül wird angewandt in der Weise, daß den α, β, γ observable Eigenschaften A, B, C entsprechen, von denen aus der Erfahrung bekannt ist, daß (1) jedes Ding mit der Eigenschaften A und B auch die Eigenschaft C besitzt, (2) jedes Ding mit den Eigenschaften B und C auch die Eigenschaft A besitzt. Der Kalkül bewirkt nun die Einführung nichtobservabler Eigenschaften L, M, N (entsprechend λ, μ, ν), von denen angenommen wird, daß (a) jedes A -Ding ein (L und M)-Ding ist und umgekehrt, (b) jedes B -Ding ein (M und N)-Ding und umgekehrt, (c) jedes C -Ding ein (N und L)-Ding und umgekehrt. Diese Theorie führt logisch zu der Vorhersage, daß (3) jedes (C und A)-Ding auch ein B -Ding ist. Bestätigt diese Vorhersage sich, so ist das eine Bewährung der Theorie. — Man beachte, daß diese Theorie nichtobservable Konstanten, nämlich λ, μ, ν , sehr wesentlich enthält. Nun könnte man meinen, daß L, M, N sich explizit definieren ließen, und zwar so: Ein L -Ding ist ein A -Ding oder B -Ding; ein M -Ding ist ein B -Ding oder C -Ding; ein N -Ding ist ein C -Ding

r A -Ding. Man sieht aber am Kalkül, daß das nicht wahr ist. Erst neue (und unabhängige) Axiome $\lambda \leftrightarrow \alpha \cup \beta$, $\mu \leftrightarrow \beta \cup \gamma$, $\nu \leftrightarrow \gamma \cup \alpha$ im Kalkül würden diese Definition ermöglichen. Diese könnten aber ganz unzweckmäßig sein, zum Beispiel wenn sie zu einer unbrauchbaren Theorie führten. — Nehmen wir nämlich an, daß man sich für zwei weitere Observablen D und E interessierte, von denen sich zeigt, daß (4) jedes (A und D)-Ding ein E -Ding ist und jedes (E und A)-Ding ein D -Ding. Zur „Erklärung“ dieser Eigenschaften führt man eine nichtobservable R ein, derart, daß (d) jedes D -Ding ein (L und R)-Ding ist und umgekehrt, (e) jedes E -Ding ein (M und R)-Ding und umgekehrt. Im Kalkül hat man die neuen entsprechenden Konstanten δ , ε , ϱ und die neuen Axiome $\delta \leftrightarrow \lambda \varrho$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu \varrho$. Verschiedene Vorhersagen ergäben sich nun mittels des Kalküls rein logisch, z. B.: jedes (D und E)-Ding ist ein A -Ding, jedes (B und D)-Ding ist ein (C und E)-Ding und umgekehrt. Außerdem würde man auf Grund der Existenz von Observablen zu $\lambda \mu$, $\mu \nu$, $\nu \lambda$, $\lambda \varrho$, $\mu \varrho$ vielleicht vertreten, daß auch zu $\nu \varrho$ eine solche existiert und versuchen, sie empirisch zu entdecken. — Was ist die Hauptsache ist: Hätte man voreilig $\lambda \leftrightarrow \alpha \cup \beta$ usw. verlangt, so käme man nun zum Widerspruch. Dieses Ergebnis zeigt die Rolle der Nichtobservablen in einer Theorie. Gerade die implizite Einführung (statt der expliziten Zurückführung auf Observablen) macht sie so wichtig. Wenn wir die Nichtobservablen mit nicht mehr Eigenschaften umkleiden, so wird wir nötig zu haben glauben, um die Observablen zu erklären, bleibt uns die Freiheit, die Theorie unter Erhaltung der schon vorhandenen Konstanten und Urteile auszudehnen, während wir bei voreiliger Explizierung schnell zur Verwerfung übergehen müßten. — Einen einzigen Einwand habe ich wohl gegen die ursprüngliche Theorie der drei „Faktoren“ L , M , N , die die Observablen A , B , C erklären sollen. Die Einführung dieser Faktoren bedeutet nämlich unglücklicherweise keine Vereinfachung der Struktur. Sie geschieht „praeter necessitatem“, und Occam würde solche Nichtobservablen sicher wegrasieren. Aber von diesem Schönheitsfehler abgesehen, ist Verf.s Methode außerordentlich bemerkenswert; sie verdient auch, recht fruchtbar zu werden. — Die übrigen drei Viertel des Buches scheinen mir nicht so geglückt zu sein. Das 4. Kap., das von Theorie und Modell handelt, zeigt schon einige Mängel. Wenn Verf. einen Gegensatz zwischen beiden konstruiert, und zwar den zwischen explizitem und explizitem Aufbau, dann entspricht das nicht recht dem nun wohl feststehenden Sprachgebrauch. Aber schlimmer ist die Verwirrung, die er stiftet, wenn er zwischen Theorie und Modell einen Isomorphismus fordert (p. 90 oben), was übrigens dem meisten, das er weiter schreibt, widerspricht. — Seine Behandlung der Statistik (Kap. 5—6) ist leider ein ausgesprochener Mißgriff und jedenfalls ein Rückschritt gegenüber den heute wohl allgemein herrschenden Auffassungen. Merkwürdigerweise widmet er diesen kein Wort der Kritik. Ich halte er meinen, sie richtig wiedergegeben zu haben, so sind ihm schwerwiegende Mißverständnisse unterlaufen. — Daß er in der „reinen“ Theorie nicht von einer impliziten Definition der Wahrscheinlichkeit ausgeht, sondern vom Anzahlverhältnis einer Unterklasse einer endlichen Klasse (Urne mit weißen und schwarzen Kugeln), hat wohl didaktische Ursachen; unbefriedigend scheint es mir doch. Ein folgenreicher Fehler ist es jedoch, daß die (nach modernen Ideen auseinandergesetzte) Erprobungstheorie als eine „angewandte“ statt „reine“ aufbaut, ganz im Widerspruch zu dem, was doch die Quintessenz der modernen Auffassungen ist. Um die Erprobungstheorie zu entwickeln, adjungiert er erst nichtlogische Konstanten und Urteile (etwa hinsichtlich der Knabengeburten in Cambridge). Er formuliert die Verwerfungsregel wohl allgemein, aber doch so, daß die Variablen nicht echt sind, sondern Abkürzungen für nichtlogische Konstanten (oder Konstanten nichtreinlogischen Ausdrucks). Statt einer Strategie benutzt er also eine unbestimmte Klasse von Taktiken. Das wäre auch noch nicht schlimm, wenn diese Adjunktion alle in der Welt möglichen Konstanten und Propositionen angewandt statistischer Art beträfe, aber hier schlägt er einen merkwürdigen Irrweg ein, der ihn von den modernen Auffassungen weit wegführt. Die Adjunktion betrifft nämlich tatsächlich nur eine „Urne“ und die aus ihr (mittels der in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebräuchlichen Prozesse) abgeleiteten Urnen. So ergibt sich folgendes eigenartiges Bild: Man stellt über das Verhältnis in der Urne die Hypothese H_0 auf, die dieses Verhältnis zu p annimmt. Die Verwerfungsregel bezieht sich auf eine Stichprobe (immer mit Zurücklegen, aber das wird anders formuliert) der Länge n_0 und besitzt die statistische Unzuverlässigkeit k , d. h. wenn die Hypothese wahr ist, besitzen die Stichproben, die zur Verwerfung führen, eine Frequenz $< k$. Nun stört es den Verf., daß diese Verwerfungsregel begründet wird in der Klasse aller Stichproben der Länge n_0 , von der nur ein Element wirklich wurde. Er betrachtet daher von neuem die Hypothese H_1 , die besagt, daß die Stichproben, die zur Verwerfung führen, eine Frequenz $< k$ besitzen. Diese Hypothese wird erprobt durch eine analoge Verwerfungsregel, bei der Stichproben (der Länge n_1) aus der Menge der Stichproben genommen werden, und bei der die Unzuverlässigkeit auch wieder k ist. Von hier schreitet er analog zu Hypothesen H_2 , H_3 , ... fort. Jede statistische Verwerfung wird nach der Auffassung des Verf.s vorläufig; aus der einer H_i folgen logisch die der vorhergehenden Hypothesen. — Diese Auffassung entspricht aber ganz und gar nicht der statistischen Praxis. Im allgemeinen sind statistische Urteile endgültig; sie werden gefällt, um in Zweifelsfällen einen Entschluß zu fassen und zu handeln. Als statistische Theorie der Verwerfungsregel ist die Theorie des Verf.s sogar nachweislich falsch; wie so eine Theorie aussehen

müßte, sieht man an Walds sequenter Analyse. Außerdem ist sie unrealistisch. Verf. gibt selbst zu, daß der ersten Stichprobe bei der Erprobung keine zweite folgen kann. Was soll es dann aber heißen, daß wohl eine Stichprobe von Stichproben zulässig ist? Verf. rechtfertigt das aber dann doch durch eine sehr künstlich bedachte Konstruktion, die ich hier übergehen will. Die moderne Praxis verfährt so: Die „zweite“ Urne besteht nicht aus den Stichproben (Länge n_1) der ersten, sondern sie muß eine sozusagen unbestimmte Urne sein mit einem Bruchteil $< k$ an schwarzen Kugeln. Jedes statische Urteil mit der Unzuverlässigkeit k , das ich in meinem Leben fälle, entspricht einer Ziehung aus dieser Urne. Meine Strategie wird gerechtfertigt etwa durch die (logische) Tatsache, daß für $k = 5\%$ die Wahrscheinlichkeit, unter 10000 mehr als 650 schwarze Kugeln zu ziehen (d. h. falsche Urteile zu fällen), verschwindend klein ($< 10^{-11}$) ist. An dieser lächerlich kleinen Wahrscheinlichkeit hängt man die ganze Theorie letzten Endes auf. Übrigens ist das von Anfang an, seit Arbuthnot (1710), die statistische Praxis gewesen, und nur die saubere Theorie ist neu. Dieser Angelpunkt fehlt bei Verf. ganz, und damit hört seine Analyse, so interessant sie auch sein möge, auf, eine Analyse der tatsächlichen statistischen Methode zu sein. Ich finde das sehr bedauernd. — Im weiteren Verlauf (Kap. 7) wendet Verf. sich der Wald-v. Neumannschen Minimalextrahemethode zu, die er in schöner und begreiflicher Weise darstellt; mit den früher behandelten Fragen besteht aber kein nennenswerter Zusammenhang. — Der Rest des Buches (Kap. 8—10) ist dem Induktionsproblem gewidmet, das die Briten seit Hume „andauernd gefesselt hat und das von ihnen mit immer größerer Gewandtheit und Spitzfindigkeit behandelt wird. Anders als document humain und mit gewisser Neugier kann man diese Ausführungen kaum lesen, vielleicht noch mit einem leichten Bedauern, daß so taugliche Methoden auf ein untaugliches Objekt losgelassen werden. Von dem mathematischen Geist der ersten Kapitel spürt man hier nichts mehr; ich glaube, daß ich auf ihren Inhalt an dieser Stelle nicht näher einzugehen brauche. Aber um nicht so negativ zu schließen, will ich noch einmal auf die ersten Kapitel hinweisen, die dem Buche einen ganz außerordentlichen Wert verleihen.

H. Freudenthal.

Boda, Étienne: Les lois de la nécessité — la réédification de la logique. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 109—120 (1953).

Es wird behauptet: il n'existe que la logique, science des lois de la nécessité objective universelle (assurant — pour notre intelligence — l'ordre même de la réalité). Verf. macht den Unterschied zwischen „connexion“ (ontologique) und „relation“ (logique), analysiert die Begriffe „permissibilité“ und „compatibilité“ und betrachtet ferner auch die Negation. Somit steht die Behauptung: il n'y a certainement qu'une „perfection“ concevable exactement par les humains: c'est justement celle de la nécessité — qui est l'ordre „unificateur“ même de la réalité, tel qu'il se présente dans notre conscience —, avec sa rigueur „parfaitement“ sévère, ne „tolérant“ aucune „contradiction“, ni même la minime „exception“. Ist aber die Wirklichkeit, welche solcherweise durch die Logik der Notwendigkeit nicht erfassbar ist, keine Realität?

Z. Suetuna.

Lorent, Henri: Réalités et symbolismes en mathématiques. Enseignement math. 39, 194—210 (1953).

Ausgehend von dem Satz, daß die Mathematik als abstrakte Wissenschaft ihre Wurzeln in der wahrnehmbaren Wirklichkeit habe, stellt Verf. die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den wahrnehmbaren Ursprüngen und den verschiedenen Stufen der Abstraktion, zwischen denen sich die Zweige und Methoden der Mathematik aufbauen. Er versucht diese Frage mit elementaren Mitteln zu beantworten. In fesselnder Weise bespricht er mathematische Begriffe und Methoden, wie z. B. die Menge, das Zählen und Messen, die Zahl und die Rechenoperationen, die geometrischen Gebilde und die analytische Geometrie, die Gleichheit, den Vektor, die mathematische Wahrheit. Dabei geht er stets aus von wahrnehmbaren Elementen und zeigt, wie sich daraus die abstrakten Begriffe mit Hilfe eines Systems von Symbolen entwickeln. Der paradoxen Ausspruch B. Russells, daß man in der Mathematik nie wisse, wovon man spricht, und ob das, was man sagt, wahr ist, führt zur Erkenntnis, daß einerseits die physische Wirklichkeit am Ursprung aller mathematischen Entwicklungen steht, andererseits der Reichtum der abstrakten Ergebnisse der Mathematik das Studium der physischen und menschlichen Tatsachen auf den verschiedensten Gebieten belebt, so daß der menschliche Geist sich dieser Tatsachen bemächtigen kann, um daraus Instrumente menschlicher Zwecke zu machen.

E. Löffler.

Martin, Gottfried: Methodische Probleme der Metaphysik der Zahl. Studium generale 6, 610—616 (1953).

In dieser mehr philosophischen als mathematischen Arbeit wirft Verf. die Frage auf, ob für das Problem der Metaphysik der Zahl, das R. Dedekind in die Frage gekleidet hat „Was sind und was sollen die Zahlen?“, eine endgültige und eindeutige Lösung zu erwarten sei. Er skizziert und erörtert zunächst die Lösungen der klassischen Diskussion, die von Pythagoras über Platon und Aristoteles, Augustin, Thomas von Aquin, Leibniz

und die Neukantianer bis zu Husserl reicht. Das Auftreten von Paradoxien in der Mathematik läßt dann die moderne Grundlagendiskussion entstehen. Als Schnittpunkt zwischen beiden Betrachtungsweisen sieht Verf. die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert an. Er verfolgt die Grundgedanken der neuen Betrachtung von Georg Cantor und Frege über B. Russell, Hilbert, Brouwer, die Entdeckung der mehrwertigen Logik durch Lukasiewicz, die Arbeiten von W. V. Quine, Gödel, Wittgenstein und Whitehead mit ihrer Rückkehr zu Platon. Zusammenfassend zieht er den Schluß, daß in der Frage nach dem Sein der Zahl verschiedene Standpunkte nebeneinander möglich sind. Er betrachtet diese Vielheit als notwendig und bezeichnet es als fundamentale Aufgabe, sie zu verstehen. Sie ergibt sich aus der Natur der Zahl und aus dem Unvermögen unseres Denkens und Aussagens (Methode der ontologischen Dialektik). Die gestellte Frage kann also nicht gelöst, sondern nur geklärt werden. Verf. stellt eine umfassende Darstellung des Problems in Aussicht. *E. Löffler.*

Lorenzen, Paul: Die Allgemeingültigkeit der logischen Regeln. Studium Generale 6, 605—609 (1953).

Verf. geht in dieser logischen Untersuchung aus von dem Problem der Einheit der Wissenschaft. Er fragt, nach welchen Kriterien Wissenschaft zu definieren sei. Als einzige Möglichkeit, zu einer Definition zu kommen, bezeichnet er die Allgemeingültigkeit. Prototyp allgemeingültiger Aussagen ist die Logik. Deshalb untersucht er die These: „Die logischen Regeln sind allgemeingültig“. Um festzustellen, was logische Regeln sind, wählt er einige bekannte Schlüsse, die sich als Regeln über Regeln (Metaregeln) herausstellen. Er erklärt an ihnen das Phänomen der Allgemeingültigkeit sowohl nach der ontologischen wie nach der operativen These. Nach der ersteren ist die Allgemeingültigkeit der logischen Regeln in der Struktur der Gedankenphäre begründet. Nach der zweiten ergibt sie sich durch Zurückführung auf operative Tatsachen. Nachdem Verf. das Mißverständnis, als ob Logik und Mathematik nichts anderes als operative Tatsachen festzustellen hätten, ausgeräumt hat, zeigt er, wie man auf Grund solcher Tatsachen zu gewissen Metaregeln gelangt. Betrachtet man diese nun als primitive Regeln, so kann man aus ihnen mit Hilfe des Vermögens der Reflexion ihre Metaregeln gewinnen, durch iterierte Reflexion die gesamte formale Logik aufbauen und zu immer komplizierteren Formen des Schließens gelangen. Die operative Antwort auf die Kantsche Frage, ob die Allgemeingültigkeit überhaupt möglich sei, lautet hiernach, daß 1) das Operieren nach Regeln ein Vermögen des Menschen ist und daß 2) die Logik nichts anderes als zweckmäßige Verfahren für das Operieren nach Regeln lehrt. Verf. glaubt, daß dieser operative Ansatz eine Möglichkeit eröffnet, zu einem vollen Verständnis dessen zu kommen, was wir tun, wenn wir logisch schließen. *E. Löffler.*

Freudenthal, Hans: Inhaltliche Interpretationen in der formalen Logik. Nederl. Akad. wet. Verslag Afd. Natuurk. 62, 94—96 (1953) [Holländisch].

Eine Implikation ist in der mathematischen Logik eine Aussage $p \rightarrow q$ (wenn p , dann q), die dann und nur dann falsch ist, wenn p richtig (1) und q falsch (0) ist. Von den vier Kombinationen der Werte 1 und 0 (Wertetafel) ergeben also drei eine im logischen Sinn richtige Implikation. In der Umgangssprache können sich jedoch Paradoxien ergeben. Als Beispiel untersucht Verf. die auch schon von anderer Seite behandelte Definition der Temperatur des Wassers von 20° : „Wenn ich das Thermometer ins Wasser tauche, geht die Quecksilbersäule zum Skalenstrich 20° “ (A). Da (A) die Form einer Implikation hat, führt die Definition des Begriffs der Implikation zu dem Ergebnis, daß das Wasser stets dann die Temperatur habe, wenn der Vordersatz von (A) falsch ist, d. h. wenn ich das Thermometer nicht in das Wasser getaucht habe. Zur Klärung dieses Paradoxons weist Verf. darauf hin, daß die Implikation in der Umgangssprache eine Beziehung zwischen Aussagen ist, die im Hinblick auf ihren Wahrheitsgehalt ambivalent sind. Bezeichnet man als „volle Implikation“ eine Beziehung zwischen p und q , bei der alle drei Wertekombinationen (0, 0), (0, 1) und (1, 1) möglich sind, dann nimmt die genaue Definition der Temperatur die Form an: „Die Behauptung, das Wasser habe die Temperatur von 20° , bedeutet, daß die oben angeführte Aussage (A) eine volle Implikation ist“. Eine Bemerkung über irrationale hypothetische Aussagen, die die Form von Implikationen haben, beschließt die kurze Arbeit. *E. Löffler.*

Dieudonné, Jean: Logik und Mathematik. Revista Mat. element. 2, 1—7 (1953) [Spanisch].

Die Arbeit ist nach einem Vortrag, den Verf. am 15. Oktober 1952 an der Universität Los Andes (Chile) gehalten hat, ins Spanische übersetzt. Sie gibt, ohne Neues zu bringen, einen leichtverständlichen Überblick über das Verhältnis zwischen Logik und Mathematik seit den Griechen bis auf unsere Zeit. Verf. geht von der Tatsache aus, daß die griechische Mathematik in ihren Anfängen nur eines der Gebiete war, in denen sich die Logik mit Erfolg anwenden ließ. Lange Zeit erschienen die mathematischen Sätze als absolute Wahrheiten. Mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie traten Schwierigkeiten auf. Die Mathematik erschien als reine Logik, wobei diese nur auf Begriffe angewandt wurde, die jeden Zusammenhang mit der Wirklichkeit verloren haben. Verf. schildert die Bemühungen der

Axiomatiker und der Intuitionisten, die Krisis, die die Logik selbst und ihre Anwendung auf die Mathematik bedrohte, sowie die Versuche, formalisierte Sprachen mit Operationsregeln zu schaffen, in denen bestimmte Zeichenverbindungen richtigen Sätzen der Theorie entsprechen. Er weist schließlich auf die Mängel dieser Sprachen hin und glaubt, daß die Begriffe des Absoluten und Vollkommenen für immer Träume bleiben werden, die für das menschliche Gehirn nicht realisierbar sind. Die Aufklärungsarbeit der Mathematik im letzten Jahrhundert habe uns aber über den Mechanismus des logischen Denkens und seine Anwendung auf die mathematischen Begriffe vieles gelehrt, was unseren Vorfahren unbekannt war. Trotz einer gewissen Enttäuschung und trotz des abstrakten und mehr als je von der erkennbaren Wirklichkeit entfernten Aspektes der Mathematik könne man deshalb sagen, daß sie ihren Namen als exakte Wissenschaft nie besser verdient habe als heute. *E. Löffler.*

Carnap, Rudolf: *Inductive logic and science.* Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 80, 189—197 (1953).

Härtig, Klaus: Die „identischen Urteile“ der Syllogistik. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 28—34 (1953).

● **Basson, A. and D. J. O'Connor:** *Introduction to symbolic logic.* London: University Tutorial Press 1953. VIII, 169 p. 7 s. 6 d.

Die meisten Kompendien der mathematischen Logik, die für einen größeren Leserkreis bestimmt sind, leiden an einem Schönheitsfehler. Sie verlieren sich schnell im Unbestimmten, wenn sie scharf angesehen werden: das Fatalste, was einem solchen Kompendium sollte zustoßen können. Anders ist es im vorliegenden Falle, obschon die beiden Verf. sich selbst ausdrücklich als Philosophen bezeichnen, und offenbar im Sinne von Nicht-Mathematikern. Das Büchlein ist sehr gut durchdacht und an Leser gerichtet, die wirklich etwas lernen wollen, also in diesem Falle bestimmt an Leser, die bereit sind, zu buchstabieren, wo es erforderlich ist. Es ist zwar nicht explizit gesagt, es ist aber wohl in erster Linie an Philosophen gedacht, die sich in die neue Logik so hineinfinden wollen, daß sie effektiv in der Lage sind, den Hilbert-Ackermann (dies. Zbl. 34, 290) zu studieren. Es scheint mir, daß dies so gut gelungen ist, daß es nicht unbemerkt bleiben sollte. Daß auf alle philosophischen Diskussionen explizit verzichtet worden ist, wird man nur billigen können in einem Falle, in welchem ein solides handwerkliches Können erzielt werden soll, in Verbindung mit einer möglichst gründlichen Einsicht in den Sinn und die Grundlagen dieses Könnens.

Sechs Kapitel. Auf eine Einleitung (Kap. 1) folgt eine Diskussion des Aussagenkalküls (Kap. 2—4) mit den beiden Möglichkeiten eines semantischen und eines syntaktischen Aufbaus, wo alles, worauf es ankommt, so gesagt ist, daß man auf einer höheren Stufe nicht umzulernen braucht. Es folgt (Kap. 5) eine Einführung in den semantisch charakterisierten ein- und zweistelligen Prädikatenkalkül. Die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems für den einstelligen Fall wird an die Endlichkeit der Entscheidungsbereiche angeschlossen, und es wird wenigstens angedeutet, daß und warum dies schon im zweistelligen Falle grundsätzlich nicht mehr gelingt. Angeschlossen ist (in Kap. 6) eine Konfrontierung der Aristotelischen Syllogistik mit der Booleschen Algebra.

Man bemerkt, daß die Verf. das, was sie vortragen, selbst durchdacht und nicht aus zweiter Hand geschöpft haben, wie in so vielen ähnlichen Fällen. Dies soll ausdrücklich auch für die Fälle gesagt sein, in denen es sich um Dinge handelt, die im wesentlichen überhaupt nur noch durch die Art ihrer Darstellung variiert werden können. Ein Beispiel: Zur Präzisierung der Unentscheidbarkeit des n -stelligen Prädikatenkalküls wird bemerkt, daß die Entscheidbarkeit jedenfalls nicht durch eine Turing-Maschine geleistet werden kann. Vermissen kann man zur Lösung des Entscheidungsproblems im einstelligen Falle, daß nichts dazu gesagt ist, wie man im konkreten Fall als Funktion der Anzahl der P -Variablen die Anzahlbedingung findet, für welche die Identität bzw. die Erfüllbarkeit erweislich sein muß.

Ein im ganzen wohl überlegter bibliographischer Anhang ist beigegeben, mit der Spitzenstellung von Hilbert-Ackermann. Zu den Empfehlungen von Reichenbach und Rosenbloom an dieser Stelle kann ein Fragezeichen gesetzt werden. Dagegen ist das vortreffliche Büchlein von W. V. Quine, „Methods of Logic“ (dies. Zbl. 38, 148), und im Zusammenhang mit Aristoteles das bahnbrechende Werk von Łukasiewicz, „Aristotle's Syllogistic“ (Oxford 1951, dies. Zbl. 43, 246), nicht so hervorgehoben, wie sie es nach dem Urteil des Ref. verdient haben. Diese Bemerkungen am Rande tasten jedoch den Wert des Ganzen nicht an. Es könnte den Anstoß liefern zu einer Bewegung, die England in einem wesentlich höheren Grade auf die mathematische Logik zurückführt, als dies in den letzten zwanzig Jahren geschehen ist. *H. Scholz.*

Skolem, Th.: Betrachtungen über die Grundlagen der Mathematik. I, II. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 169—200 (1952), 13, 149—174 (1953) [Spanisch].

I. Unter Mathematik werden hier nur Arithmetik, Algebra und Analysis verstanden. Die Arbeit ist von den Grundgedanken beherrscht, die Verf. 1952 in einer Vorlesung über die Natur des mathematischen Denkens entwickelt hat (dies. Zbl. 47, 6), nämlich dem Be-

einer mathematischen Theorie als formales System und einer formal-finitistischen Philosophie. Der erste Abschnitt enthält eine Übersicht über die wichtigsten logisch-mathematischen Theorien der letzten 70 Jahre. Ihr Ausgangspunkt waren einige allgemeine logische Begriffe, wie z. B. die der Aussagefunktion und der Menge. Verf. formalisiert einige Grundbegriffe der Cantorsche Mengenlehre, um Klarheit zu gewinnen, wie das Russellsche Paradoxon in ihr auftreten kann. Er stellt dann die Frage, ob die Axiome der Mengentheorie so modifiziert werden können, daß solche Widersprüche vermieden werden. Dies führt zu dem Mengensystem von E. Zermelo und zu der Kritik, die A. Fraenkel und Verf. (1922) erst daran geübt haben (vgl. A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 2. Aufl., Berlin 1928), sowie zu einer Besprechung der Gedanken von Quine, der Typenlehre von Russell, Whitehead, der formal-logischen Systeme (Sprachen), die durch einige Beispiele erläutert werden, und der sogenannten positiven Aussagenlogik, die der klassischen gegenübersteht und mit der intuitionistischen verwandt ist. Der zweite Abschnitt ist dem Implikationskalkül gewidmet, der einen Teil der Aussagenlogik bildet. Es wird ein System von Axiomen und eine Reihe von logischen Regeln und Formeln für diesen Kalkül aufgestellt. Der dritte Abschnitt handelt von der Rechnung mit Implikation und Konjunktion. Hierfür werden drei zusätzliche Axiome aufgestellt und eine Anzahl Rechenregeln ausführlich entwickelt. Der vierte Abschnitt endlich führt als dritte logische Verknüpfung die Disjunktion ein und verbindet sie mit drei weiteren Axiomen. Es wird gezeigt, daß die Menge aller Formeln in dem gesamten, auf den bisher aufgestellten neun Axiomen beruhenden System eine distributive „Struktur“ ist. Damit wird eine enge Verbindung zwischen der Theorie der Aussagenfunktionen und dem formalen System der positiven Logik nachgewiesen. Schließlich wird ein Satz bewiesen, daß, wenn eine Formel $A \vee B$ in dem genannten System beweisbar ist, entweder A oder B in diesem System beweisbar sind. II. Der fünfte Abschnitt führt mit einem neuen Axiom die Aussagekonstante der Absurdität ein und handelt von den intuitionistischen klassischen Systemen. Das gesamte, auf die zehn Axiome gegründete formale System bildet den intuitionistischen Aussagenkalkül, der in Verbindung mit der Substitutionsregel und dem Modus ponens im wesentlichen identisch ist mit dem auf die Axiome von Heyting gegründeten System. Mit Hilfe des Begriffs der Absurdität wird die Operation der Negation definiert. Damit werden sodann drei Sätze von Glivenko bewiesen. Der sechste Abschnitt behandelt die elementare Rechnung mit freien Individualvariablen, und im Anschluß daran der siebente Abschnitt vom Prädikatenkalkül, wobei der Nachdruck auf den intuitionistischen Kalkül gelegt wird. Es wird eine Reihe einfacher Sätze des letzteren bewiesen, eine Methode entwickelt, um zu bestätigen, daß es Formeln gibt, die in der klassischen Logik richtig, in der intuitionistischen falsch sind. Im achten Abschnitt werden die Sätze von Glivenko verallgemeinert und der Satz von Gödel bewiesen: „Für jede arithmetische Formel, die im klassischen System richtig ist, ist die Formel, die ihr (in einem bestimmten Sinn) entspricht, im intuitionistischen System richtig.“ Der letzte Abschnitt bringt eine Weiterentwicklung des im sechsten behandelten elementaren Kalküls mit freien Individualvariablen, die sog. „Rekurrente Arithmetik“. — Es ist in einem kurzen Referat nicht möglich, eine genaue Vorstellung von der Fülle von Begriffsbildungen, Methoden und Sätzen zu geben, die in diesen Betrachtungen über die Grundlagen der Mathematik enthalten sind. Leider ist Verf. mit Literaturangaben sehr sparsam; häufigere Vergleiche mit Arbeiten anderer Autoren, die ähnliche Probleme behandeln, würde das Verständnis erleichtern. E. Löffler.

Schröter, Karl: Theorie des mathematischen Schließens. Ber. Math.-Tagung Berlin 14. 1.—18. 1. 1953, 5—12 (1953).

Verf. erläutert die Beziehungen zwischen der deduktiven Ableitbarkeit und dem semantischen Folgerungsbegriff. Wie bereits aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz hervorgeht, sind diese Begriffe für den Prädikatenkalkül 1. Stufe umfangsgleich. Verf. begründet diese Umfangsgleichheit mit dem Endlichkeitsatz: Wenn jede endliche Teilmenge von \mathcal{Y} ein Modell besitzt, so auch \mathcal{Y} . Eründigt eine Arbeit über die Theorie des Schließens an mit ausführlichen Besprechungen des Endlichkeitsatzes und damit im Zusammenhang stehender Sätze, insbesondere mit einer Übertragung des Gentzenschen Sequenzenschließens auf den Fall, daß aus unendlichen Mengen auf unendliche Mengen geschlossen wird. Den Ausführungen liegt die klassische (nichtfinite) Mathematik zugrunde. Kurt Schütte.

Bernays, P.: Existence et non-contradiction en mathématique. Avec une préface de G. Bouligand. Revue philos. France et Étranger 143, 85—87 (1953).

Hailperin, Theodore: Quantification theory and empty individual-domains. Symbolic Logic 18, 197—200 (1953).

Eine Alternativlösung zu Mostowskis Axiomatisierung einer Prädikatenlogik (dies. Z. 43, 9), für deren Allgemeingültigkeitsbegriff auch der leere Bereich zur Konkurrenz

zugelassen ist. Man fordere (1) in Analogie zu den nullgliedrigen Konjunktionen bzw. Alternativen aus den 2^n Gliedern einer Booleschen Normalform in p_1, \dots, p_n für den leeren Bereich generell, also auch für leerlaufendes \forall bzw. \exists , daß $\forall x H$ als wahr, $\exists x H$ als falsch interpretiert wird, (2) daß Sätze auf abgeschlossene Ausdrücke beschränkt werden ($\vdash_0 H$ bedeutet, daß eine Generalisierte von H ein Satz ist). Dann erhält man gegenüber Mostowski als Resultat, daß (1) die Abtrennungsregel, (2) die Distributivtheoreme für \forall und \exists erhalten bleiben. Der Vollständigkeitsbeweis für \vdash_0 führt über die Axiomatisierbarkeit der Allgemeingültigkeit im üblichen Sinne durch Adjungierung von $\sim \forall x f$ (mit dem Falsum f) und der inhaltlichen Bedeutung, daß der Individuenbereich nicht leer ist) zu dem Axiomensystem von \vdash_0 . Bemerkung des Ref.: Aus den durch Zulassung der leerlaufenden Quantoren in dem vorliegenden Falle erzeugten Komplikationen ergibt sich, daß diese Zulassung nicht in jedem Falle eine Vereinfachung bedeutet.

H. Scholz.

Hintikka, K. Jaakko J.: A new approach to sentential logic. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 17, Nr. 2, 14 p. (1953).

En vue d'une possible extension de la méthode des „valeurs de vérité“ à des types supérieurs de logique, l'A. présente un traitement de la logique des propositions qui permet, par un processus d'adjonction qui est un processus ad absurdum, de déterminer la valeur de vérité de toute formule dans un nombre fini de pas. Ceci même si le système de logique contient une infinité de formules élémentaires. Le processus de détermination des valeurs de vérité d'un système infini de formules utilise l'axiome de choix. On peut éviter avec cela d'introduire les tables de vérité de ces systèmes, qui sont nécessairement de puissance non dénombrable.

H. Guggenheimer.

Asser, Günter: Die endlichwertigen Łukasiewiczschen Aussagenkalküle. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. I.—18. I. 1953, 15—18 (1953).

Ein Bericht über die von J. Łukasiewicz in die Forschung eingeführten endlichwertigen Systeme des Aussagenkalküls mit besonderer Beziehung auf die Axiomatisierbarkeitsfrage.

H. Scholz.

Łukasiewicz, Jan: A system of modal logic. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 14, 82—87 (1953).

I. Voraussetzungen: (1) die klammerfreie Symbolik des Verf. mit den Konstanten C („wenn — so“), N („nicht“), E („genau dann, wenn“), K („und“), A („oder“), (2) die als Wahrheitsfunktoren normierten modalisierenden Funktoren Δ (es ist möglich, daß), Γ (es ist notwendig, daß), (3) die über dem Bereich der Aussagevariablen und der aus ihnen erzeugbaren Ausdrücke definierte einstellige aussageerzeugende Funktorenvariable δ , (4) die metasprachlichen Kurzzeichen \vdash für „(die Annahme, daß ...) ist anzuerkennen“ und \dashv für „(die Annahme, daß ...) ist zu verwerfen“.

II. Ein Kalkül heiße eine modale Basislogik (basic modal logic), wenn er die folgenden Theoreme enthält:

- (1.1) $\vdash C p \Delta p$, (1.2) $\vdash C \Gamma p p$, (1.3) $\vdash E \Gamma p N \Delta N p$, (1.4) $\vdash E \Delta p N \Gamma N p$.
(2.1) $\dashv C \Delta p p$, (2.2) $\dashv C \Gamma p p$, (2.3) $\dashv \Delta p$, (2.4) $\dashv N \Gamma p$.

Ein Kalkül heiße eine modale Logik, wenn er eine modale Basislogik als Teilsystem enthält.

III. Da jeder der beiden modalisierenden Funktoren in bekannter Weise (1.3, 1.4) mit Hilfe des anderen definierbar ist, so ist die modale Basislogik im Rahmen des klassischen Aussagenkalküls axiomatisierbar

- (a) durch (1.1), (2.1), (2.3), (3.1) $\vdash E \Delta p \Delta N N p$.
(b) durch (1.2), (2.2), (2.4), (3.2) $\vdash E \Gamma p \Gamma N N p$.

IV. Fügt man

- (a) zu (1.1), (2.1), (2.3)
(b) zu (1.2), (2.2), (2.4)

hinzu (4) $C \delta p C \delta N p \delta q$, so erhält man auf Grund der Beweisbarkeit von (5) $\vdash C E p q C \delta p \delta q$ ein System \mathcal{E} der modalen Logik, das in bezug auf Einsetzung und Abtrennung (und die entsprechenden Operationen für den Fall der Verwerfung) vollständig ist in dem Sinne, daß es durch eine adäquate 4-wertige Matrix mit einem ausgezeichneten Wert erfaßt werden kann. Hierfür ist wesentlich die Entdeckung, daß der zweiwertige Aussagenkalkül (mit Adjungierung von δ) aus (4) allein gewonnen werden kann.

Das System \mathcal{E} ist außerordentlich reich und deduktionskräftig. Es liefert für die modalisierenden Funktoren die Reduktionstheoreme, die eine Reduzierung von $\Delta^{(n)}$ auf Δ , von $\Gamma^{(n)}$ auf Γ ermöglichen, dagegen eine Reduktion von $\Delta N \Delta$ auf $N \Delta$ oder von $\Gamma N \Gamma$ auf $N \Gamma$ ausschließen. Diese Resultate scheinen dem Ref. sehr wohl verträglich zu sein mit den mannigfaltig

strittenen Intuitionen, die den modalisierenden Funktoren zugrunde liegen. Ebenso die angeschlossen Hauptresultate, bis auf den einen kritischen Fall $\vdash E \vdash K p q K \vdash p, \vdash q$. Man erze q durch $\vdash N p$. Dann gelingt es dem Ref. nicht, dem Übergang von Rechts nach Links eine lehmbare Interpretation abzugewinnen. Der Verf. protestiert lebhaft. Die Frage wird weiter knüft werden müssen. In jedem Falle ist dieser musterhafte Bericht eine Einführung Modalisierungsmöglichkeiten, die dem Besten, was für diesen so schwer zu beherrschenden reich bis jetzt geleistet worden ist, mindestens gleichzustellen sind. Der Verf. ist ganz und nicht dogmatisch. Aber er hat eine feste eigene Meinung: „I am fully aware that other tems of modal logic are equally possible as based on other concepts of possibility and essity. But I firmly believe that we shall never be able to decide which of them is true. tems of logic are instruments of thought, and the more useful a logical system is, the more luable it is.“

Das Programm, über das hier berichtet wird, ist in der vorbildlichen Art des Verf. unter selben Titel ausgeführt in *J. of Computing Syst.* 3, 111–149 (1953). *H. Scholz.*

Wright, G. H. von: A new system of modal logic. *Proc. XIth Internat. Congr. ulosophy* (Brussels, Aug. 20–26, 1953) 5, 59–63 (1953).

Ein Bericht über ein zum erstenmal untersuchtes, noch nicht publiziertes aussagen- isches System der relativierten Modalitäten (Relativsystem gegenüber den bis jetzt aus- ißlich diskutierten Absolutsystemen) mit $M(p, q)$ für „ p ist möglich in bezug auf q “, $M(p, q)$ für „ p ist unmöglich in bezug auf q “, $\sim M(\sim p, q)$ für „ p ist notwendig in bezug q “, $M(p, t)$ für „ p ist möglich“, mit t als Symbol für eine aussagenlogische Identität, daß die Absolutsysteme als Grenzfälle aus dem Relativsystem hervorgehen und $M(p, t)$ ichbedeutend ist mit $\Diamond p$ in der Symbolik des Lewis-Kalküls. M -Reihen vom Typus H_1, H_2 — H_1, H_2 aussagenlogische Ausdrücke — heißen M -Atome. Die Menge \mathfrak{M} der nogenen M -Ausdrücke erster Ordnung soll sein die kleinste Menge, die (1) die M -Atome hält, (2) abgeschlossen ist in bezug auf die aussagenlogischen Operationen. Nur diese nge wird diskutiert. Die Menge der \mathfrak{M} -Sätze ist definiert als die aussagenlogische Folge- smenge von $A1, M(t, t), A2, \sim M(\sim t, t), A3, M(p, t) \rightarrow M(q/p) \vee M(\sim q/p), A4, M(p \wedge q/t) \rightarrow M(p/t) \wedge M(q/p)$. K sei der hierdurch bestimmte Kalkül, so daß die K -Sätze mit den -Sätzen zusammenfallen.

Hierzu folgendes: (1) Eine Vergleichung von K mit dem über $M(p, t) \stackrel{=}{=} \Diamond p$ auf entsprechende Ausdrucksmenge reduzierten Fragment des Lewis-Kalküls L liefert das ebnis, daß zwar jeder L -Satz ein K -Satz ist, aber nicht umgekehrt. K ist wesentlich her an Sätzen als L . (2) Daß q eine logische Konsequenz (entailment) ist von p , wird im Kalkül ausgedrückt durch $\Diamond \sim (p \wedge \sim q)$, mit den bekannten Aporien, daß (a) ein un- gliches p jedes q als logische Konsequenz nach sich zieht, (b) ein notwendiges q umgekehrt a jedem p als eine logische Konsequenz nach sich gezogen wird. Interpretiert man dagegen umstrittene Beziehung durch $\sim M(\sim q, p) \rightarrow$ also durch „ q ist notwendig in bezug auf p “ —, können diese Aporien in K nicht mehr abgeleitet werden. Dies spricht für eine Interpre- tion durch $\sim M(\sim q, p)$ in K . (3) In L ist die Verträglichkeit von p mit q ausgedrückt durch $p \wedge q$. p ist also unverträglich mit q stets dann, wenn p oder q unmöglich ist. Der Verf. cht geltend, daß q mit p offenbar auch dann verträglich sein müsse, wenn q (Vermutung s Ref.: im Sinne von (2)) eine logische Konsequenz ist von p . Mit diesem Fall ist aber zu hnen, wenn p und q beide unmöglich sind. Folglich ist die Verträglichkeit von p mit q L nicht adäquat ausgedrückt (Verf. fugt hinzu: und in einem Absolutsystem überhaupt ht adäquat ausdrückbar, sondern erst in K . Dann müßte nach Meinung des Ref. in jedem lle die Symmetrie der Verträglichkeitsbeziehung in K beweisbar sein. Hierzu ist nichts agt. (4) Die Auffassung der Wahrscheinlichkeit als einer meßbaren Möglichkeit ist natür- h und naheliegend. Man betrachte $M(H_1, H_2)$ als ein Maß für die Abhängigkeit von H_1 n H_2 , mit $0 \leq M(H_1, H_2) \leq 1$. Die Beweisbarkeit von $M(H_1, H_2)$ werde ausgedrückt durch $(H_1, H_2) = 1$, die Widerlegbarkeit von $M(H_1, H_2)$ durch $M(H_1, H_2) = 0$. Mit diesen Fest- zungen ersetze man $A1 \rightarrow A4$ durch $A'1, M(t, t) = 1, A'2, M(\sim t, t) = 0, A'3, M(p/t) = 0$ $M(q/p) + M(\sim q/p) = 1, A'4, M(p \wedge q/t) = M(p/t) \times M(q/p)$. Dann ist $A'1 \rightarrow A'4$ eine iomatische Basis für die (auf dem Begriff der gleichmöglichen Fälle aufgebaute) elementare ssische Wahrscheinlichkeitstheorie, aber ohne Voraussetzung des umstrittenen Wahrschein- keitsbegriffs dieser Theorie. Man vermißt das Additionstheorem. Es ist beweisbar in der stalt: $M(p \vee q/t) = M(p/t) + M(q/t) - M(p \wedge q/t)$. (5) Eine Theorie der Modalitäten herer Ordnung würde, um nicht trivial zu sein, entsprechende Modifizierungen von K (in zug auf die Axiome und die Uniformierungsregeln) zur Voraussetzung haben. *H. Scholz.*

Simons, Leo: New axiomatizations of $S3$ and $S4$. *J. symbolic Logic* 18, 99–316 (1953).

L'A. donne des systèmes d'axiomes des systèmes modales $S3$ et $S4$ qui sont us simples que les systèmes de Lewis et de McKinsey-Tarski (ce *Zbl.* 37, 294). montre en outre l'indépendance mutuelle des axiomes. *H. Guggenheimer.*

Rose, Alan: Fragments of the m -valued propositional calculus. Math. Z. 59, 206—210 (1953).

L. Henkin (dies. Zbl. 34, 7) hat ein allgemeines Verfahren angegeben, durch dessen Anwendung jeder Teilkalkül des zweiwertigen Aussagenkalküls axiomatisiert werden kann, unter der Voraussetzung, daß \rightarrow mit Hilfe der vorgegebenen Grundsymbole in Übereinstimmung mit der klassischen Bewertungstafel definiert werden kann. In der vorliegenden Studie wird ein entsprechendes Verfahren angegeben für die sogenannten m -wertigen Aussagenkalküle mit einem einzigen ausgezeichneten Wahrheitswert, unter Voraussetzung der von J. Łukasiewicz für den m -wertigen Fall definierten Bewertungstafel für \rightarrow : Die vorausgesetzten Wahrheitswerte seien $1, \dots, m$. 1 sei der ausgezeichnete Wert. Dann soll gelten: Wenn $H_1, H_2, H_1 \rightarrow H_2$ in dieser Folge die Wahrheitswerte $\alpha_1, \alpha_2, f(\alpha_1, \alpha_2)$ annehmen, sei $f(\alpha_1, \alpha_2) = \max(1 - \alpha_1 + \alpha_2)$. Eine Folge von Hilfskonstruktionen, beginnend mit $H_1 \rightarrow H_2 \stackrel{\text{pr}}{=} H_1 \rightarrow H_2, H_1 \rightarrow_{i+1} H_2 \stackrel{\text{pr}}{=} H_1 \rightarrow (H_1 \rightarrow_i H_2)$, ermöglicht die Einführung einer viergliedrigen Folge F von Axiomenschematen mit

$$A1 = ((H_1 \rightarrow H_2) \rightarrow H_3) \rightarrow ((H_3 \rightarrow H_1) \rightarrow (H_4 \rightarrow H_1)),$$

mit \rightarrow für \rightarrow_{m-1} . A1 liefert, wie J. Łukasiewicz (dies. Zbl. 29, 98) gezeigt hat, eine Axiomatisierung des zweiwertigen Aussagenkalküls in \rightarrow für \rightarrow , mit Bezug auf die Abtrennungsregel. Es wird gezeigt: (1) Unter Voraussetzung einer zweiten Umformungsregel (formuliert mit Benutzung von Hilfskonstruktionen, auf die hier nicht eingegangen werden kann), ist F vollständig im semantischen Sinn. (2) F' gehe aus F dadurch hervor, daß die in F auftretenden Axiomenschemata durch entsprechende Axiome ersetzt werden. Nimmt man dann noch eine Einsetzungsregel hinzu, so ist F' im syntaktischen Sinne vollständig. H. Scholz.

Kemeny, John G.: A logical measure function. J. symbolic Logic 18, 289—308 (1953).

Unter einer logischen Maßfunktion einer Sprache wird eine syntaktisch definierte Funktion verstanden, die jedem Ausdruck der Sprache einen Wert (meist eine Zahl zwischen 0 und 1) zuordnet. Derartige Maßfunktionen werden in der Literatur vor allem als Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Ausdrucks benutzt. Die vom Verf. gegebene Definition erscheint geeignet, dem Begriff der Maßfunktion eine vermehrte Anwendungsfähigkeit vor allem auch in bezug auf Prädikatenkalküle höherer Stufen zu sichern. — Grundlegend ist der vom Verf. eingeführte Begriff des Modells eines logischen Systems (dies. Zbl. 35, 4). Die Sprache L , für die die Maßfunktion eingeführt wird, wird als konsistent vorausgesetzt, hat also mindestens ein Modell. Unter einem n -Modell wird ein finites Modell verstanden, das mit n Dingen für die Individuen auskommt. Ferner wird für L die folgende Voraussetzung gemacht: Mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von ganzen Zahlen n hat L für jedes n mindestens ein, aber nur endlich viele n -Modelle. Es darf also in L kein Unendlichkeitsaxiom vorhanden oder eine entsprechende Behauptung beweisbar sein. Abweichend von der üblichen Definition wird nun jedem Ausdruck der Sprache L nicht eine Zahl, sondern eine zahlentheoretische Funktion mit rationalen Werten zugeordnet. Die Definition dieser Funktion sieht so aus: M_n sei die Anzahl der n -Modelle von L , M_n^w die Anzahl der n -Modelle, bei denen der Ausdruck W den Wert „wahr“ erhält. Die Maßfunktion $m(W)$ hängt dann von n ab und hat den Wert M_n^w/M_n . Sie ist für alle n mit endlich vielen Ausnahmen definiert. $m(W_1)$ heißt größer als $m(W_2)$, wenn ein n_0 vorhanden ist, so daß für alle $n \geq n_0$ der Wert von $m(W_1)$ größer als der von $m(W_2)$ ist. Analog werden die Beziehungen „kleiner als“ und „ist gleich“ zwischen $m(W_1)$ und $m(W_2)$ definiert. Zwei Ausdrücke W_1 und W_2 heißen vergleichbar, wenn zwischen $m(W_1)$ und $m(W_2)$ eine der Beziehungen „größer als“, „kleiner als“, „ist gleich“ besteht. Anstatt $m(W)$ zu nehmen, ist es für viele Fälle vorteilhaft, $-\log_2(m(W))$ zu betrachten, das ein befriedigendes Maß für die „Stärke“ eines Ausdrucks zu geben scheint. Verf. vergleicht dann seine Maßfunktion mit anderen aus der Literatur bekannten. Als besonderer Vorteil seiner Definition wird hervorgehoben, daß nicht verlangt wird, daß die „Atomsätze“ voneinander unabhängig sind. Für verschiedene einfache Sprachen, z. B. für eine solche, die nur mit den Mitteln des einstelligen Prädikatenkalküls der ersten Stufe arbeitet, wird dann eine Durchrechnung von Beispielen gegeben. Es zeigt sich übrigens, daß schon für eine Sprache, die mit Hilfe des engeren Prädikatenkalküls, aber unter Benutzung von mehrstelligen Prädikaten, formalisiert ist, im allgemeinen die Feststellung, wann zwei Ausdrücke vergleichbar sind, nicht effektiv durchführbar ist (nach Untersuchungen von B. A. Trachtenbrod über die Unmöglichkeit eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens für die Gültigkeit einer Formel in allen endlichen Bereichen).

W. Ackermann.

Mostowski, A.: A lemma concerning recursive functions and its applications. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 277—280 (1953).

Zu jeder allgemein-rekursiven Funktion $F(n)$ gibt es eine primitiv-rekursive Funktion $H(n)$ mit den Eigenschaften (1) $H(n) \leq F(n+1)$, (2) $H(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, (3) $F(H(n))$ ist primitiv-rekursiv. Verf. beweist dies unter Benutzung der bekannten Darstellung $F(n) =$

$\{x \mid R(x, n) = 0\}$, wobei $\forall n \exists x R(x, n) = 0$. Die primitiv-rekursiven Funktionen $K(n)$, $n\}$ seien so beschaffen, daß jedes Paar von natürlichen Zahlen für genau ein n durch $\{K(n), n\}$ dargestellt wird; die primitiv-rekursive Funktion $S(n)$ zähle alle die k auf, für die $\{K(k), L(k)\} = 0$. Dann wird eine Funktion H , die den Forderungen (1), (2) (3) genügt, gegeben durch $H(0) = L(S(0))$, $H(n+1) = H(n)$ falls $L(S(n+1)) = H(n)$, $= L(S(n+1))$ (falls $L(S(n+1)) \neq H(n)$). Aus diesem Lemma werden zwei Sätze gefolgert. — Eine reelle Zahl a ($0 < a < 1$) heißt allgemein-rekursiv, wenn es eine allgemein-rekursive Funktion $W(n)$ gibt, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, so daß $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W(n)}{2^n}$. Dann gilt: Zu jeder allgemein-

rekursiven reellen Zahl a ($0 < a < 1$) gibt es primitiv-rekursive Funktionen $M(n)$, $N(n)$, n derart, daß $P(n) = a$ für $n = \infty$ und $|a - M(n)(N(n) + 1)| \leq 1/(P(n) + 1)$. Aber auch jede Zahl a , für die diese Beziehungen mit primitiv-rekursiven M , N , P gelten, ist, es leicht zu zeigen, allgemein-rekursiv. — Der zweite Satz betrifft die primitiv-rekursiven Funktionen mit unendlichem Wertbereich: Ist $U(k, n)$ eine allgemein-rekursive Funktion, die universell ist für die primitiv-rekursiven, so ist die Menge Y der k , die in diesem Sinne Funktionen mit unendlichem Wertbereich definieren, nicht rekursiv aufzählbar. Der (insektuelle) Beweis beruht auf einer Art Diagonalverfahren und schließt aus der Annahme der Aufzählbarkeit von Y (konstruktiv) auf die Existenz einer Funktion F , für die das Lemma nicht gilt. — Am Schluß der Arbeit stellt Verf. die Frage, ob die Menge Y , die offenbar eine Σ -Menge ist, auch eine $\Sigma\Pi$ -Menge sei. Ref. hat einen Beweis, daß dies nicht der Fall sein kann: Y ist eine „echte“ $\Pi\Sigma$ -Menge (also a fortiori nicht rekursiv-aufzählbar). W. Markwald.

Routledge, N. A.: Ordinal recursion. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 175—182 (1953).

Eine zahlentheoretische Funktion f heie „ordinal-rekursiv in den Funktionen G , g und h “, wenn (1) $f(x, y) = G(f(g(x), y), x, y)$, falls $x = n_0$; $f(n_0, y) = h(y)$, (2) $g(x) < x$, falls $x \neq n_0$. Dabei steht y abkürzend für y_1, \dots, y_n . $<$ ist irgendeine Wohlordnung von natürlichen Zahlen. Eine solche Funktion ist offenbar rekursiv berechenbar, wenn G , g und h berechenbar sind. Die Bedingung (2) laßt sich äquivalent ersetzen durch (3) $\forall x \exists m g^m(x) = n_0$, wo $g^0(x) = x$, $g^{m+1}(x) = g(g^m(x))$. Es laßt sich darüber hinaus zu jeder Funktion g , die die Bedingung (3) genügt, eine entsprechende Wohlordnung $<$ vom Typ ω (mit n_0 als erstem Element) angeben. Diese Wohlordnung ist entscheidbar, falls g berechenbar ist. Daraus folgt, daß die einer ordinalen Rekursion zugrunde liegende Ordinalzahl für die definierte Funktion eine Bedeutung ist. — Jede in G , g und h ordinal-rekursive Funktion f kann in der Form $f(x, y) = F(am(g^m(x) = n_0), x, y)$ dargestellt werden, wo F (uniform) primitiv-rekursiv in G , g und h ist und g der Bedingung (3) genügt. Die Funktion F wird durch $F(0, x, y) = h(y)$, $F(m+1, x, y) = G(F(m, g(x), y), x, y)$ gegeben; die Umformung dieser Definition in eine primitiv-rekursive ist formal etwas unständlich, aber elementar. — Verf. zeigt ferner, daß jede allgemein-rekursive Funktion in der Form $H(g(x))$ dargestellt werden kann, wo φ primitiv-rekursiv und H ordinal-rekursiv in primitiv-rekursiven Funktionen ist (Beweis zunächst für Funktionen vom Typ $\mu x T(x, y)$ mit primitiv-rekursivem T — im Hinblick auf die Kleenesche Normaldarstellung —, dann Zusammenfassung von $q_1(H(\varphi(x)))$ zu $F(\varphi(x))$. Es wird ein Beispiel für eine allgemein-rekursive Funktion konstruiert, die nicht schon durch ordinale Rekursion allein aus primitiv-rekursiven gewonnen werden kann. — Verf. stellt abschließend die Frage, ob die allgemein-rekursiven Funktionen durch $\varphi(H(x))$ mit primitiv-rekursivem φ und in primitiv-rekursiven Funktionen ordinal-rekursivem H definiert werden können, und vermutet eine verneinende Antwort. W. Markwald.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

Greger, Karl: Über einen Satz von Gauß. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 23, 129—130 (1953).

Neuer und eleganter Beweis des Satzes von Gauß, daß das Produkt zweier primitiver Polynome primitiv ist. Vorausgesetzt wird lediglich, daß die Koeffizienten einem kommutativen nullteilerfreien Ring mit Einselement angehören. M. Eichler.

Parodi, Maurice: Un critère d'irréductibilité des polynomes à coefficients entiers sur le corps des nombres rationnels. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1057—1059 (1953).

In Fortführung früherer Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 38, 10; 42, 250) wird ein Irreduzibilitätskriterium für ganzzahlige Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$ ($a_0 = 1$)

mittels der bekannten Matrix, die $f(x)$ als charakteristische Funktion besitzt, abgeleitet. In Analogie zum Perronschen Kriterium $|a_1| > 1 + \sum_{k=2}^n |a_k|$ wird für den Fall $a_1 = 0$, $n \geq 3$ die Bedingung $|a_2| > 1 + \sum_{k=3}^n |a_k|$ erhalten und diskutiert.
H. Rohrbach.

Watson, G. N.: Two inequalities. Math. Gaz. 37, 244—246 (1953).

I. Verf. beweist durch Induktion über n : Die Determinante $|c_{ij}|$ ($i, j = 1, \dots, n$) mit $c_{11} = x^a$, $c_{12} = x^b$, \dots , $c_{1n} = x^h$; $c_{k1} = a^{n-k}$, $c_{k2} = b^{n-k}$, \dots , $c_{kn} = h^{n-k}$ ($k = 2, \dots, n$), ($a > b > \dots > h$) ist für $x > 1$ positiv und hat für $0 < x < 1$ das Vorzeichen von $(-1)^{n-1}$. [Für $n = 3$, $a > 1$, $b = 1$, $c = 0$ erhält man die bekannte Ungleichung $x^a - 1 > a(x - 1)$.] II. x, y, z seien positiv, μ reell; dann ist $\sum x^\mu (x - y)(x - z) \geq 0$, wo die Summation hier und im folgenden über alle zyklischen Vertauschungen von x, y, z zu erstrecken ist; die Gleichheit tritt nur für $x = y = z$ ein. Für $\mu \geq 0$ und für $\mu \leq -1$ war das bekannt (I. Schur, unveröffentlichter Brief; Hardy, Littlewood, and Pólya, Inequalities, Cambridge 1934, 64, dies. Zbl. 10, 107; S. Barnard and J. M. Child, Higher Algebra, London 1936, 217), dabei sind die Beweise nicht in x, y, z symmetrisch. Verf. bemerkt nun, daß wegen

$$2 \sum x^\mu (x - y)(x - z) = \sum (y^{\mu+1} - z^{\mu+1})(y - z) - \sum x(z^\mu - y^\mu)(y - z)$$

die genannte Ungleichung auch für $-1 \leq \mu \leq 0$ gilt; er gibt ferner ähnliche symmetrische Beweise für $\mu = 1$ und für $\mu = 2$.
Alfred Stöhr.

Egan, M. F. and R. E. Ingram: On commutative matrices. Math. Gaz. 37, 107—110 (1953).

The authors give simpler proofs for some theorems of N. H. McCoy [Bull. Amer. math. Soc. 42, 592—600 (1936)], M. P. Drazin, J. W. Dungey, K. W. Grünberg (this Zbl. 43, 252).
T. Szele.

Ponting, F. W.: A type of alternant. Proc. Edingburgh math. Soc., II. Ser. 9, 20—27 (1953).

If in the generalized Vandermonde determinant (with k -th powers omitted) $|x_i^j|$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, n$; $j \neq k$ the power x_i^j is replaced by $\alpha_i^{(j)} = (\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) \dots (\alpha_i + \beta_i)$, then the resulting determinant can be expressed in terms of the elementary symmetric functions and the complete homogeneous polynomials of the β 's (see K. A. Hirsch, this Zbl. 41, 152). The author deals with the general case of the Schur function $\{x; (\lambda)\} = |x_i^{(j)}| / |x_i^{(j)}|$ where (λ) denotes the partition $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ of N with $N = \sum \lambda_i$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ and where $l_j = \lambda_j + n - j$. Replacing again $x_i^{(j)}$ by $\alpha_i^{(j)}$ the author defines the function $\{x; (\lambda); \beta\} = |\alpha_i^{(j)}| / |x_i^{(j)}|$. Now let $b(u, v)$ and $H(u, v)$ denote the v -th elementary symmetric and complete homogeneous function of $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ for $0 \leq v \leq n$ with obvious conventions for other values of u and v . Finally let $b\{(l), (r)\} = |b(l_i, l_i - l_j + r_j)|$. Then the author proves the following results: 1. $\{x; (\lambda); \beta\} = \sum \{x; (\lambda_1 - r_1, \lambda_2 - r_2, \dots, \lambda_n - r_n)\} b\{(l), (r)\}$, where the sum is extended over all admissible sets of r 's such that $\lambda_1 - r_1 \geq \lambda_2 - r_2 \geq \dots \geq \lambda_n - r_n \geq 0$. 2. If (μ) and $(\mu - r')$ are the partitions conjugate to (λ) and $(\lambda - r)$, respectively, and $m_i = \mu_i + n - i$, then $b\{(l), (r)\} = |H(2n - m_i, m_i - m_j + r'_j)|$. 3. $b\{(l), (r)\}$ can be written as a polynomial in the β 's with positive integer coefficients. (Some related results can be found in H. O. Foulkes, this Zbl. 38, 10).
K. A. Hirsch.

Vil'ner, I. A.: Über die Beziehungen zwischen den Minoren einer oder zweier Matrizen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 139—146 (1953) [Russisch].

Aus einer Matrix A_1 mit $(n - 1)$ Zeilen und n Spalten werden eine Eckdeterminante n -ter Ordnung $M_0 = M \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$ und Minoren $(n - l)$ -ter Ordnung gebildet:

$$M'_0 = M \begin{pmatrix} 1, \dots, \tau_1 - 1, \tau_1 + 1, \dots, \tau_{k+1} - 1, \tau_{k+1} + 1, \dots, n + 1 \\ 1, \dots, j_1, j_1 + 2, \dots, j_k, j_k + 2, \dots, n \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq n - 1,$$

$0 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_k \leq n - 1$, $1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{k+1} \leq n$, wobei in dem Determinantensymbol die oberen und unteren Zahlen die Nummern der entsprechenden Zeilen und Spalten bedeuten, in deren Schnittpunkten die Elemente der Determinanten M_0 bzw. M'_0 stehen. Entsprechend werden die folgenden Paare von Minoren definiert:

$$M \begin{pmatrix} 1, \dots, \tau_i - 1, \tau_i + 1, \dots, n + 1 \\ 1, \dots, \dots, n \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 1, \dots, \tau_1 - 1, \tau_1 + 1, \dots, \tau_{s-1} - 1, \tau_{s-1} + 1, \dots, \tau_{s+1} - 1 \\ \tau_{s+1} + 1, \dots, \tau_{k+1} - 1, \tau_{k+1} + 1, \dots, n \\ 1, \dots, j_1, j_1 + 2, \dots, j_k, j_k + 2, \dots, n \end{pmatrix}, \quad 1 \leq s \leq k + 1.$$

gilt der Satz: $M_0 M'_0 + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{s+k} M_s M'_s = 0$. - Verf. betrachtet zahlreiche Spezial- unter denen sich auch eine Identität befindet, die von Fekete stammt. Weiterhin t Verf. auf Anwendungen in der Nomographie und zahlreiche Erweiterungen hin.

R. Ludwig.

Koteljanskij, D. M.: Über eine Eigenschaft der vorzeichensymmetrischen rizen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 163—167 (1953) [Russisch].

Eine reelle Matrix $B = (b_{ik})_n^n$ heißt vorzeichensymmetrisch (vs.), wenn das Produkt je zwei in B zur Hauptdiagonale symmetrisch gelegenen Minoren (1) $B \begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} \geq 0$ ausfällt ($k = 1, \dots, n-1$). Die Matrix B heißt „schwach vs.“, wenn nur solche Minorenpaare, die aus einem Hauptminor durch Ausstreichen einer Zeile (mit x_i) und einer Spalte (mit Index $j = i$) hervorgehen, die Produkte (1) nicht-negativ ausgesetzt werden. Es wird gezeigt, daß für eine schwach vs. Matrix B vom Range r , für eine gewöhnliche reelle symmetrische Matrix, die Anzahl der Zeichenwechsel in der e von Hauptminoren

$$D_0 = 1, \quad D_1 = B \begin{pmatrix} i_1 \\ i_1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}, \dots, \quad D_r = B \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$$

der Wahl der Folge unabhängig ist. Beweis durch Induktion nach n . Das bekannte Kri- um für das Positivsein aller Hauptminoren einer symmetrischen Matrix ist enthalten m folgenden Satz: Unter der Voraussetzung (1) nur für solche Minorenpaare, bei denen Anzahl der zu ihrer Bildung benutzten Zeilen und Spalten von gleichem Index genau h $k-1$ ist, sind alle Hauptminoren von B positiv, wenn dies nur für diejenigen der e $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_{11}, B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \dots, B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = |B|$ zutrifft.

H. Schwerdtfeger.

Tartakovskij, V. A.: Die Resultante zweier charakteristischer Gleichungen. echi mat. Nauk 8, Nr. 6 (55), 127—132 (1953) [Russisch].

Let $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ be the characteristic roots of the matrix A ; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ose of B and let E_r be the unit matrix of order r . Stéphanos [J. Math. pur. d., V. Ser. 6, 73—128 (1900)] proved that the $m n$ characteristic roots of $A \times E_n - E_m \times B$ are $\alpha_i - \beta_j$ and thus $\det(Q)$ is the resultant of the racteristic polynomials of A and B . The author obtains these results without explicit use of direct products and with B (in Q) replaced by its transpose.

F. W. Ponting.

Wielandt, Helmut: Pairs of normal matrices with property L. J. Res. nat. Standards 51, 89—90 (1953).

In Verallgemeinerung eines Satzes von N. Wiegmann (dies. Zbl. 50, 11) el gezeigt: Wenn die Eigenwerte α_i, β_k der n, n -reihigen normalen Matrizen B so angeordnet werden können, daß die Eigenwerte $\gamma_k(z)$ von $A + zB$ den Gleichheiten $\sum_{k=1}^n |\gamma_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k + z\beta_k|^2$ für Punkte $z = z_i$ ($i = 1, \dots, l$) ügen, die die Ecken eines den Nullpunkt umschließenden Polygons sind, ist $AB = BA$. Die Aussage dieses Satzes ist in einem bestimmten Sinne tmöglich. Der Beweis erfolgt mittels eines auch an sich interessanten Hilfs- zes, der bei beliebigen n, n -reihigen Matrizen A, B die Menge der komplexen z rakterisiert, für die $A + zB$ normal ist.

H. Rohrbach.

Greger, Karl: Multilinear forms and elementary divisors in a principal ideal g. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 23, 131—137 (1953).

R sei ein kommutativer nullteilerfreier Hauptidealring mit Einselement. rf. beweist im ersten Teil den auf Smith und Frobenius zurückgehenden tz: man kann den Unbestimmten in einer Multilinearform $\sum a_{i_1 i_2 \dots i_n} u_{i_1} v_{i_2} \dots z_{i_n}$

mit Koeffizienten aus R solche Werte in R erteilen, daß sie den Wert d annimmt, wo d der gr. gem. Teiler der $a_1 \dots a_n$ ist. Die Schlußweisen werden im zweiten Teile zu einer neuartigen Durchführung der Elementarteilertheorie ausgestaltet, bei welcher die Primelementzerlegung im Gegensatz zu den bisher benutzten Beweisverfahren keine Rolle spielt.

M. Eichler.

Mardešić, Sibe: Über die Unabhängigkeit mod (G) der ganzzahligen Linearformen. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 280—284 und serbo-kroatische Zusammenfassg. 290—292 (1953).

Sei G [bzw. (x_k)] eine Abelsche Gruppe [bzw. ein System, dessen allgemeine Element x_k ist]; insbesondere sei D die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Verfaßt betrachtet das System $G(x_k)$ aller endlichen linearen Formen $\sum g_k x_k$, deren Koeffizienten bzw. Variablen zu G bzw. zu (x_k) gehören. Diese Formen werden in üblicher Weise behandelt: Summation, Multiplikation mit $g \in G$, lineare Abhängigkeit usw. Ein System $(X_i) \subseteq G(x_k)$ ist linear unabhängig mod G [resp. mod. eines Gruppensystems (G)], falls jedes endliche Teilsystem linear unabhängig mod G [resp. Modulo jedes $G \in (G)$]. $N(G)$ bezeichnet die Menge aller Systeme $(X_i) \subseteq D(x_k)$, die unabhängig mod (G) sind. Sei $p(G)$ die Menge aller Primzahlen n so, daß $X \in (G)$ und $g \in X$ existieren, für die $g \neq 0$, $ng = 0$ ist. Zwischen Gruppensystemen $(G)_1, (G)_2$ werden noch die folgenden Relationen \leq, \approx definiert: $(G)_1 \leq (G)_2 \Leftrightarrow N(G)_1 \supseteq N(G)_2$. $(G)_1 \approx (G)_2 \Leftrightarrow N(G)_1 = N(G)_2$. Verf. beweist 8 Sätze. $N(G)_1 \subseteq N(G)_2 \Leftrightarrow p(G)_1 \supseteq p(G)_2$ (Th. 6). Sei $D(X_i) \subseteq D(x_k)$; falls für jedes $X \in D(x_k)$ und jedes $p \in p(G)$, $pX \in D(X_i) \Rightarrow X \in D(X_i)$, so ist (X_i) unabhängig mod (G) [also auch unabhängig mod D] (Th. 3 [Th. 4]). Wenn $p(G)$ leer ist, so $(G) \approx \{D\}$; wenn $p(G)$ nicht leer ist, so $(G) \approx (D_p)$ ($p \in p(G)$) (Th. 7). Ein endliches System $\sum_k a_{ik} x_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ist linear unabhängig mod (G) , dann und nur dann, wenn für jedes $p \in p(G)$ der Rang mod p der Matrix $a = [a_{ik}]$ gleich n ist bzw. — falls $p(G)$ leer ist — wenn der Rang von a gleich n ist (Th. 8).

G. Kurepa.

Coxeter, H. S. M. and J. A. Todd: An extreme duodenary form. Canadian J. Math. 5, 384—392 (1953).

Es sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine positive quadratische Form, mit der Determinante A , welcher für ganze Werte der x_i den Minimalwert M annimmt: sie wird eine extreme Form genannt, wenn A/M^n ein Minimum für alle infinitesimalen Änderungen der Koeffizienten ist. Es wird hier folgende neue extreme Form K_{12} in den 12 Veränderlichen $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ angegeben:

$$12K_{12} = \sum_1^5 (6x_j + 3y_j + 2y_6)^2 + 3(6x_6 + 2 \sum_1^5 y_j - y_6)^2 + 3 \sum_1^5 y_j^2 + y_6^2.$$

Um sie zu erreichen, kann man folgendermaßen verfahren. Man betrachtet zunächst einen unitären 6-dimensionalen Raum, d. h. einen komplexen Raum S_6 , wo die Entfernung von zwei Punkten als die Quadratwurzel der Summe der Normen ihrer Koordinatendifferenzen erklärt wird; es seien p_j die Grundvektoren dieses Raumes; man betrachtet dann alle Punkte $\sum \zeta_j p_j$, wo die ζ_j die Form $A_j \omega + B_j \omega^2$ haben (A_j, B_j sind ganze rationale Zahlen, und $\omega = e^{2\pi i/3}$) und außerdem $\zeta_j = \zeta_k \pmod{1-\omega}$, $\sum \zeta_j = 0$ (mod. 3); alle solche Punkte bilden ein Punktgitter. Die 12 komplexen Vektoren $t_j = 3p_j$, $t_{j+6} = (1-\omega)(p_j - p_6)$, $t_6 = -3(1-\omega)p_6$, $t_{12} = p_1 + \dots + p_6$, wo $j = 1 \dots 5$, bilden eine ganze rationale Basis für die betrachteten Punkte. Nun ist $3K_{12}$ die Norm eines beliebigen Vektors $z = \sum_1^6 x_j t_j + \sum_1^6 y_j t_{j+6}$, wobei

x_j, y_j ganze rationale Zahlen bedeuten. K_{12} ist extrem, weil sie, wie Verf. beweisen, entkettisch und perfekt ist. Die Diophantische Gleichung $K_{12} = N$ hat als Lösungen diejenigen Punkte $\sum \zeta_j p_j$, die vom Koordinatenanfangspunkt die Entfernung $(3N)^{1/2}$ haben; der Wert $N = 1$ ist auszuschließen; die Werte $N = 2, 3$ führen zu bekannten Polytopen. E. Togliatti.

Jacobsthal, Ernst: Über die Klasseninvariante ähnlicher linearer Abbildungen. I. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 119—124 (1953).

L'A. considera le sostituzioni lineari fratte $y = (ax + b)/(cx + d) = S(x)$, $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$; due tali S_1 e S_2 sono dette simili se esiste un

mero $\alpha \neq 0$ e una matrice di secondo ordine T tali che sia $\alpha S_1 = T^{-1} S_2 T$.
 classi di tali sostituzioni simili sono date biunivocamente dai valori di un
 ariante $Q = (a - d)^2 (ad - bc)$ (unica eccezione $Q = 4$). — L'A. considera
 ariante Q_r corrispondente ad S^r , e, con facili calcoli (servendosi delle radici
 caratteristiche), esprime Q_r mediante Q , e Q mediante Q_r . — Sarebbe forse stato
 opportuno un accenno all'inquadratura del caso elementare trattato nella
 ria generale delle matrici, e in particolare nella teoria delle radici r -esime di
 e matrice [v., ad es., Cecioni, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. **11**,
 -140 (1910)].
F. Cecioni.

Waaeland, Haakon: Über die Klassen ähnlicher linearer Abbildungen. I. II.
 Norske Vid. Selsk. Forhdl. **25**, 125—128, 129—130 (1953).

Queste Note si fondano sulla Nota di E. Jacobsthal (v. rapp. preced.).
 sendo S una sostituzione lineare $y = (ax + b)(cx + d)$ ($ad - bc \neq 0$),
 si indica con K^r la classe delle sostituzioni lineari simili alla S^r , e si pone il
 problema: Per quali S l'insieme delle classi K^r ($r = 1, 2, 3, \dots$) è costituito
 da un numero finito di classi distinte? L'A. trova che, a parte l'identità e la
 classe delle sostituzioni paraboliche, il caso si presenta se, e solo se, S è periodica.
 Il risultato è ottenuto partendo dalle formule, date da Jacobsthal nella Nota
 citata, per gli invarianti Q e Q_r . — Poteva essere ricercata la ragione concettuale
 del risultato, poichè la questione si ricollega al problema delle matrici periodiche,
 studiato da tempo.
F. Cecioni.

Makarova, T. Z.: Untersuchung einer ganzzahligen Invariante N der binären
 Formen des Grades $n > 4$. Mat. Sbornik, n. Ser. **33** (75), 233—240 (1953) [Rus-
 sch].

Verf. untersucht eine Frage, die von dem ideenreichen russischen Geometer
 Efimov angeregt wurde. In zahlreichen Abhandlungen studierte er im besonderen
 die Verbiegung der Flächen und wurde dabei (dies. Zbl. **41**, 488) auf das Problem
 geführt, ob es für eine binäre Form $F(x, y)$ vom Grade n Formen $\Phi(x, y)$ vom
 Grade $m > n$ geben kann, so daß der Ausdruck $F_{xx} \Phi_{yy} - 2F_{xy} \Phi_{xy} + F_{yy} \Phi_{xx}$
 identisch verschwindet. Es war schon bekannt, daß das für $n \leq 4$ stets der Fall
 ist, während Efimov und andere Beispiele mit $n = 9$ und $n = 10$ angegeben
 hatten, bei denen das unmöglich ist. Verf. zeigt hier, daß für $n > 4$ sogar bei fast
 allen Formen F solche Formen Φ nicht existieren können. Nur in bemerkens-
 werten Ausnahmefällen, die angegeben werden, ist das möglich. — Übrigens
 verwendet der Verf. den feststehenden Begriff der Invariante einer binären Form
 in einem abweichenden Sinn, was nicht zu billigen ist und auch unterbleiben
 kann, ohne daß die leichte Formulierbarkeit seiner schönen Ergebnisse beeinträch-
 tigt wird.
H. Brandt.

Gruppentheorie:

Liber, A. E.: Über symmetrische verallgemeinerte Gruppen. Mat. Sbornik,
 Ser. **33** (75), 531—544 (1953) [Russisch].

Unter einer verallgemeinerten Gruppe \mathfrak{G} wird eine assoziative Halbgruppe mit folgenden
 Eigenschaften verstanden: 1. alle idempotenten Elemente sind miteinander vertauschbar,
 zu jedem Element g existiert ein Element g^{-1} mit $gg^{-1}g = g$ und $g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}$. Eine
 artige verallgemeinerte Gruppe bildet die Gesamtheit S_G aller partiellen Transformationen
 der Menge Ω im Sinne von Ljapin (dies. Zbl. **50**, 15); sie heißt hier die symmetrische
 verallgemeinerte Gruppe. Für diese wird zunächst eine algebraische Charakterisierung ge-
 geben. Dabei spielen die sogenannten primitiven Elemente eine Rolle. $p \in \mathfrak{G}$ heißt primitiv,
 wenn für ein beliebiges Element x aus \mathfrak{G} die Relation $p^{-1}xp \neq 0$ die Gleichung $p^{-1}xp = p$
 nach sich zieht. Die symmetrischen verallgemeinerten Gruppen erweisen sich als isomorph
 zu S_H für die Menge H ihrer primitiven Elemente. Weiter werden Äquivalenzrelationen ε
 zwischen den Elementen von \mathfrak{G} betrachtet, und zwar solche, bei denen aus $g \equiv h \pmod{\varepsilon}$ für
 beliebiges x aus \mathfrak{G} $gxg \equiv xh$ und $gx \equiv hx$ folgt. Solche Äquivalenzrelationen heißen stabil.
 Über derartigen Äquivalenzrelation kann man in bekannter Weise eine Teilmenge e von

$\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ zuordnen. In $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ kann dann ein Abgeschlossenheitsbegriff derart eingeführt werden, daß genau den stabilen Äquivalenzrelationen abgeschlossene Mengen entsprechen. Eine wichtige Rolle spielt bei diesen Untersuchungen der Rang eines Elementes g aus S_{Ω} , d. i. die Mächtigkeit der zu g gehörigen Teilmengen von Ω .

R. Kochendörffer.

Kontorovič, P.: Zur Theorie der Halbgruppen in einer Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 229—231 (1953) [Russisch].

Let G be a group and S a semigroup in G which is normal in its group closure in G („in itself“). In such a semigroup S an ideal theory can be established similar to the ideal theory in commutative rings. The author sketches the elements of such a theory. A sub-semigroup A of S is called a left ideal if $SA \subset A$; similarly right ideal and two-sided ideal. A semigroup without proper left ideals is a group. Every ideal in S is two-sided. An ideal p is called prime if its S -complement $C(p) = S - p$ is a semigroup. An ideal A is called isolated if for every natural number n it follows from $x^n \in A$, $x \in S$, that $x \in A$. The intersection of all isolated ideals containing A is called the isolator of A , $I(A)$. $I(A)$ consists of precisely those elements of S a power of which occurs in A . If R is a sub-semigroup of S , then the sum of all ideals in $C(R) = S - R$ is a prime ideal p . A prime ideal p is called minimal over the ideal A if p contains A and there are no between prime ideals. This happens if and only if $C(p)$ is a maximal semigroup in $C(A)$. The isolator $I(A)$ turns out to be the intersection of all minimal prime ideals over A . Every prime ideal containing A also contains some minimal prime ideal over A . Let A be an ideal in S , $C(A)$ its S -complement. An element $b \in S$ is called a left $C(A)$ -element if $bC(A) \subset C(A)$; similarly right and two-sided $C(A)$ -elements. The set of all left (right) $C(A)$ -elements is a semigroup $\pi(\pi_r)$; let $\pi = \pi_l \cap \pi_r$. Then $C(\pi_l)$, $C(\pi_r)$ and $C(\pi)$ are prime ideals. The isolator $I(A)$ lies in $C(\pi_l) \cap C(\pi_r)$. Every ideal A of S is contained in a minimal normal ideal over A (A is normal in S , if $s^{-1}As = A$ for all $s \in S$). The isolator of a normal ideal is normal. If A is normal in S , then $\pi_l = \pi_r = \pi$ and these semigroups are normal in S . Every minimal prime ideal p over an ideal A , normal in S , is contained in $C(\pi)$. In other word: no $C(A)$ -element occurs in p .

K. A. Hirsch.

Thierrin, Gabriel: Sur la caractérisation des équivalences régulières dans les demi-groupes. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 942—947 (1953).

L'A. caractérise les équivalences régulières et simplifiables d'un demi-groupe en introduisant la notion de famille de complexes forte et de famille de complexes nette. La famille S de complexes H_i est dite forte à droite si la relation $(H_0 : a) \cap (H_0 : b) = \emptyset$ pour un $H_0 \in S$ entraîne $(H_i : a) = (H_i : b)$ pour tout $H_i \in S$. Elle est dite nette à droite si le complexe réunion des H_i est net à droite. Pour qu'une équivalence R soit régulière à droite et simplifiable à droite, il faut et il suffit qu'il existe au moins une famille forte à droite et nette à droite formée de classes H_i modulo R ; l'équivalence R est alors l'intersection des équivalences principales à droite R_{H_i} attachées aux complexes H_i . L'A. caractérise ensuite les équivalences qui sont réductives, c'est-à-dire telles que $ax = bx$, mod. R , pour tout x , entraîne $a = b$, mod. R , et la condition symétrique. La propriété caractéristique obtenue est un peu plus compliquée et les cas les plus intéressants sont ceux où elle se trouve vérifiée d'elle-même pour les équivalences régulières. Dans les cas signalés par l'A., il y a identité entre les équivalences régulières et réductives, et les intersections d'équivalences principales. Les démonstrations seront publiées ailleurs.

L. Lesieur.

Pie, Gh.: Sur le quasicentre d'un groupe. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 4, 7—19, russische und französ. Zusammenfassgn. 19—20, 20—21 (1953) [Rumänisch].

Als Quasizentrum $Q(G)$ einer Gruppe G bezeichnet man nach Ore die Untergruppe von G , die von all den zyklischen Untergruppen $\{s\}$ von G erzeugt wird, die mit jeder Untergruppe U von G vertauschbar sind: $\{s\}U = U\{s\}$; es wird also nicht elementweise Vertauschbarkeit verlangt. Verf. stellt folgende interessanten Sätze auf: I. $Q(G)$ ist eine charakteristische Untergruppe von G . II. $Q(G)$ ist nilpotent. III. Zwischen zwei Erzeugenden s, t von $Q(G)$, deren Ordnungen Potenzen der gleichen Primzahl p sind, besteht eine Relation: $s^{-1}ts = t^{1+\alpha p^k} s^{p^k}$ (α, p) = (b, p) = 1. IV. Sind s_1, s_2, s_3 drei Erzeugende von $Q(G)$, ihre Ordnungen Potenzen der gleichen Primzahl p und haben die von ihnen erzeugten zyklischen Gruppen paarweise den Durchschnitt 1, so bestehen Relationen der Form:

$$s_1 s_2 = s_2^{1+\alpha_1 p^{k_1}} s_1^{1-\alpha_2 p^{k_2}}, \quad s_2 s_3 = s_3^{1+\alpha_2 p^{k_2}} s_2^{1-\alpha_3 p^{k_3}}, \quad s_3 s_1 = s_1^{1+\alpha_3 p^{k_3}} s_3^{1-\alpha_1 p^{k_1}}.$$

Ist G von unendlicher Ordnung und enthält G aperiodische Elemente, so gilt: V. Die aperiodischen Erzeugenden von $Q(G)$ erzeugen eine abelsche Gruppe. VI. Jedes aperiodische erzeugende Element von $Q(G)$ ist mit jedem periodischen erzeugenden Element vertauschbar. VII. Wenn $Q(G)$ nicht abelsch ist, kann es keine aperiodischen Elemente enthalten. — Dem Ref. lag nur die französ. Zusammenfassung ohne Beweise vor.

O. Grün.

Smirnov, D. M.: Über Gruppen mit oberer Zentralreihe. Mat. Sbornik, n. Ser. (75), 471—484 (1953) [Russisch].

The paper contains the detailed proofs of results that have been announced earlier in two notes (this Zbl. 43, 22; 46, 249). It is concerned with groups having upper central series of length not exceeding the first limit ordinal number ω . The principal results are the following theorems: 1. If G is a group with upper central series of length ω , then at least one of the factors cannot satisfy the minimal condition for serving subgroups. 2. If G is a group with upper central series of length not exceeding ω , and if the periodic part of every factor, beginning from the second, has finite rank, then G turns out to be finite, if the centre of G is finite. 3. If G is a torsion-free group with upper central series of length not exceeding ω , and if the centre of G does not contain any non-trivial complete subgroups, then the same holds for G and all the factors of its upper central series. In conclusion the author gives an example of an incomplete nilpotent torsion-free group with a complete centre.

K. A. Hirsch.

Szép, J. und L. Rédei: Eine Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung. Acta Sci. math. 15, 85—86 (1953).

G sei eine Gruppe mit Doppelkettensatz für Normalteiler. $G = N_1 N_2 \cdots N_n$ heißen Verff. eine normale Zerlegung von G , wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind: 1) Alle N_i , $i = 1, \dots, n$, sind Normalteiler von G . 2) Kein N_i läßt sich obiger Gleichung streichen. 3) Kein N_i , $i = 1, \dots, n$, ist das Produkt von zwei echten Normalteilern. — Am Beispiel der Quaternionengruppe wird gezeigt, daß die normale Zerlegung eine wirkliche Verallgemeinerung der Remakschen Zerlegung ist. — Es sei $D_{i,k} = N_i \cap N_k$, $i \neq k$, $i, k = 1, \dots, n$. $D = \prod_{i,k} D_{i,k}$ heißen die Verff. den Kern der normalen Zerlegung $G = N_1 N_2 \cdots N_n$ und $G = N'_1 \cdots N'_n$ zwei normale Zerlegungen mit dem gleichen Kern D , so ist a) $u' = u$, b) bei geeigneter Nummerierung $N_i D/D$ zentral isomorph mit $N'_i D/D$, $i = 1, \dots, n$.

O. Grün.

Itô, Noboru: Note on S -groups. Proc. Japan Acad. 29, 149—150 (1953).

Verf. beweist die folgenden Sätze über auflösbare Gruppen G mit Maximalabteilung für Untergruppen [„ S -Gruppen“ im Sinne des Ref.]: 1. Wenn die Frattini-Gruppe $\Phi(G)$ die Kommutatorgruppe von G enthält, so ist G nilpotent. Dies ist eine Verallgemeinerung eines wohlbekannten Satzes von Wielandt für endliche Gruppen. Ref. hat den Satz schon früher bewiesen in Proc. London Math. Soc., II. Ser. 49, 184—194 (1946). 2. Die Frattini-Gruppe $\Phi(G)$ ist nilpotent. [Ein anderer Beweis des Ref. findet sich in J. London math. Soc. 29, 1—251 (1954); siehe auch R. Baer, Math. Z. 59, 299—338 (1953).] 3. Wenn H eine Untergruppe von G ist, deren Kommutatorgruppe von der Kommutatorgruppe von G verschieden ist, so trifft dies auch für die Kommutatorgruppe von G/H zu.

K. A. Hirsch.

Fleischer, Isidore: Remark on a theorem of Michiura. Portugaliae Math. 12, 3 (1953).

Es wird eine nichtkommutative angeordnete Gruppe vom Rang 2 angegeben, deren einzige echte konvexe Untergruppe im Zentrum liegt. Damit ist ein Satz einer Arbeit von Michiura (dies. Zbl. 43, 21) widerlegt.

G. Pickert.

Chehata, C. G.: Commutative extension of partial automorphisms of groups. Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 170—181 (1953).

It is known that two (or more) partial automorphisms μ and ν of a group G , i. e. isomorphic mappings of subgroups A_1 and B_1 of G onto subgroups $A_2 = A_1 \mu$ and $B_2 = B_1 \nu$ respectively, can be simultaneously extended to total automorphisms μ^* , ν^* of a supergroup G^* of G (Graham Higman, B. H. Neumann, Anna Neumann, this Zbl. 34, 301). The author asks for conditions which

ensure that the extending automorphisms may be permutable. The trivially necessary conditions, that $\mu \nu$ and $\nu \mu$ are the same wherever both are defined, are not sufficient. The author shows that the additional conditions $(A_1 \cap B_i) \mu = A_2 \cap B_i$ and $(A_i \cap B_1) \nu = A_i \cap B_2$ ($i = 1, 2$) are sufficient — but certainly not necessary. They are satisfied in particular when $A_i \cap B_j = \{1\}$ for all pairs $i, j = 1, 2$. The proof consists in constructing a chain of groups, each the free product of its predecessor in the chain and an isomorphic copy of G , with a suitable amalgamation. The direct limit of the groups of this chain is, but for one further easy extension, the required group possessing two permutable automorphisms which continue μ and ν .

Hanna Neumann.

Faddeev, D. K.: Über einen Satz der Homologietheorie in Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **92**, 703—705 (1953) [Russisch].

Fortsetzung der Abhandlung [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 17—22 (1952)] des Verf., wo alle hier vorkommenden Begriffe definiert sind. — Sei α eine additive abelsche Gruppe, \mathfrak{G} eine multiplikative Gruppe von Operatoren in α und \mathfrak{H} eine Untergruppe von endlichem Index r in \mathfrak{G} . Eindeutige Division durch ν sei möglich in α . Bewiesen wird der folgende Satz: Die Homologiegruppe $H^n(\mathfrak{H}, \alpha)$ enthält als direkten Summanden die mit $H^n(\mathfrak{G}, \alpha)$ isomorphe Gruppe $H_0^n(\mathfrak{H}, \alpha)$. Dieser Isomorphismus wird erzeugt durch den „Berandungsoperator“ μ , welcher jeder Kette $F \in C^n(\mathfrak{G}, \alpha)$ (d. i. die Zyklengruppe λ der Dimension n von \mathfrak{G} in α) die Kette $\mu F \in C^n(\mathfrak{H}, \alpha)$ zuordnet gemäß der Formel: $(\mu F)_{y_1, \dots, y_n} = F_{\nu y_1, \dots, \nu y_n}$, wo $y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{H}$. Von den daraus gezogenen Folgerungen sei nur erwähnt, daß, wenn α eine periodische abelsche Gruppe ist, sowie \mathfrak{G} endlich und \mathfrak{H} eine Sylowsche p -Untergruppe von \mathfrak{G} , dann ist $(*) H^n(\mathfrak{G}, \alpha) \approx \sum_p H^n(\mathfrak{H}_p, \alpha)$, wobei die $H_0^n(\mathfrak{H}_p, \alpha)$ gewisse direkte Summanden von $H^n(\mathfrak{H}_p, \alpha)$ sind. Ist ferner α ein Gitter (d. i. eine direkte Summe von unendlichen zyklischen Gruppen), \mathfrak{G} eine endliche Gruppe und $n \geq 2$, so gilt wieder $(*)$.

H. Schwerdtfeger.

Eckmann, Beno: Cohomology of groups and transfer. Ann. of Math., II. Ser. **58**, 481—493 (1953).

In der Arbeit werden Homomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen einer Gruppe und den Kohomologiegruppen ihrer Untergruppen hergestellt, wie sie implizite von E. Witt (dies. Zbl. **48**, 263) und Ref. (dies. Zbl. **47**, 27) im Falle der Dimension 2 (Faktorensysteme) verwendet wurden. Dazu wird zunächst in sehr allgemeiner Form eine Kohomologietheorie für Ringe entwickelt und dann eine Spezialisierung auf Gruppenringe vorgenommen. — Sei ein Ring mit Eins e . Eine Folge $C: C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \dots$ von R -Moduln (im geläufigen Sinne) und R -Homomorphismen ∂ von C_{p+1} in C_p heißt R -Komplex, wenn $\partial \partial C_p = 0$, $p > 0$ und $\partial C_0 = C_{-1}$. Durch C werden für jeden R -Modul I Kokettengruppen $C^p = C^p(C, I) = \text{Hom}(C_p, I)$, $p \geq 0$; $C^{-1} = 0$ definiert. Für $f^p \in C^p$ ist die durch $\delta f^p = f^p \partial$ erklärte Abbildung δ ein Homomorphismus von C^p in C^{p+1} mit $\delta \delta C^p = 0$. Ist $Z^p = Z^p(C, I)$ ihr Kern, so wird $H^p(C, I) = Z^p / \delta C^{p-1}$ gesetzt. Die Elemente aus Z^p werden Kozyklen der Dimension p genannt. Kozyklen gleicher Restklasse modulo δC^{p-1} heißen kohomolog. $H^p(C, I)$ ist die Kohomologiegruppe der Dimension p von C mit Koeffizienten aus I . Ein Komplex ist frei, wenn C_0, C_1, \dots freie R -Moduln sind. Azyklisch wird ein Komplex genannt, wenn ∂ eine exakte Folge (Bild = Kern) liefert. Für zwei freie und azyklische Komplexe C, C' mit $C_{-1} \sim C'_{-1}$ gilt $H^p(C, I) \cong H^p(C', I)$, $p \geq 0$. Ist $R = R_1$ Gruppenring der Gruppe A über dem Ring I der ganzen rationalen Zahlen, so gewinnt man den für die rechnerische Handhabung und die algebraische Anwendung des Apparates besonders geeigneten freien und azyklischen Standardkomplex $C(A)$, $C_{-1} \sim I$ invariant bei A , indem man C_p als Menge der komponentenweise verknüpften Vektoren

(a_0, \dots, a_p) , $a_i \in A$; $a(a_0, \dots, a_p) = (aa_0, \dots, aa_p)$ und $\partial(a_0, \dots, a_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$

definiert. $H^p(C(A), I) = H^p(A, I)$ stellt dann die Verbindung zu den von S. Eilenberg und S. Mac Lane (dies. Zbl. **29**, 340, 341) gegebenen Definitionen her. — Ist S ein Untergruppe von R , so kann ein R -Komplex C auch als S -Komplex C_S betrachtet werden. Offenbar ist $C^p(C, I)$ eine Untergruppe von $C^p(C_S, I)$. Ist Q der zugehörige Einbettungsisomorphismus (injection), so gilt $Q \delta = \delta Q$. Daher ergibt δ auch eine homomorphe Abbildung von $H^p(C, I)$ in $H^p(C_S, I)$. Um einen Homomorphismus in umgekehrter Richtung zu erhalten, bedient sich Verf. einer Zwischenkonstruktion: $\Psi = S\text{-Hom}(R, I)$ ist in leicht ersichtlicher Weise

R -Modul. Die gemäß $(\sigma g^p)(c_p) = (g^p(c_p))(\epsilon)$, $g^p \in C^p(C, \Psi)$ erklärte Abbildung σ ist Isomorphismus von $C^p(C, \Psi)$ auf $C^p(C, I)$. Zufolge $\sigma\delta = \delta\sigma$ ist σ auch Isomorphismus $H^p(C, \Psi)$ auf $H^p(C, I)$. Ist t ein R -Homomorphismus von Ψ in I , t^* der durch t induzierte Homomorphismus von $H^p(C, \Psi)$ in $H^p(C, I)$, so ist, wie angestrebt, $T = t^*\sigma^{-1}$ ein Isomorphismus von $H^p(C, I)$ in $H^p(C, I)$. Für eine Gruppe A , eine Untergruppe B vonlichem Index n in A , ein Rechtsrepräsentantensystem x_1, \dots, x_n für A modulo B und $R_L, S = R_R$ wird nun mit $t(\Psi) = \sum_{j=1}^n x_j^{-1} \Psi(x_j)$ der spezielle R_L -Homomorphismus t in I betrachtet. Er hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab. Für einen freien klassischen R_L -Komplex, $C_{-1} \simeq F$ invariant bei A , heißt dann der durch t wie oben bestimmte Homomorphismus T die Übertragung (Transfer) von $H^p(B, I)$ in $H^p(A, I)$. Die Umkehrabbildung dieses speziellen Homomorphismus besteht in $TQ = M_n$, M_n Multiplikation mit n . Bei Verwendung der Standardkomplexe $C(A)$ und $C(B)$ entsprechen Q und T Homomorphismen \mathfrak{Z} , bzw. \mathfrak{Z} zwischen $H^p(C(A), I)$ und $H^p(C(B), I)$, die sich in der folgenden Weise explizit angeben lassen: \mathfrak{Z} entsteht durch die Einbettung von $C(B)$ in $C(A)$; \mathfrak{Z} ist der durch die gemäß

$$\mathfrak{Z}h^p(a_0, \dots, a_p) = \sum_{j=1}^n x_j^{-1} h^p(x_j a_0 \overline{x_j a_0}^{-1}, \dots, x_j a_p \overline{x_j a_p}^{-1}), \quad h^p \in C^p(C(B), I),$$

erklärte Kokettenabbildung induzierte Homomorphismus von $H^p(C(B), I)$ in $H^p(C(A), I)$. Variiert A invariant in I , so läßt sich $H^p(C(B), I) = Z^1(C(B), I)$ durch die Festsetzung $\chi(b) = \chi(b) \in \text{Hom}(B, I)$, $h^1 \in Z^1(C(B), I)$, mit $\text{Hom}(B, I)$ identifizieren. \mathfrak{Z} vermittelt nun einen Homomorphismus von $\text{Hom}(B, I)$ in $\text{Hom}(A, I)$. Hierdurch kann \mathfrak{Z} mit der der Gruppentheorie bekannte Verlagerung \mathfrak{V} von A in B in Beziehung gebracht werden; gilt nämlich $\mathfrak{Z}\chi = \chi\mathfrak{V}$, $\chi \in \text{Hom}(B, I)$. Abschließend werden eine Reihe von Anwendungen gegeben, die sich im wesentlichen auf $TQ = M_n$ stützen. Z. B.: $H^p(B, I) = 0$ hat $H^p(A, I) = 0$ zur Folge. Ist $n H^p(A, I) = H^p(A, I)$, so ist T ein Isomorphismus von $H^p(B, I)$ auf $H^p(A, I)$. Ist $\text{Ch}(A)$ die Charaktergruppe von A und $\text{Ch}(A) = \text{Ch}(A)$, so ist A' der Kern der Verlagerung von A in B . Ist M_n Automorphismus von I , so sind die Zyklen \tilde{f}^p und $\tilde{f}^p(a_0, \dots, a_p) = n^{-1} \sum_{j=1}^n x_j^{-1} \tilde{f}^p(x_j a_0 \overline{x_j a_0}^{-1}, \dots, x_j a_p \overline{x_j a_p}^{-1})$ aus $Z^p(C(A), I)$ homolog. \tilde{f}^p ist offenbar durch die Bilder von \tilde{f}^p auf $C(B)$ vollständig bestimmt. — Die Arbeit bietet in ihrer Darstellung und in ihren Ergebnissen eine hervorragende Gelegenheit Algebriker, die für sie wesentlichen Begriffsbildungen der Kohomologietheorie und ihrer Anwendungsmöglichkeiten auf algebraische Fragestellungen kennenzulernen. W. Gaschütz.

Borevič, Z. I.: Über eine Abelsche Gruppe mit Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 193—193 (1953) [Russisch].

Let $F/R \cong G$ be a representation of a group G as a factor group of a free group F . Take representatives $u_\sigma \in F$ for all $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, with $u_1 = 1$, so that $u_\sigma \rightarrow \sigma$ in the given homomorphism $F \rightarrow G$. Let $r \rightarrow \bar{r}$ in the homomorphism $R \rightarrow R_0 = R/[R, R]$. Then R_0 is a G -module, the operators in G defined by $\sigma \bar{r} = \overline{u_\sigma r u_\sigma^{-1}}$, $\sigma \in G$, $r \in R$. The Abelian group W with operators in G , with which the author is concerned, is defined to be the direct sum $R_0 \oplus E$, where E is the free Abelian group with generators e_σ for all $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$ ($e_1 = 0$). W is made into a G -module by setting $\sigma \tau = e_{\sigma\tau}$, $e_\sigma = f(\sigma, \tau)$ for all $\sigma, \tau \in G$, [where $f(\sigma, \tau) = \overline{u_\sigma u_\tau u_\sigma^{-1}} \in R_0$], defining $\sigma \bar{r}$ as above. Let $\{v_\lambda; v_\lambda\}$ be a chosen system of free generators of F with $v_\lambda \in R$ and $v_\lambda \neq 0$, and $v_\lambda \rightarrow \sigma_\lambda$ in $F \rightarrow G$, where $\{\sigma_\lambda\}$ are different elements of G , $\neq 1$. The author then proves that W is a free G -module with a free G -basis $\{e_{\sigma_\lambda}, v_\lambda\}$ for all $\sigma_\lambda, v_\lambda$. Considering this construction when $\{\sigma_\lambda\}$ generate G and $\{e_{\sigma_\lambda}\}$ form the free G -basis of W , the author gives as application the reduction theorem for cohomology groups of G over a left G -module A : $H^{n-2}(G, A) \cong H^n(G, \text{Hom}(R_0, A))$, $n > 0$, $H^2(G, A) \cong \text{Ophom}(R_0, A)/\text{Ophom}(A, R_0)$ (cf. Eilenberg and MacLane, this Zbl. 29, 340). He also states the dual theorem for cohomology groups of G over a right G -module B : $H_{n-2}(G, B) \cong H_n(G, R_0 \otimes B)$, $n > 0$. Particular forms of these theorems are given when G is finite. W. H. Cockcroft.

Kertész, A. and T. Szele: Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image. Acta Sci. math. 15, 70—76 (1953).

In this paper the authors determine the abelian groups G with the property (*) that every finitely generated subgroup is an endomorphic image, as follows: (*) that every finitely generated subgroup is an endomorphic image, as follows: periodic abelian group satisfies (*) if and only if each of its primary components P is such that if the maximal complete subgroup A of P is $\neq 0$ then P/A is an element of maximal order. An abelian group G with elements of infinite order satisfies (*) if and only if either G is a direct sum of a finite number of finite cyclic groups and a periodic group satisfying (*), or, for each n , G contains as a direct summand a direct sum of n infinite cyclic groups.

D. G. Higman.

Fuchs, L., A. Kertész and T. Szele: On a special kind of duality in group theory. I. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 169—178 und russische Zusammenfassg. 178 (1953).

Fuchs, L.: On a special kind of duality in group theory. II. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 299—314 und russische Zusammenfassg. 314 (1953).

Denote by $S(G)$, $F(G)$ the set of all subgroups and the set of all factor groups respectively of a group G . In the first paper the authors characterize (a) the countable abelian groups G such that $S(G) = F(G)$, called self dual, (b) the pairs of countable abelian groups G , H such that $S(G) = F(H)$ and $F(G) = S(H)$, called dual, and (c) the pairs of countable abelian groups G , H such that $S(G) = F(H)$, called S - F -dual. In the second paper the author extends the results of the first paper to arbitrary abelian groups. Many of the arguments are largely set theoretical.

D. G. Higman.

Fuchs, L.: On the structure of Abelian p -groups. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 267—287 und russische Zusammenfassg. 288 (1953).

Die klassischen Struktursätze für endliche abelsche Gruppen sind bekanntlich von Prüfer, Ulm und Zippin auf abzählbare abelsche Gruppen übertragen worden. Bei abelschen Gruppen höherer Mächtigkeit trifft man nach den Untersuchungen von Kulikov auf wesentlich kompliziertere Verhältnisse. Die vorliegende Arbeit ist unabhängig von Kulikov entstanden. Bekanntlich kann man sich bei der Betrachtung abelscher p -Gruppen auf sogenannte reduzierte Gruppen beschränken, d. h. auf solche, die keine vollständige Untergruppe $\neq 0$ enthalten. In der reduzierten abelschen p -Gruppe G werden folgende Untergruppen gebildet: $G^0 = G$; wenn α eine Ordnungszahl ist, für die $\alpha - 1$ existiert, sei G^α die Untergruppe aller Elemente aus $G^{\alpha-1}$, die in $G^{\alpha-1}$ unendliche Höhe haben; wenn α eine Limeszahl ist, sei G^α der Durchschnitt aller G^β mit $\beta < \alpha$. Es gibt dann eine kleinste Ordnungszahl τ mit $G^\tau = 0$. Man nennt τ den Typus von G . Die Faktorgruppen $G_\alpha = G^\alpha / G^{\alpha+1}$ heißen die Ulmschen Faktoren von G , und die wohlgeordnete Folge $G_0, G_1, \dots, G_\alpha, \dots (\alpha < \tau)$ wird die Ulmsche Folge genannt. Es wird bewiesen, daß sich die G_α darstellen lassen als gewisse Serre-Untergruppen von vollständigen direkten Summen zyklischer Gruppen mit eindeutig bestimmten Ordnungen. Im Falle abzählbarer Mächtigkeit ist G durch die Ulmsche Folge bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Bei höherer Mächtigkeit ist das nicht mehr der Fall. Gruppen mit gleicher Ulmscher Folge brauchen nicht einmal die gleiche Mächtigkeit zu besitzen. Schließlich werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz reduzierter abelscher p -Gruppen angegeben, wenn die Mächtigkeit, der Typus und die Ulmsche Folge gegeben sind.

R. Kochendörffer.

Honda, Kin'ya: On commutators in finite groups. Commentarii math. Univ. Sancti Pauli 2, 9—12 (1953).

R sei der von den Klassen konjugierte Elemente der endlichen Gruppe G erzeugte Ring. Verf. beweist: 1) Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Element $a \in G$ Kommutator in G sei, ist: In der regulären Darstellung von R muß die Klasse $\langle a \rangle$ von a einen von 0 verschiedenen Charakter haben. 2) Ist $a \in G$ ein Kommutator in G , d eine zur Ordnung von a prime ganzrationale Zahl, so ist auch a^d ein Kommutator in G .

O. Grün.

Čunichin, S. A.: Über die Einbettung und die Anzahl der Untergruppen bei Π -trennbaren Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 461—462 (1953) [Russisch].

Sylow's classical theorem on finite groups and P. Hall's well-known theorem on finite soluble groups contain statements on a) existence, b) conjugacy, c) embedding, and d) the number of subgroups of a prescribed form. In a series of papers (this Zbl. 29, 4: 36, 154: 37, 303: 39, 17: 46, 23) the author has extended theorems of the form a) and b) to Π -separable groups. (Here Π is an arbitrary fixed set of prime numbers and a group is Π -separable if it has a normal series in which the order of every factor-group contains among its prime divisors at most one from Π .) He has also proved some theorems of type c) and d) for Π -soluble groups, (that is, groups having a normal series in which the order of every factor-group is either a prime number of Π or contains no prime divisor of Π at all). The present note announces some theorems of type c) and d) for Π -separable groups. Example.

Let g be the order of the H -separable group G and m a „Sylow“ divisor of g , such that $(g/m, m) = 1$. Let m_1 be a divisor of m such that $(m/m_1, m_1) = 1$. Then every subgroup of G of order m_1 is contained in at least one subgroup of order m . The other theorems are too specialized to be reported here.

K. A. Hirsch.

Piccard, Sophie: Sur les groupes de substitutions. Verhdl. Schweizer. naturforsch. Ges. 132. Versammlung, Bern 1952, 100–101 (1953).

Il s'agit toujours de résultats dans la question des bases des groupes symétrique et alterné et de groupes primitifs à base du second ordre, sous-groupes des précédents, recherche dans laquelle l'A. s'est spécialisée.

S. Bays.

Feit, W.: The degree formula for the skew-representations of the symmetric group. Proc. Amer. math. Soc. 4, 740–744 (1953).

Für G. de B. Robinsons „schiefe Diagramme“ $[a_1, \dots, a_k] - [b_1, \dots, b_k]$, mengentheoretische Differenz zweier regulären (zu irreduziblen Darstellungen symmetrischer Gruppen gehörigen) Young-Diagramme $[a_0, \dots, a_k]$ und $[b_1, \dots, b_k]$ ($b_i \leq a_i$; evtl. einige $b_i = 0$) leitet Verf. die folgende explizite Formel für den Grad g der zugehörigen „schiefen Darstellung“ her: $g([a_1, \dots, a_k] - [b_1, \dots, b_k]) = n! \det(z_{ij})$, wo $n = \sum_{i=1}^k (a_i - b_i)$ die Felderzahl des schiefen Diagramms und $z_{ij} = 1$ ($a_j - b_i - j - i$)! ist mit der Verabredung $1/r! = 0$ für $r < 0$. Die Methode ist ähnlich der von R. M. Thrall (dies. Zbl. 49, 10) verwendeten. Anwendung: Ist λ ein reguläres Diagramm, das zur symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_{m+n} gehört, und läßt $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ n Objekte fest, so ist $\chi^\lambda(\sigma) = \sum \chi^\mu(\sigma) g(\lambda - \mu)$, wo über alle regulären Diagramme μ von \mathfrak{S}_m summiert wird. [Wenn μ nicht in λ enthalten ist, wird von selbst $g(\lambda - \mu) = 0$.]

H. Boerner.

Osima, Masaru: Some remarks on the characters of the symmetric group. Canadian J. Math. 5, 336–343 (1953).

Let S_n be the symmetric group of degree n . A successive application of a recursion formula of Murnaghan and the reviewer [Reviewer, Japanese J. Math. 17, 165–184 (1941)] gives rise to certain character relations for S_n (Author, this Zbl. 47, 28; Chung, this Zbl. 44, 258). The present paper studies first these character relations in greater details. On the other hand, if B is a p -block of representations of S_n (p being a prime number) and if a is the number of nodes in the corresponding [Brauer-Robinson, Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 41, 11–25 (1947)] p -core, then the number of modular irreducible representations in B is determined only by the number $u = (n - a)/p$, and thus may be denoted by $m^*(u)$ (and similarly for ordinary irreducible representations) (Robinson, this Zbl. 44, 257). The author shows, as an application of the character relations in the present paper, that $m^*(u)$ is given explicitly by $m^*(u) = \sum m(r_1) m(r_2) \cdots m(r_{p-1})$, where the summation is over all systems of numbers r_1, r_2, \dots, r_{p-1} with $\sum r_i = u$, $0 \leq r_i \leq u$, and $m(x)$ denotes the number of partitions of x . Different proofs to this formula has later been given by Nagao (next rev.) and Frame-Robinson [Canadian J. Math. 6, 125–127 (1954)]. The paper gives also a formula for the number of p -singular classes in S_n .

T. Nakayama.

Nagao, Hiroshi: Note on the modular representation of symmetric groups. Canadian J. Math. 5, 356–363 (1953).

The blocks of representations of a symmetric group S_n of n letters, with respect to a prime p are in 1–1 correspondence with p -cores of Young diagrams of n letters [Brauer-Robinson, Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 40, 11–25 (1947)]. The number of ordinary irreducible representations of S_n belonging to a p -block is determined by the number $\beta = (n - m)/p$, where m is the number of nodes in the corresponding p -core, and is given by $l(\beta) = \sum k(\lambda_1) k(\lambda_2) \cdots k(\lambda_p)$ ($\sum \lambda_i = \beta$, $0 \leq \lambda_i \leq \beta$) where $k(\lambda)$ is the number of partitions of λ . Similarly the number of modular representations in it is determined by β (Chung, this Zbl. 44, 258; Robinson, this Zbl. 46, 250), and is given by $l^*(\beta) = \sum k(\lambda_1) k(\lambda_2) \cdots k(\lambda_{p-1})$ ($\sum \lambda_i = \beta$, $0 \leq \lambda_i \leq \beta$) (Osima, preced. rev.). Osima used the Chung-Robinson theorem. The present paper gives a direct proof to Osima's formula, making use of the relationship of the matrix of decomposition numbers and the recursion formula of Mur-

naghan and the reviewer. Cf. a later paper by Frame-Robinson [Canadian J. Math. **6**, 125—127 (1954)].
T. Nakayama.

Dieudonné, Jean: Sur les groupes unitaires quaternioniques à deux et à trois variables. Bull. Sci. math., II. Sér. **77**, 195—214 (1953).

L'A. poursuit l'étude de la structure des groupes unitaires (cf. ce Zbl. **46**, 253, au compte-rendu duquel nous renvoyons pour les notations). Il complète l'étude des isomorphismes entre les groupes $U_n(K, f)$ ($n = 2, 3$) et certains groupes unitaires lorsque K est un corps de quaternions généralisés et que f est antihermitienne pour l'involution dans laquelle les seuls éléments symétriques sont ceux du centre. Cela lui permet d'établir un résultat conjecturé dans l'article cité: Si K est un corps de quaternions, f une forme antihermitienne d'indice 1 sur E , le groupe T_n est le groupe des commutateurs de $U_n(K, f)$ pour $n \geq 3$.

A. Revuz.

Nóno, Takayuki: A theorem on the unitary groups over rings. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **17**, 173—179 (1953).

Dans un travail récent (apparemment ignoré de l'A.), le Réf. a montré comment se généralise le théorème classique sur l'isomorphisme entre le groupe unitaire quaternionique et l'intersection du groupe unitaire (sur les complexes) et du groupe symplectique (sur les complexes) de dimension double; cela vaut pour des groupes unitaires sur des corps non commutatifs beaucoup plus généraux (ce Zbl. **49**, 25). L'A. étudie un cas encore plus général, le corps étant remplacé par un anneau ayant un élément unité: les méthodes et résultats sont tout à fait analogues. La terminologie de l'A. est parfois surprenante: il parle d'un espace vectoriel dont les scalaires sont, non dans un anneau, mais dans un autre espace vectoriel! Le nom de „groupe symplectique“ qu'il attribue à un groupe unitaire sur un anneau non commutatif est aussi assez fâcheux.

J. Dieudonné.

Freudenthal, Hans: Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 90—94 (1953).

Es seien G eine Liesche Gruppe, \mathfrak{g} ihre Infinitesimalgruppe und A, B, C, \dots Elementen der letzteren. Verf. beginnt mit der Bemerkung, daß die Cartansche Bilinearform (A, B) , die Cartansche Trilinearform $(A, B, C) = ([A, B], C)$, sowie die biquadratische Form $([A, B], [A, B])$ Invarianten der adjungierten Gruppe \mathfrak{g} von G sind. Sodann werden die folgenden beiden Sätze bewiesen: Wenn G halbeinfach und frei von direkten Faktoren vom Range Eins ist, so ist \mathfrak{g} die umfassendste zusammenhängende Gruppe linearer Transformationen, welche (I) die Form (A, B, C) , (II) die Form $([A, B], [A, B])$ invariant läßt. Die Beweise sind basiert auf die bekannte Cartan-Weylsche Zerlegung nach einer regulären maximalen abelschen Untergruppe: ihre Darstellung dürfte sich kaum verkürzen lassen.

H. Schwerdtfeger.

Freudenthal, Hans: Sur le groupe exceptionnel E_7 . Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **56**, 81—89 (1953).

Die These von E. Cartan enthält bei der Behandlung der Lieschen Ausnahmegruppe E_7 einen Rechenfehler, wie Verf. bemerkt hat. Die vorliegenden umfangreichen Rechnungen dienen zur Richtigstellung. Verf. behauptet irrtümlich, alle Autoren, die sich mit den Ausnahmegruppen beschäftigt haben, hätten den erwähnten Fehler übernommen: Ref. hat die Existenz der Ausnahmegruppen auf anderem Wege nachgewiesen (dies. Zbl. **25**, 302).

E. Witt.

Samelson, H.: A class of complex-analytic manifolds. Portugaliae Math. **12**, 129—132 (1953).

Théorème: Le quotient G/T^s d'un groupe de Lie compact par un tore à s dimensions, ($0 \leq s \leq \text{rang } G$), possède une structure de variété analytique complexe invariante par les translations à gauche du groupe, lorsque $\dim G - s$

st paire. Le cas principal est $s = 0$. G est semi-simple, et la démonstration consiste alors à établir que G s'identifie au quotient de son extension complexe par une sous-groupe complexe convenable, en relations avec le sous-groupe résoluble bien connu considéré tout d'abord par K. Iwasawa. Ce résultat généralise une proposition du rapp., où T^* est un tore maximal [Ann. of Math., II. Ser. 57, 115—207 (1953), § 29 de ce travail], et est lui-même cas très particulier de théorèmes dus à H. C. Wang [Amer. J. Math. 76, 1—32 (1954)].

A. Borel.

Dynkin, E. B.: Homologiecharakteristiken der Homomorphismen kompakter Liescher Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1007—1009 (1953) [Russisch].

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. [dies. Zbl. 47, 200; S. 21; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 201—204 (1953)]. Sei \mathfrak{G} die Algebra der Homologien einer kompakten Lieschen Gruppe \mathfrak{G} und $\bar{\mathfrak{G}}$ die Algebra der \bar{H} -Homologien, d. i. die Algebra der zweiseitig invarianten Differentialformen auf \mathfrak{G} . Für $x \in \mathfrak{G}$ und $\xi \in \bar{\mathfrak{G}}$ wird das nicht-ausgeartete Skalarprodukt $\langle \xi, x \rangle$ als das Integral über ξ längs des Zyklus x erklärt. Ein Homomorphismus F von \mathfrak{G} in die kompakte Liesche Gruppe \mathfrak{G}' induziert einen Homomorphismus F der Algebra $\mathfrak{G}(\mathfrak{G})$ in die Algebra $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}')$ und einen Homomorphismus F^* von $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}')$ in die Algebra $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G})$. Resultate über diese Homomorphismen werden mitgeteilt und auf die klassischen Gruppen angewandt.

H. Schwerdtfeger.

Matsushita, Shin-ichi: Plancherel's theorem on general locally compact groups. J. Inst. Polytechn. Osaka, Ser. A 4, 63—70 (1953).

Extension du Théorème de Plancherel ne supposant pas que le groupe soit ni séparable ni unimodulaire.

A. Revuz.

Kasuga, Takashi: On the isomorphism of topological groups. Proc. Japan Acad. 29, 435—438 (1953).

If two semicompact (= locally bicomact and enumerable sum of bicomact sets) topologies of the same group possess a common weaker Hausdorff topology (which needs not to be a group topology), then the weakest stronger topology is also semicompact and, as a consequence of a generalisation by Tannaka [Ivogunron 1949, 36—37 (in Japanese)] of a theorem of H. Freudenthal (this Zbl. 13, 202), all these topologies are identical. Theorems about representations and subgroups are derived from this results and finally it is proved that the strong topology of a Banach space is determined by its weak topology.

H. Freudenthal.

Wallace, A. D.: Inverses in Euclidean mobs. Math. J. Okayama Univ. 3, 3—28 (1953).

We denote by X and S a Hausdorff space and a Hausdorff semigroup of mappings $t: X \rightarrow X$ respectively. We introduce also the following notations: $\bar{t}_n(t) = \text{closure of the set } \{t^m, m \leq n\}$, $I(t) = I_1(t)$, and $K(t) = \bigcap \{I_n(t) \mid n \geq 1\}$. If $I(t)$ is compact, $tA \supset A$ (A : compact), then $t_1A = A$ ($t_1 \in I(t)$), and each t_1 acts as a homeomorphism on A , and the unit of $K(t)$ acts as the identity on A . Using the cohomological lemmas the author then proves the theorems: (a) If $I(t)$ and $X \subset R^n$, $n \geq 2$ are compact and the boundary F of X satisfies $tF \supset F$, then $t_1X = X$ for each $t_1 \in I(t)$ and the unit of $K(t)$ acts as the identity on X . (b) Let S be a compact connected semigroup contained in R^n , $n \geq 2$. If the closed ideal I of S includes the boundary of S then $I = S$. Perhaps the most interesting result in this note may be the following corollary: Under the same assumptions concerning S as in (b), all elements with inverses lie in the boundary F of S .

T. Tannaka.

Wallace, A. D.: Indecomposable semigroups. Math. J. Okayama Univ. 3. 1—3 (1953).

It was proved among other things that if a topological semigroup with unit is a metric indecomposable continuum then it is a group. Examples and questions of the same kind are given at the end of the note. One of which is the following: If a compact connected Hausdorff semigroup has a unique left unit is this also a right unit? This problem is solved negatively by M. Kimura and T. Tamura [Sûgaku Shijô Danwakai, Tokushima 16, 409 (1954) (in Japanese)]. we can give for instance following semigroup S as a counter-example: S consists of the pairs of real numbers (x, y) ($0 \leq x \leq y \leq 1$) with the multiplication law $(x, y)(x', y') = (xx', xy')$. Evidently $(1, 1)$ is left unit but it is not right one. T. Tannaka.

Verbände. Ringe. Körper:

Zappa, Guido: La teoria dei reticoli e le sue applicazioni. Univ. Politec. Torino Rend. Sem. mat. 12, 5—19 (1953).

Bericht über die Verbandstheorie und ihre Anwendungen in Logik (Boolesche Verbände), Topologie (Verband der abgeschlossenen Mengen), Geometrie (modulare und halbmodulare Verbände) und Algebra (Verbände der Unterstrukturen und Kongruenzen einer algebraischen Struktur). G. Pickert.

Schmidt, Jürgen: Einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hüllenoperatoren. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. I.—18. I. 1953, 21—48 (1953).

Eine Menge \mathfrak{H} von Teilmengen $\subseteq E$ heißt Hüllensystem, wenn $\bigcap_{G \in \mathfrak{H}} G \in \mathfrak{H}$ für $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$ ist.

Die Hüllensysteme \mathfrak{H} sind eineindeutig den Hüllenoperatoren C zugeordnet: $CM = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}, M \subseteq H} H$ ($H \subseteq E$). Für ein Hüllensystem \mathfrak{H} sind die drei Aussagen gleichwertig: 1) Vereinigungsmenge jeder nichtleeren Kette aus \mathfrak{H} gehört zu \mathfrak{H} ; 2) zu $M \subseteq E$, $x \in CM$ gibt es eine endliche Menge $F \subseteq M$ mit $x \in CF$; 3) \mathfrak{H} ist algebraisch, d. h. \mathfrak{H} ist die Menge der Ideale einer allgemeinen Algebra (mit endlichstelligen, aber weder notwendig eindeutigen noch überall erklärten Verknüpfungen). — $M \in \mathfrak{H}$ heißt finitär, wenn es eine endliche Menge A mit $A \subseteq M \subseteq CA$ gibt. Für ein Hüllensystem \mathfrak{H} sind die drei Aussagen gleichwertig: 1) \mathfrak{H} ist algebraisch und jede Menge $\in \mathfrak{H}$ finitär; 2) jede Menge $\in \mathfrak{H}$ ist finitär; 3) \mathfrak{H} erfüllt die Maximalbedingung. — Ist das Hüllensystem \mathfrak{H} algebraisch, so gilt der Durchschnittssatz von McCoy und Fuchs, daß jede Menge $M \in \mathfrak{H}$ der Durchschnitt aller $N \in \mathfrak{H}$ mit $M \subseteq N$ und $N = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}, N \subseteq H} H$ ist, und

ferner der Durchschnittssatz von Frattini und Neumann, daß die Menge aller x , für die aus $x \in A$ und $CA = E$ stets $C(A - \{x\}) = E$ folgt, gleich dem Durchschnitt aller maximalen $H \subseteq E$ aus \mathfrak{H} ist. — In einem Hüllensystem \mathfrak{H} heißt $M \in \mathfrak{H}$ unabhängig, wenn aus $A \subseteq M \subseteq CA$ stets $A = M$ folgt, und dies ist genau dann der Fall, wenn aus $A \subseteq M$ stets $A = M \cap CA$ folgt. Ist \mathfrak{H} algebraisch, so gibt es zu jeder unabhängigen Menge A eine maximale unabhängige Menge $\supseteq A$, doch braucht diese noch keine Basis von E , d. h. eine minimale Menge B mit $CB = E$ zu sein. Ist \mathfrak{H} algebraisch und E finitär, so gibt es zu jedem $M \subseteq E$ aus \mathfrak{H} ein maximales $H \subseteq E$ aus \mathfrak{H} mit $M \subseteq H$ (Existenzsatz von Lindenbaum und Krull). — Die Hüllensysteme \mathfrak{H} mit involutorischer Abbildung Q , für die aus $H_1 \subseteq H_2$ stets $QH_2 \subseteq QH_1$ gilt, sind eineindeutig den in E erklärten symmetrischen Relationen S zugeordnet: $b \in QC\{a\}$ gleichbedeutend mit aSb . Bei einer symmetrischen Relation S heißt $A (\subseteq E)$ Orthogonalmenge, wenn für $a, a' \in A$ stets $a \neq a'$ und aSa' dasselbe bedeuten. Zu jeder Orthogonalmenge gibt es eine diese umfassende maximale Orthogonalmenge (Satz von Wallace). — Zu den allgemeinen Begriffen und Sätzen werden Beispiele aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik gegeben. G. Pickert.

Croisot, Robert: Quelques applications et propriétés des treillis semi-modulaires de longueur infinie. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 16, 11—75 (1953).

Ce travail est la suite d'un mémoire antérieur (ce Zbl. 45, 10, noté T) une thèse présentée à Paris en 1954. Il lui est donc étroitement lié, bien que les deux publications soient séparées. Dans T, l'A. a étudié un grand nombre de conditions qui caractérisent les treillis semi-modulaires de longueur finie et qui ne sont pas équivalentes lorsque la longueur est infinie. Ici l'A. étudie le comportement de ces conditions dans des applications importantes et il en tire une conclusion

concernant la meilleure définition à adopter pour un treillis semi-modulaire de longueur infinie. Dans le chapitre I est étudiée l'axiomatique des treillis modulaires; on y montre que certaines conditions introduites dans T, accompagnées de leurs duales, caractérisent les treillis modulaires; il n'en est pas de même pour les autres, même en présence d'une condition de chaîne, comme le montre une étude minutieuse illustrée d'exemples: c'est ainsi qu'un treillis satisfaisant une condition de chaîne, à la condition (2): $x \cap y$ implique $x \cup y$ couvre y , et à sa duale, n'est pas nécessairement modulaire. Au chapitre II, l'A. donne une application d'une propriété qui est entraînée par la condition (2), la propriété II: $x_1 \cap x_2 = 0$, $(x_1 \cup x_2) \cap x_3 = 0$ et $x_3 > 0 \Rightarrow (x_1 \cup x_3) \cap x_2 = 0$. Il démontre qu'un treillis complet \cap -continu satisfaisant la propriété II dans lequel l'élément universel est union de points, est complémenté; si tout élément est union de points, le treillis est relativement complémenté. Ces résultats constituent une généralisation d'un théorème de G. Birkhoff (Lattice Theory, New York 1948, n. 13, p. 129, ce Zbl. 33 101). Dans le chapitre III sont étudiés les sous-treillis, les produits cardinaux et les treillis homomorphes de treillis semi-modulaires, suivant la condition prise comme définition de la semi-modularité. On y montre l'importance de la condition suivante due à S. Mac Lane: (5) $x \cap z \leq y \leq x \cup z$ entraîne l'existence de t tel que l'on ait $x \cap z < t \leq z$ et $(t \cup y) \cap x = y$. Cette condition se conserve par passage au produit cardinal, ainsi qu'un homomorphisme dans le cas d'un treillis satisfaisant à la condition de chaîne ascendante; d'autre part elle entraîne la condition (2) mentionnée plus haut; elle entraîne aussi la condition suivante: (3) $x > y$ et $z \leq t$ implique $[(x \cup t) \cap z] \cup y = [(z \cup y) \cap x] \cup t$, qui intervient dans le chapitre IV pour établir un théorème du type Jordan-Hölder dans un treillis quelconque. Elle est en particulier appliquée au chapitre V pour démontrer l'égalité des longueurs de certaines chaînes maximales de sous-groupes d'un groupe, de sous-hypergroupes artériels d'un hypergroupe inversible, de relations d'équivalences dans un ensemble. (L'oubli d'une parenthèse fausse l'énoncé de la condition (5) à la page 12. Les signes utilisés pour les opérations d'union et d'intersection ne sont pas très heureux).

L. Lesieur.

Enomoto, Shizu: Boolean algebras and fields of sets. Osaka math. J. 5, 99—115 (1953).

A field of sets F is said to be π -additive (weakly π -additive) in the wider sense if, for each family of sets (of disjoint sets) $\{S_i\}_{i \in I}$ such that 1) $S_i \in F$, 2) $\bar{I} \leq \pi$, 3) there exists the smallest set $S \in F$ including all the sets S_i , we have $S =$ the set-theoretical union of all S_i . The definition of a field completely (weakly completely) additive in the wider sense is analogous — only the condition 2) should be omitted. A subset R of a Boolean algebra B is said to be a ramification set (see A. Horn and A. Tarski, this Zbl. 35, 30) if 1) either $x \cdot y = 0$ or $x \leq y$ or $y \leq x$ for arbitrary $x, y \in R$, 2) for each element $x \in R$ the set $R_x = \{y \in R \text{ and } x \leq y\}$ is ordered and each subset of R_x has a greatest element. — The paper contains some sufficient and necessary conditions for a Boolean algebra B to be isomorphic to a field of sets, π -additive (weakly π -additive, completely additive, weakly completely additive) in the wider sense. Beside the essentially known conditions based on the notion of the two-valued measure, the author formulates also some sufficient or necessary conditions, based on the notion of ramification sets and on some properties of infinite distributivity of B . The necessary or sufficient conditions for B to be atomic are also examined. The main theorem is the following generalization of a theorem of Tarski: A (non-complete, in general) Boolean algebra B is atomic if and only if B is completely distributive (i. e. if the existence of $\sum_j a_{ij}$,

$\prod_i \sum_j a_{ij}$ and $\prod_i a_{ii}$ implies that $\prod_i \sum_j a_{ij} = \sum_{(j)} \prod_i a_{ij}$). The author introduces also the definition (based on the notion of ramification sets) of a „point“ of a Boolean algebra B and he proves that B is isomorphic to a field of sets of the „points“. A realization of this isomorphism by a special mapping is also used to characterize the Boolean algebras which are atomic or isomorphic to fields of sets with a given kind of infinite additivity. R. Sikorski.

Ellis, David: Notes on the foundations of lattice theory. II. Arch. der Math. 4, 257—260 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 38, 169.) L sei ein Verband, $f(a, b)$ eine Abbildung $L \times L \rightarrow S$ ($=$ beliebige Menge); dann wird $f(a, b)$ eine c -Funktion genannt, falls $f(a, b) = f(a', b')$ für $a, b \in L$ gilt. Verschiedene bekannte Aussagen über Verbände lassen sich in der Sprache der c -Funktionen ausdrücken. Z. B. ist L dann und nur dann modular, wenn aus $f(a, b) = f(a, c)$ folgt, daß b und c entweder inkomparabel oder gleich sind, während $b = c$ für die Distributivität von L notwendig und hinreichend ist. Besteht S aus reellen Zahlen und gilt $f(a, b) + f(c, d) = f(a, c) + f(b, d)$, so ist $f(x, y) = g(x) + g(y)$, wobei g eine reelle Bewertung von L ist, und umgekehrt.

F. W. Levi.

Balachandran, V. K.: On disjunction lattices. J. Madras Univ., Sect. B 23, 15—21 (1953).

A distributive lattice is called a disjunction lattice if to any two distinct elements a, b of the lattice a third element c can be found such that one of $a \cdot c, b \cdot c$ is zero but not the other. The following are the main results proved in this paper: A distributive lattice L will be a disjunction lattice if, and only if, either every principal μ -ideal is normal, or every principal α -ideal, other than L , is the product of the maximal α -ideals containing it; while any lattice L is a disjunction lattice if, and only if, every principal μ -ideal, other than L , is the product of the minimal prime μ -ideals containing it. A Boolean algebra is completely characterized as a disjunction lattice closed for product complements. A complete lattice L with all sums distributive is a complete Boolean algebra if and only if every principal α -ideal, other than L , is the product of all the maximal α -ideals containing it.

V. S. Krishnan.

Kasch, Friedrich: Halblineare Abbildungen und die Rangrelation bei Galoischen Erweiterungen. Arch. der Math. 4, 402—407 (1953).

Let A be a simple ring (with unit and minimum condition). For $X \subseteq A$, let X' (resp. X'') be the set of right (resp. left) multiplications of the elements of X onto A . Every A' -semilinear endomorphism v of A has a form $g t'(t \in A)$ with a ring automorphism g of A . It is proved that A' -semilinear endomorphisms $v_i = g_i t'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) are linearly dependent over A if and only if there are v_1, \dots, v_m ($m \leq n$) with a suitable enumeration) such that $g_i = g_1 a_j^i (a_j^{-1})'$ ($a \in A$) ($j = 1, \dots, m$) and the elements $t_1, a_1, \dots, t_m, a_m$ are linearly dependent over the center Z of A . It follows from this that the rank relation $(A:C) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{G}_0)(T:Z)$ for the fixed subring C of a Galois group \mathfrak{G} of A , which has been proved in case \mathfrak{G} is a regular automorphism group (Reviewer, this Zbl. 49, 22), is valid in case \mathfrak{G} is a semi-regular automorphism group; \mathfrak{G} is called semi-regular when the subgroup \mathfrak{G}_0 of \mathfrak{G} consisting of all inner automorphisms of A contained in \mathfrak{G} is the totality of inner automorphisms of A induced by regular elements of a semisimple subring T of A containing and finite over Z . T. Nakayama.

Kasch, Friedrich: Über den Endomorphismenring eines Vektorraumes und den Satz von der Normalbasis. Math. Ann. 126, 447—463 (1953).

The theorem of normal bases is studied in connection of the endomorphism ring of a module. Let V be a vector left-module over a ring ($\neq 1$) H and \mathfrak{G} be the H -endomorphism ring of V . Let \mathfrak{G} have a (finite independent) right-basis over a subring \mathfrak{Z} satisfying the MM (i. e. maximum and minimum)-condition. It is proved, by a consideration on the direct sums of isomorphic copies of modules and the structure of \mathfrak{G} , that $V \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}$ (i. e. is mapped homomorphically on, isomorphic with, or a homomorphic image of) \mathfrak{Z} with respect to \mathfrak{Z} according as $(V:H) \subseteq (\mathfrak{G}:\mathfrak{Z})$. This alone leads directly to the theorem of normal bases for a Galois extension of a field with outer Galois group [Reviewer, Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 532—536 (1940)]. (A similar proof has been given by Azumaya (this Zbl. 40, 156; cf. Reviewer, this Zbl. 38, 24).) Let next K be a simple ring with MM-condition and \mathfrak{G} be an automorphism group of K . It is proved that a set of elements of \mathfrak{G} is linearly dependent over the right multiplication ring K' of K if and only if it has a finite subset g_1, \dots, g_q such that there are regular elements τ_1, \dots, τ_q in K with $\sum \tau_i = 0$ and $g_i = g_1 t_i$, where t_i is the inner automorphism of K induced by τ_i . In fact, τ_i can be taken from the centralizer T in K of the fixed ring H of \mathfrak{G} . It is now assumed that H satisfies MM-condition, T is generated by regular elements, and $(K:H) = \text{Ord}(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z})(T:Z)$, where \mathfrak{Z} is the totality of inner automorphism of K contained in \mathfrak{G} and Z is the center of K ; for this rank relation cf. preceding review. The above theorems, again combined with a consideration on the structure of \mathfrak{G} , lead that the subring $\mathfrak{K} = [H', \mathfrak{G}]$ of \mathfrak{G} and K itself are K -right-isomorphic, whenever $T = Z$ or $\subseteq H$. In case K is a field, the converse holds too. Further, if \mathfrak{G} has a finite subgroup \mathfrak{G}_0 containing a K' -basis of \mathfrak{G} and if the characteristic does not divide the order of \mathfrak{G}_0 , then $\mathfrak{K} = K$ with respect to \mathfrak{K} . A case where such \mathfrak{G}_0 exists is given, a result to be generalized in Author, this Zbl. 51, 27. The paper concludes with showing that in case K is a sfield, K is generated by two elements (one element) over H (when $T \subseteq H$); cf. Author, this Zbl. 44, 266.

T. Nakayama.

Nakayama, Tadasi: On a fundamental lemma on weakly normal rings. Proc. Japan Acad. 29, 191—193 (1953).

Soit R un anneau simple satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à gauche, S un sous-anneau semi-simple de R , ayant même élément

mité que R et satisfaisant aussi à la condition minimale. Supposons que S soit simplement normal dans R (i. e., que le commutant de l'anneau S_r des multiplications à droite par les éléments de S , dans l'anneau des endomorphismes du groupe additif R , soit engendré, sur l'anneau R_l des multiplications à gauche par des éléments de R , par des endomorphismes semi-linéaires du R_l -module R); alors l'A. montre que R , considéré comme bimodule sur R (à gauche) et S (à droite), est complètement réductible; il avait auparavant montré qu'il en est ainsi lorsque S est simple (ce Zbl. 47, 33). J. Dieudonné.

Tominaga, Hisao: On right-regular-ideal-rings. Proc. Japan Acad. 29, 486–489 (1953).

Es seien K ein Ring mit 1-Element, M ein K -Rechtsmodul und das 1-Element von K Einheitsoperator von M . Mit M^p wird die p -fache direkte Summe von M bezeichnet, auf die die Operatoren aus K komponentenweise ausgeübt werden. Gibt es zwei natürliche Zahlen p und q , so daß M^p und K^q als K -Rechtsmoduln isomorph sind, dann wird M im Anschluß an T. Nakayama rechtsregulär in bezug auf K genannt. Der Ring K wird als r - r - i -Ring bezeichnet, wenn jedes seiner von Null verschiedenen Rechtsideale rechtsregulär in bezug auf K ist. Fast unmittelbar erhält man (Th. 1): Ein r - r - i -Ring K ist ein primer Ring (also ein Ring, in dem das Nullideal Primideal ist) mit Maximumbedingung. Ist die Minimumbedingung erfüllt, dann ist K ein einfacher Ring. Durch Induktion wird sodann bewiesen (Th. 2): Sei K ein r - r - i -Ring und M ein rechtsregulärer K -Modul, dann ist jeder von Null verschiedene K -Untermodul von M ebenfalls rechtsregulär. — Von den weiteren Überlegungen soll noch die folgende Radikalfinition angegeben werden, die unter der Voraussetzung der Minimumbedingung mit der klassischen übereinstimmt: In einem beliebigen Ring A sei das Radikal der Durchschnitt aller der zweiseitigen Ideale a , für die A/a ein r - r - i -Ring ist. F. Kasch.

Yoshida, Michio and Motoyoshi Sakuma: A note on semilocal rings. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 17, 181–184 (1953).

Es sei \mathfrak{o} ein kommutativer Ring mit Einselement und \mathfrak{m} ein Ideal in \mathfrak{o} mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$. Die Ideale \mathfrak{m}^n , $n = 1, 2, \dots$ definieren in \mathfrak{o} in bekannter Weise eine mit der Ringstruktur verträgliche Topologie. $\bar{\mathfrak{o}}$ sei die \mathfrak{m} -adische Vervollständigung des so topologisierten (\mathfrak{m} -adischen) Ringes \mathfrak{o} . Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \bar{\mathfrak{o}}$ heie dual unzerlegbar, wenn $\mathfrak{a} \neq \bar{\mathfrak{o}}$ und keine Ideale $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ derart existieren, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \bar{\mathfrak{o}}$, $\mathfrak{a}_1 \neq \bar{\mathfrak{o}}$ und $\mathfrak{a}_2 \neq \bar{\mathfrak{o}}$. \mathfrak{o} heie direkt unzerlegbar, wenn \mathfrak{o} nicht als direkte Summe zweier vom Nullideal verschiedener Ideale darstellbar ist. Mittels der beiden folgenden Sätze geben Verff. u. a. eine Übersicht über alle unzerlegbaren Komponenten von $\bar{\mathfrak{o}}$: 1. Vor.: \mathfrak{m} sei Durchschnitt der paarweise teilerfremden Ideale $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$. $\tau_{\mathfrak{o}}$ sei der kanonische Homomorphismus von \mathfrak{o} in die $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}$ -adische Vervollständigung $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{o}}$ von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{o}}$, wobei $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}^{\infty} = \bigcap \mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}^n$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{o}}^{\infty} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{o}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}^{\infty}$, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}^{\infty} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{o}}^{\infty}$; $\varrho = 1, \dots, r$. — Beh.: Der kanonische Homomorphismus $\tau = \tau_1 + \dots + \tau_r$ von $\bar{\mathfrak{o}}$ in die direkte Summe $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}_1 + \dots + \bar{\mathfrak{o}}_r$ ist ein Isomorphismus von $\bar{\mathfrak{o}}$ auf $\bar{\mathfrak{o}}$. — 2. Ist \mathfrak{m} dual unzerlegbar, so ist $\bar{\mathfrak{o}}$ direkt unzerlegbar. — Satz 1 gilt auch dann, wenn \mathfrak{o} ein Noetherscher Ring, \mathfrak{m} ein Semi-Primideal und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_r$ eine unverkrzbare Darstellung von \mathfrak{m} durch größte Primärkomponenten ist. Mit Hilfe dieser Bemerkung beweisen Verff. einen Satz von C. Chevalley, wonach $\bar{\mathfrak{o}}$ direkte Summe von r vollständigen, lokalen Ringen ist, wenn \mathfrak{m} Durchschnitt von r maximalen Idealen im Noetherschen Ring \mathfrak{o} ist. H. Bauer.

Villamayor, Orlando E.: On the concept of filter in ring theory. Revista Un. Mat. Argentina 15, 173–180 (1953).

Gegeben ein Ring R , den wir als R -Linksmodul (R -LM) auffassen. Ist σ eine lineare Abbildung dieses R -LM auf den R -LM B , so heißt $b \in B$ eine Einheit (bzgl. σ), sofern $r b = \sigma(r)$ für jedes $r \in R$. Die Menge der σ -Urbilder einer σ -Einheit b heißt ein Linksfilter von R . F ist ein Linksfilter, sofern folgende Bedingungen erfüllt sind: (0) F nichtleer; (1) $f_1, f_2, f_3 \in F \Rightarrow f_1 + f_2 + f_3 \in F$; (2) $f \in F, r \in R \Rightarrow f \cdot r = r \cdot f \in F$. Ein Linksfilter ist multiplikativ abgeschlossen; der einzige 0 enthaltende Linksfilter ist der ganze Ring R (uneigentlicher Linksfilter). Ist F ein Linksfilter, so ist die Menge $\{f_1 + f_2\}_{f_1, f_2 \in F}$ ein Linksideal, das zu F korre-

spondierende Linksideal. Besitzt R ein Einselement, so ist hierdurch ein Verbandsisomorphismus zwischen dem Verband aller Linksfilter und dem aller Linksideale gegeben; das Einselement 1 gehört zu jedem Linksfilter. In einem Ring R mit 1 lassen sich nun duale Ringoperationen einführen durch $a + * b = a + b - 1$; $a \times * b = a + b - a b$. Man erhält so den zu R dualen Ring R^* , der aus den gleichen Elementen wie R besteht, und bei dem sich die Rollen von 0 und 1, Filtern und Idealen vertauschen. Das ist eine Verallgemeinerung der Dualität in Booleschen Ringen, die schon Foster und Bernstein [Duke math. J. **11**, 603—616 (1944)] auf beliebige kommutative Ringe mit 1 ausgedehnt hatten.

Jürgen Schmidt.

Drazin, M. P. and K. W. Gruenberg: Commutators in associative rings. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 590—594 (1953).

Let R be an associative ring, $R = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$ the lower central series of R where R_{k+1} is the ideal of R generated by all the commutators $[a, b] = ab - ba$ with $a \in R_k$, $b \in R$, moreover let $[R]$ be the Lie ring obtained from R with respect to the multiplication $[a, b]$, and let L be a subring of $[R]$ with enveloping associative ring R . The main result of the paper states that if L is nilpotent and either R_1 is a nilpotent associative ring or R is a finitely generated algebraic algebra of characteristic 0, then R is of finite class, i. e., $R_n = 0$ for a natural number n . This means an improvement of certain results of S. A. Jennings [Duke math. J. **9**, 341—355 (1942); this Zbl. **32**, 253].

T. Szele.

Drazin, M. P.: Triangular representations of linear algebras. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 595—600 (1953).

Let K be an algebraically closed field and R and arbitrary finitely generated associative algebra over K , whose elements act as linear operators on a given K -space U . R is said to be commutator-quasinilpotent provided for any given infinite sequence a_1, a_2, \dots of (not necessarily distinct) elements in the ideal of R generated by all commutators $ab - ba$ ($a, b \in R$) there exists a positive integer n such that $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = 0$. Then the main result of the paper states that, in case R is algebraic or U is finite-dimensional over K , every invariant subspace of U contains a 1-dimensional invariant subspace. This generalizes a theorem of McCoy (this Zbl. **15**, 55).

T. Szele.

Širšov, A. I.: Über die Darstellung Liescher Ringe in assoziativen Ringen. Uspechi mat. Nauk **8**, Nr. 5 (57), 173—175 (1953) [Russisch].

Let A be an associative Σ -ring, i. e. an associative ring with operator domain Σ . With respect to the operation $[x, y] = xy - yx$ as multiplication A becomes a Lie Σ -ring L . The generalization of the Birkhoff-Witt embedding theorem to Lie Σ -rings then reads: Every Lie Σ -ring L has a faithful Σ -representation in an associative Σ -ring A . This was formulated by Kuročkin [this Zbl. **42**, 32, with a correction in Mat. Sbornik, n. Ser. **30**, 463 (1952)], but no satisfactory proof was given. In the present paper the author shows that the theorem as stated is false, by means of an example of a Lie algebra of dimension 13 over the field $GF(2)$, with a ring Σ of dimension 4 over $GF(2)$, which cannot be faithfully represented. He asks for necessary and sufficient conditions on a Lie Σ -ring to be representable faithfully in an associative Σ -ring, and states without proof: If no $\sigma \in \Sigma$ ($\sigma \neq 0$) annihilates any element ($\neq 0$) in the centre of the Lie ring, then such a representation exists.

P. M. Cohn.

Širšov, A. I.: Die Unteralegebren freier Liescher Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. **33** (75), 441—452 (1953) [Russisch].

The author proves in this paper that every subalgebra of a free Lie algebra is again free. He first defines „regular words“ in a given set of generators (for their definition cf. M. Hall, this Zbl. **39**, 263, where they are called „standard monomials“). Given a free Lie algebra \mathfrak{A} on some set R of generators over any field, consider a fixed regular word d . Any regular word $w \neq d$ is called d -irreducible, if w cannot be written as the product of two regular words both $\neq d$. Let K_d be the set of all d -irreducible words in \mathfrak{A} . Then it is shown as a first step (Lemma 3) that the subalgebra generated by K_d is free on the set K_d as free generators. This is expressed by saying that K_d is independent. It follows that the free Lie algebra on

to free generators contains countable subsets which are independent. When the elements of \mathfrak{A} are regarded as non-associative polynomials in the generators, the degree of $f \in \mathfrak{A}$ (quasipolynomial) is defined as usual, and the terms of highest degree of f constitute the leading part of f . Now let \mathfrak{B} be any subalgebra of \mathfrak{A} and define a sequence of integers k_n and subalgebras \mathfrak{B}_n of \mathfrak{B} as follows (cf. Kuroš, this Zbl. **41**, 168) $k_0 = 0$, $\mathfrak{B}_0 = 0$; if k_m and \mathfrak{B}_m have been defined for $m < n$, then k_n is the least degree of any element of \mathfrak{B} not in \mathfrak{B}_{n-1} , and \mathfrak{B}_n is the subalgebra of \mathfrak{B} generated by the elements of \mathfrak{B} of degree $\leq k_n$. Let \mathfrak{R}_n be the linear space consisting of the elements of \mathfrak{B}_n of degree $\leq k_n$, and consider the quotient space $\mathfrak{R}_n / (\mathfrak{R}_n \cap \mathfrak{B}_{n-1})$.

Choose a set \mathfrak{M}_n of coset representatives for a basis of this space, and put $\mathfrak{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$. Then \mathfrak{M} is a set of free generators of \mathfrak{B} , which is therefore free. For this it is shown first that \mathfrak{M} generates \mathfrak{B} but (i) the leading part of any element $a \in \mathfrak{M}$ does not belong to the subalgebra generated by the elements of \mathfrak{M} other than a . It then remains to prove that \mathfrak{M} is independent. This is done by a reduction process, by assuming a non-trivial relation between elements b_1, \dots, b_k of \mathfrak{M} and, by a suitable choice of a set of free generators (using Lemma 3) reducing the sum of the degrees of the b_i 's, so as to obtain a contradiction with (i). — A simple example shows that the proposition does not hold for Lie rings: If \mathfrak{L} is a free Lie ring on a, b , then the subring generated by $2a, b$ and ab is not free. P. M. Cohn.

Dieudonné, Jean: On semi-simple Lie algebras. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 931—932 (1953).

Die Liesche Algebra \mathfrak{g} endlichen Ranges über einem beliebigen Körper K besitzt eine reguläre symmetrische Bilinearform (x, y) mit $(x, y, z) = (x, y, z)$ (Invarianz). Theorem: \mathfrak{g} ist dann direkte Summe nichtabelscher einfacher Algebren, oder aber \mathfrak{g} enthält ein abelsches Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$. Für die Killingsche Form $\kappa(x, y) = \text{Sp}(\text{ad } x \text{ ad } y)$, mit $(\text{ad } x)z = xz$, ist letzterer Fall ausgeschlossen: Wegen $(\text{ad } \mathfrak{g} \text{ ad } \mathfrak{g})^2 = 0$ würde $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 0$ gegen die Regularität folgen. — Für diese Verallgemeinerung von E. Cartans hinreichendem Kriterium für Halbeinfachheit wird der folgende elegante Beweis gegeben: \mathfrak{m} sei ein nichtabelsches minimales Ideal, also $\mathfrak{m}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Das orthogonale Komplement \mathfrak{m}^\perp ist Ideal wegen $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g} \mathfrak{m}^\perp) = (\mathfrak{m} \mathfrak{g}, \mathfrak{m}^\perp) = 0$. $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^\perp$ würde der Regularität von (x, y) widersprechen: $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{m} \mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{m}, \mathfrak{m} \mathfrak{g}) \subseteq (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp) = 0$. Daher ist $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}^\perp = 0$, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \dot{+} \mathfrak{m}^\perp$ eine direkte Idealzerlegung, die nur fortgesetzt zu werden braucht. Ernst Witt.

Herstein, I. N.: A note on a commutativity theorem. Kodai math. Sem. Reports **4**, 119—120 (1953).

Version anglaise de la Note rapportée dans ce Zbl. **51**, 263. G. Ancochea.

Ikeda, Masatoshi: On absolutely segregated algebras. Nagoya math. J. **6**, 3—75 (1953).

Eine Charakterisierung der sogenannten absolut-abspaltbaren (absolut segregated) Algebren. Das sind Algebren A , für die aus $B \cdot C \cong A$ folgt $B = C + A'$; B Algebra, C zweiseitiges Ideal von B . Nach G. Hochschild sind die absolut-abspaltbaren Algebren durch das Verschwinden ihrer 2-Kohomologiegruppen charakterisiert. Verf. beweist: A mit Radikal N ist dann und nur dann absolut-abspaltbar, wenn A/N separabel und N als A -Linksmodul isomorph ist mit einer direkten Summe von direkten Summanden von A ist als A -Linksmodul. W. Gaschütz.

Karpelevič, F. I.: Klassifikation der einfachen Unteralgebren der reellen Formen klassischer Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **93**, 613—616 (1953) [Russisch].

Unter Bezugnahme auf die in der früheren Note des Verf. (dies. Zbl. **47**, 268) eingeführten Begriffe und Bezeichnungen werden ohne Beweis folgende Sätze, Verallgemeinerungen von Sätzen jener Note, mitgeteilt: Seien G und R reelle Formen halbeinfacher Liescher Algebren und $[G] \subseteq [R]$. Es ist $\mathfrak{R}(G) \subseteq \mathfrak{R}(R)$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{M}(G) \subseteq \mathfrak{M}(R)$. — Es heiÙe G eine irreduzible Unteralgebra von R , wenn es keinen von der Identität verschiedenen Automorphismus von $[R]$ gibt, der alle Elemente von $[G]$ einzeln fest läÙt. (Dies ist eine naturgemäÙe Verallgemeinerung des klassischen Irreduzibilitätsbegriffs im Falle einer Matrizenalgebra.) Eine Darstellung φ von G in R heiÙt irreduzibel, wenn $\varphi(G)$ eine irreduzible Unter-

algebra von R ist. Satz: Sei φ eine Darstellung der reellen Form G der halbeinfachen Algebra $[G]$ in der komplexen Algebra R ; die Algebra $\varphi(G)$ kann dann in höchstens einer reellen Form vorgegebenen Typus der Algebra R enthalten sein. Zwei reelle Formen G_1 und G_2 gehören zum gleichen Typus, wenn die Mengen $\mathfrak{M}(G_1)$ und $\mathfrak{M}(G_2)$ involutorischer Automorphismen derselben Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe von R angehören. Diese Sätze werden zur Klassifikation der reellen Formen der klassischen Algebren verwendet. Dazu werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt: $I(n)$ ist die Untergruppe von $SL(n)$, bestehend aus allen reellen Matrizen der Spur Null; $J(n) =$ alle Matrizen a der Spur Null für die $s^{-1}as = a$, wobei s die Normalform einer regulären schiefsymmetrischen Matrix ist. Ferner ist $SL(n)^\sigma$ die Untergruppe von $SL(n)$, die die Hermitesche Normalform der Signatur σ invariant läßt. Für $O(n)$ und $Sp(n)$ wird definiert $O(n)^\sigma = SL(n)^\sigma \cap O(n)$ und $ISp(n) = SL(n)^\sigma \cap Sp(n)$, etc. Das Haupthilfsmittel liefert dann die folgende Definition: Sei $\mathfrak{E}(R)$ die Menge aller mit R konjugierten Unteralegebren von $SL(n)$. Es sei $\mathfrak{E}(R_1) \subset \mathfrak{E}(R_2)$, wenn für irgend eine Algebra $R'_1 \in \mathfrak{E}(R_1)$ eine $R'_2 \in \mathfrak{E}(R_2)$ existiert derart, daß $R'_1 \subset R'_2$. Die Hauptsätze werden dann unter Benutzung von Resultaten aus der zitierten Note erhalten. Die feineren Einzelheiten der Klassifikation lassen sich nicht kurz beschreiben.

H. Schwerdtfeger.

Goldhaber, J. K. and G. Whaples: On some matrix theorems of Frobenius and McCoy. Canadian J. Math. 5, 332—335 (1953).

In Ergänzung einer früheren Arbeit von Goldhaber (dies. Zbl. 46, 35) werden die dort gegebenen, nur für Grundkörper der Charakteristik 0 gültigen Beweise eines Satzes von McCoy und eines Satzes von Goldhaber auf beliebige Grundkörper k erweitert. Für den Fall, daß k quasi-algebraisch abgeschlossen ist, wird der Goldhabersche Satz noch verschärft.

H. Rohrbach.

Nagata, Masayoshi, Tadasi Nakayama and Tosi-ro Tuzuku: On an existence lemma in valuation theory. Nagoya math. J. 6, 59—61 (1953).

Beweis des folgenden Satzes: k sei ein kommutativer Körper, welcher algebraischer Zahlkörper oder nicht absolut-algebraisch ist, und K sei eine endliche separable Erweiterung vom Grade $n(>1)$ über k . Dann existieren unendlich viele, zueinander nicht-äquivalente (reellwertige) Exponentenbewertungen von K , welche über k vom Grade 1 sind. Ist k ein algebraischer Zahlkörper, so kann man annehmen, daß k den rationalen Zahlkörper \mathbb{Q} enthält. Ist aber k nicht absolut-algebraisch, so existiert ein Unterkörper Q von k derart, daß $R = Q(t)$ über Q transzendent und k über R algebraisch ist. Ein Element aus $Z = Q[t]$ heißt ganz in R ; wenn k ein algebraischer Zahlkörper, so bezeichnet Z die Menge aller ganzen rationalen Zahlen. Ein Element aus K heißt ganz, wenn es in bezug auf Z ganz ist. K besitzt bekanntlich ein ganzes, primitives Element α über k mit $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ als definierende Gleichung in k . Dann kann man eine Menge von Elementen w_i ($i = 1, 2, \dots, m, \dots$) aus Z und eine Menge von zueinander nicht-äquivalenten Bewertungen v_i ($i = 1, 2, \dots, m, \dots$) von $R(\alpha)$ so bestimmen, daß $v_i(\alpha - w_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots$) sind. Für jedes i legt man irgendeine Fortsetzung ϱ_i von v_i auf K fest. Da es offenbar unter den ϱ_i ($i = 1, 2, \dots$) höchstens endlich viele Bewertungen ϱ mit $\varrho(d) \neq 0$ (d ist die Diskriminante von $f(x)$) oder mit $\varrho(a_j) < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) gibt, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für jedes i i) $\varrho_i(d) = 0$, ii) $\varrho_i(a_j) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) und iii) $\varrho_i(\alpha - w_i) > 0$ sind. Dann sind alle ϱ_i ($i = 1, 2, \dots$) sicher vom Grade 1 über k .

M. Moriya.

Benz, Herbert: Charakterisierung nichtkommutativer Systeme durch eine bewertungstheoretische Produktformel mit einer Anwendung auf die Einheiten-theorie. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. 1.—18. 1. 1953, 174—178 (1953).

Let R be a simple commutative or non-commutative ring. Then $\varphi(x)$ is a pseudo-valuation (PV, for short) if, in addition to Mahler's conditions (this Zbl. 13, 51)

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(a) > 0 \quad \text{if} \quad a \neq 0; \quad \varphi(ab) \leq \varphi(a)\varphi(b); \quad \varphi(a-b) \leq \varphi(a) + \varphi(b),$$

it has the following property: to every value $\varphi(a)$, $a \in R$, there exists an $a_\varphi \in R$ such that $\varphi(a_\varphi) = \varphi(a)$, and $\varphi(a_\varphi b) = \varphi(b a_\varphi) = \varphi(a_\varphi)\varphi(b)$. — Assume, further, that $\varphi(a)$ reduces to a valuation in the prime field of R . The author aims at generalizing the results by Artin and Whaples [Bull. Amer. math. Soc. 5, 469—492 (1945)] to such rings. Assume: (1) There is a system F of independent PV of R such that, for $a \neq 0$ in R , $\varphi(a) \neq 1$ only for finitely many $\varphi \in F$, and $\prod_{\varphi \in F} \varphi(a) \geq 1$. (2) At least one $\varphi \in F$ is either Archimedean, or it is

discrete with a finite residue ring and there is at least one a_p in the centre of R for which $\varphi(a_p) > 1$. It is proved that (1) and (2) hold if, and only if, R is a simple algebra either over the rational number field, or over an algebraic function field of one variable with a finite constant field. The proof is based on the methods and results of Artin and Wharples. — Let next \mathfrak{S} be a finite subset of F . So-called \mathfrak{S} -units are defined as the regular $a \in R$ for which $q(a) \neq 1$ only if $q \in \mathfrak{S}$. The theorem is announced that these \mathfrak{S} -units have a finite number of generators and again (1) and (2) hold. This extends a result due to C. L. Siegel [Ann. of Math., II. Ser. 44, 674—689 (1943)] to function fields. K. Mahler.

Lang, Serge: The theory of real places. Ann. of Math., II. Ser. 57, 378—391 (1953).

K sei ein kommutativer Körper und q eine solche eindeutige Abbildung aus K in einen kommutativen Körper L , daß für jedes Element $x \in K$ entweder $q(x) \in L$ oder $q(x^{-1}) \in L$ ist. Ferner sei $q(1) = 0$ und im Falle $q(x) \in L$ stets $q(x^{-1}) = 0$. R bezeichne die größte Teilmenge von K mit der Eigenschaft $q(R) \subseteq L$. Bildet dann R einen Unterring von K und ist φ ein Homomorphismus von R in L , so heißt φ eine Stelle (oder genauer eine L -wertige Stelle) von K . Man bezeichnet $\varphi(R)$ auch mit $\varphi(K)$. Dabei ist R ein Bewertungsring von K (d. h. für jedes $x \in K$ ist entweder $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$); umgekehrt bestimmt ein Bewertungsring eine Stelle von K . Wirkt eine Stelle φ von K auf einen Unterkörper F von K als Isomorphismus ein, so heißt φ eine Stelle (von K) über F ; φ heißt über F algebraisch (rational), wenn für jedes $x \in K$ mindestens eines von $q(x)$ und $q(x^{-1})$ über dem Körper $\varphi(F)$ algebraisch (rational) ist. I. Eine L -wertige Stelle von K heißt reell, wenn L ein (formal-) reeller Körper ist. Bezieht K überhaupt eine reelle Stelle φ , so ist K stets ein reeller Körper. Ein über K algebraischer, reell-abgeschlossener Körper besitzt mindestens eine reelle Stelle, welche Fortsetzung von φ ist. Ist ein reeller Körper K ein algebraischer Funktionenkörper mehrerer Unbestimmten mit einem reell-abgeschlossenen Körper P als Konstantenkörper (K heißt einfach ein reeller Funktionenkörper über P), so existiert eine rationale Stelle von K über P . Verf. beweist mit Hilfe dieser Tatsache folgende Verallgemeinerung eines Hilbertschen Problems: Sei ein reeller Funktionenkörper über einem reellen Körper F und ξ sei ein Element aus K von der Art, daß für jede über F algebraische, reelle Stelle φ von K und für jede Anordnung von $\varphi(K)$ entweder $\varphi(\xi) \geq 0$ oder $\varphi(\xi^{-1}) = 0$ ist. Dann ist ξ als Quadratsumme aus K darstellbar. II. Ist K ein angeordneter Körper und F ein Unterkörper von K , so bildet die Gesamtheit R aller Elemente aus K , welche in bezug auf F nicht unendlich-groß sind, einen Bewertungsring von K ; ferner bildet die Gesamtheit p aller, in bezug auf F , unendlich-keinen Elemente aus K ein einziges Maximalideal aus R . Der natürliche Homomorphismus φ von R auf den Restklassenkörper R/p ergibt eine reelle Stelle von K über F ; φ heißt die kanonische Stelle von K/F . Ist insbesondere F maximal-archimedisch in K , so ist die kanonische Stelle von K/F über F algebraisch. P sei ein reell-abgeschlossener Körper und K ein Überkörper von P . Ferner sei φ eine rationale Stelle von K/P . Dann kann man K so anordnen, daß P in K maximal-archimedisch wird und die kanonische Stelle von K/P φ induziert. Verf. entwickelt, anschließend an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 46, 262) die Theorie der ungerade, quasi algebraisch-abgeschlossenen Körper. Ein Körper K ist ungerade- C_r genannt, wenn jede Form von einem ungeraden Grad d in n ($n > d^r$) Unbestimmten eine nicht-triviale Nullstelle aus F besitzt. Als eine Anwendung dieser Theorie beweist Verf. folgende Tatsache: P sei ein reell-abgeschlossener Körper und f_1, \dots, f_r seien Formen ungeraden Grades in n Unbestimmten. Ist dann $n > r$, so besitzen die f_i ($i = 1, \dots, r$) eine gemeinsame nicht-triviale Nullstelle aus P . M. Moriya.

Fleischer, Isidore: Sur les corps localement bornés. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 446—548 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Note des Verf. (dies. Zbl. 50, 264) wird folgendes bewiesen: Sei K eine topologischer (nicht notwendig kommutativer) Körper mit einer (nicht diskreten, dem Hausdorffschen Trennungssaxiom genügenden) Topologie τ . τ wird von einer Bewertung von K mit abelscher Wertegruppe in bekannter Weise induziert, wenn (1) in K eine offene und beschränkte Menge existiert, (2) die Kommutatorgruppe von K beschränkt ist, und wenn es (3) zu τ keine gröbere Topologie mit diesen Eigenschaften gibt. — Eine Menge $B \subseteq K$ heißt hierbei beschränkt, wenn zu jeder Umgebung U von 0 eine Umgebung V von 0 existiert mit $BV, VB \subseteq U$. Zu Topologien mit (1) und (2) gibt es stets solche mit der Minimaleigenschaft (3). W. Gaschütz.

Krull, Wolfgang: Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. I, II, III. Math. Z. 59, 57—60, 296—298 (1953), 60, 109—111 (1954).

Verf. nennt einen Körper K mit dem Prinkörper K_0 wohldefiniert, wenn Elemente $\tau_1, \dots, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ aus K und ein Polynomsystem $p_1(x_1), p_2(x_1, x_2), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)$ über $K_0(\tau_1, \dots, \tau_m)$ gegeben sind, so daß $K = K_0(\tau_1, \dots, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ist und folgende Eigenschaften erfüllt sind: a) Die τ_i sind über K_0 algebraisch unabhängig, b) es ist $p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i) = 0$, und c) $p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, x_i)$ ist irreduzibel über $K_0(\tau_1, \dots, \tau_m, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1})$. Über einem wohldefinierten Körper kann man nach Kronecker jedes Polynom in endlich vielen Schritten in Primfaktoren zerlegen. Die Konstruktion von Körpern, welche die letztgenannte Eigenschaft haben, ohne wohldefiniert zu sein, führt zu der Frage nach Folgen wohldefinierter algebraischer Zahlkörper K_1, K_2, \dots mit der Eigenschaft (Z): Zu jedem über dem rationalen Körper irreduziblen Polynom $p(x)$ gibt es eine berechenbare Schranke $v(p)$ derart, daß $p(x)$ über allen Körpern K_i irreduzibel bleibt, wenn dies nur für $i = 1, 2, \dots, v(p)$ der Fall ist. Verf. gibt Kriterien für das Bestehen der Eigenschaft (Z) an und behandelt als Beispiel die Folge aller imaginärquadratischen Zahlkörper. Martin Kneser.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Carlitz, L.: The class number of an imaginary quadratic field. Commentarii math. Helvet. 27, 338—345 (1953).

Aus der bekannten Formel für die Klassenzahl $h(d)$ des imaginärquadratischen Körpers mit der Diskriminante $d < -4$ $h(d) = \frac{1}{d} \sum_{1 \leq m < |d|} m \binom{d}{m}$ leitet Verf. für einen ungeraden Primteiler p von d folgende Kongruenz her:

$$h(d) \equiv -2c \left(\frac{q}{p} \right) \sum_{1 \leq s < q/2} \left(\frac{q_0}{s} \right) B_k \left(\frac{s}{q} \right) \pmod{p^{n+1}},$$

wobei $d = (-1)^{(p-1)/2} p q_0$, $q = q_0$, $B_k(x)$ das Bernoullische Polynom des Grades $k = \frac{1}{2}(p-1)p^n + 1$, und $c = 1 + \frac{1}{2}p^n$ für $n \geq 1$, während $c = 2$ für $n = 0$. Eine ähnliche Formel gilt auch für $q = 1$, $d = -p$. Verf. zeigt ferner interessante Formeln in speziellen Fällen: $d = -3p, -4p, -5p, -8p, -12p$. Am Ende wird eine ähnliche Kongruenz mit $\bar{B}_k(x)$ statt $B_k(x)$ angegeben. $\bar{B}_k(x)$ ist hierbei die Bernoullische Funktion mit der Periode 1, die im Intervall $0 < x < 1$ mit $B_k(x)$ übereinstimmt. Z. Suetuna.

Schilling, O. F. G.: Necessary conditions for local class field theory. Math. J. Okayama Univ. 3, 5—10 (1953).

Es ist schon von T. Nakayama und Ref. gezeigt worden, daß man über einem diskret bewerteten perfekten Körper k als Grundkörper die Klassenkörpertheorie im Kleinen aufbauen kann, wenn die beiden folgenden Axiome erfüllt sind: i) Der Restklassenkörper \bar{k} von k ist vollkommen. ii) Zu einer beliebigen natürlichen Zahl n existiert in einem beliebig festgelegten, algebraisch-abgeschlossenen Körper über \bar{k} genau eine Erweiterung vom Grade n über \bar{k} . Nachher hat Ref. bewiesen, daß man umgekehrt aus der Gültigkeit des Isomorphie- und Abgrenzungssatzes in der Klassenkörpertheorie die obigen Axiome herleiten kann. Verf. zeigt, daß zum Beweis dafür die beiden folgenden, schwächeren Voraussetzungen schon genügen: A. Zu jeder Potenz p^m einer beliebigen Primzahl p existiert stets eine zyklische Erweiterung über k , deren Normklassengruppe in k eine Klasse von der Ordnung p^m enthält. B. Ist k' eine endliche Erweiterung über k und K eine unverzweigte, zyklische Erweiterung vom Primzahlgrad p über k' oder eine abelsche Erweiterung mit der Galoisgruppe vom Typus (p, p) über k , so ist die Normklassengruppe von K/k' mit der Galoisgruppe von K/k' isomorph. Ferner soll dies für alle Primzahlen gelten. M. Moriya.

Whaples, G.: Existence of generalized local class fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1100—1103 (1953).

Es sei k ein bzgl. einer nichtarchimedischen diskreten Bewertung vom Rang 1 perfekter Körper, v der zugehörige Bewertungsring und π ein Primelement aus v ; der Restklassenkörper $\bar{k} = k \bmod \pi$ besitze keine inseparablen Er-

eiterungen und zu jeder natürlichen Zahl n gebe es genau eine algebraische Erweiterung vom Grade n von k . Eine Untergruppe h der Multiplikativgruppe k^* von k heiße analytisch, wenn sie einen Führer besitzt und wenn zu jeder natürlichen Zahl i ein $u_i(x) \in \mathfrak{o}[x]$ existiert, so daß $\bar{u}_i(x) \in \bar{k}[x]$ [Koeffizienten von $(x) \bmod x$ betrachtet] von positivem Grad und $1 - u_i(\xi)\pi^i \in h$ für jedes $\xi \in \mathfrak{o}$ ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt folgender Existenzsatz für lokale Klassenkörper: Eine Untergruppe h von k^* ist d. u. n. d. Normgruppe einer endlichen abelschen Erweiterung K von k , wenn sie analytisch und in k^* von endlichem Index ist (vgl. auch O. F. G. Schilling, dies. Zbl. 37, 307). Verf. benutzt beim Beweis an anderer Stelle erklärte Hilfsmittel [vgl. z. B. G. Whaples, Duke Math. J. 21, 35—65 (1954)].

E. Lamprecht.

Takahashi, Shuichi: Homology groups in class field theory. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 8—11 (1953).

Tate (this Zbl. 41, 37) proved that the Galois r -cohomology group $H^r(G, A)$ on an abelian class group (or multiplicative group of p -adic number field) A is isomorphic to the $(r-2)$ -cohomology group $H^{r-2}(G, Z)$ on the module Z of integers ($r \geq 2$); the isomorphism is given canonically by cup-product multiplication of $H^{r-2}(G, Z)$ with the fundamental (or canonically 2-cohomology class ζ (Weil, this Zbl. 44, 29; Reviewer, this Zbl. 46, 38). He stated also that negative-dimensional cohomology groups may be introduced so as the result is valid for any dimension $r \geq 0$. Indeed, as has been observed by Tate himself and Eilenberg, the negative dimensional cohomology group $H^{-r}(G, A)$ is nothing but the homology group $H_{r-1}(G, A)$ ($r \geq 1$). The present author gives independently this relation. Thus he defines $H^{-r}(G, A)$ as $H_{r-1}(A, G)$ and establishes Tate's relation $H^r(G, A) \simeq H^{r-2}(G, Z)$ ($r \geq 0$) by means of cup- and cap-products with ζ . The relation $H_r(G, A) \cong H^{r+1}(G, A)$ is observed as a consequence of $H_1(G, Z) \cong H^{2+1}(G, Z)$. It is shown further that the canonical isomorphism $H^{-2}(G, Z) \cong H^{-1}(G, A)$ gives a theorem of Kuniyoshi (this Zbl. 41, 366) as well as Tanaka's (this Zbl. 44, 267) „Hauptgeschlechtssatz im Minimalen“. T. Nakayama.

Tamagawa, Tsuneo: On the theory of ramification groups and conductors. Japanese J. Math. 21, 197—215 (1951).

Verf. ergänzt die A. Weilsche Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie und der Artinschen L -Funktionen (dies. Zbl. 44, 29) durch eine entsprechende Verallgemeinerung der Hilbertschen Verzweigungstheorie und der Artinschen Führer. Wesentliche arithmetische Hilfsmittel sind der Herbrandsche Verzweigungssatz (dies. Zbl. 3, 147) und die Hasse'sche Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper (dies. Zbl. 9, 49). Es sei K/k eine endliche galoissche Erweiterung des p -adischen Körpers k mit der Gruppe g und den Verzweigungsgruppen $g^{(i)}$ (volle Zahlungen), ferner $\mathbb{F} \ni \mathfrak{p}$ in K . Die kanonische Gruppenerweiterung $\Gamma_{K,k}$ von K mit g kann mit einer Untergruppe der Galoisgruppe der maximal-abelschen Erweiterung A_K von K über k identifiziert werden. Verf. definiert nun eine abzählbare Kette $\{\Gamma_v\}$ ($v = 0, 1, \dots$) von Untergruppen Γ_v von $\Gamma_{K,k}$, die „Verzweigungsgruppen von A_K “, die jeweils Gruppenerweiterungen der v -ten Einheitengruppe Γ_v von K (d. h. der Gesamtheit der Zahlen $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^v$) zur Faktorgruppe $g^{(v)}$ sind. Diese Γ_v haben Eigenschaften, die den Eigenschaften (A) — (C) der $\Gamma_{K,k}$ aus der A. Weilschen Arbeit entsprechen und die die genannten Sätze von Herbrand und Hasse enthalten. Seien nun k ein algebraischer Zahlkörper, K/k endlich galoissch mit g , $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ Primdivisoren von K bzw. k , ferner $H_2(\mathbb{F}) \cong \Gamma_{K,k}$ eine Zerlegungsgruppe von \mathbb{F} in der kanonischen Gruppenerweiterung $G_{K,k}$ der Idealklassengruppe C_K von K im Sinne von A. Weil. Den lokalen Verzweigungsgruppen von $A_{K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}}$ entspricht dann in $H_2(\mathbb{F})$ eine „Verzweigungsgruppenkette“ $\{H_v(\mathbb{F})\}$ ($v = 0, 1, \dots$) für \mathbb{F} . Ist χ ein algebraischer Charakter von $G_{K,k}$, $d\mu$ das Haarsche Maß auf der kompakten Gruppe $H_1(\mathbb{F}) = H_0(\mathbb{F})$ mit $\int d\mu = 1$, so definiert Verf. den Führer $\mathfrak{f}(\chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ endl.}} \mathfrak{p}^{e(\mathfrak{p}, \chi, K/k)}$ zu χ durch

$$e(\mathfrak{p}, \chi, K/k) = \int_{H_1(\mathbb{F})} (\chi(1) - \chi(s)) d\mu + \sum_{v=1}^{\infty} N \mathfrak{p}^{v-1} (N \mathfrak{p} - 1) \int_{H_v(\mathbb{F})} (\chi(1) - \chi(s)) d\mu.$$

Die $e(\mathfrak{p}, \chi, K/k)$ sind $\neq 0$ nur für endlich viele \mathfrak{p} und erweisen sich als ganzrational. Für Charaktere χ von $G_{K,k}/C_K \cong g$ bzw. für $K = k$, χ irreduzibel gehen die $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ in die Artinschen Führer bzw. in die Führer Heckscher Größencharaktere von C_K über. Die Führer $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ haben die analogen gruppentheoretischen Eigenschaften wie die Artinschen Führer.

H. Hasse — W. Juhnke.

Tamagawa, Tsuneo: On the functional equation of the generalized L -function. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 6, 421—428 (1953).

Verf. stellt die Funktionalgleichung der A. Weilschen \mathfrak{L} -Funktionen $L(s, \chi; K/k)$ (dies. Zbl. 44, 29) auf und bestimmt die dabei auftretenden Γ -Faktoren. Dazu werden Zerlegungsgruppen in $G_{K,k}$ (s. vorsteh. Referat) für die unendlichen Primstellen von k definiert und mit deren Hilfe einem algebraischen Charakter χ von $G_{K,k}$ ein „ Γ -Faktor“ $\Gamma(s, \chi; K/k)$ zugeordnet, der 1. für $K = k$ und Größencharaktere χ in den Γ -Faktor der Heckschen \mathfrak{L} -Funktionen übergeht und 2. die entsprechenden gruppentheoretischen Eigenschaften wie die Weilschen \mathfrak{L} -Funktionen hat. Nach dem Satz über induzierte Charaktere (A. Weil, dies. Zbl. 44, 29) folgt dann aus der Heckschen Funktionalgleichung eine analoge Funktionalgleichung $\xi(s, \chi; K/k) = W(\chi) \xi(1-s, \chi; K/k)$ für die Funktion

$$\xi(s, \chi, K/k) = [\Delta/\pi^n]^{s/2} N(\mathfrak{f}(\chi; K/k))^{s/2} \Gamma(s, \chi, K/k) L(s, \chi, K/k),$$

wobei Δ den Betrag der Diskriminante, n den Absolutgrad von k und $\mathfrak{f}(\chi; K/k)$ den Führer (s. vorsteh. Referat) bedeutet.

H. Hasse — W. Jehne.

Jaffard, Paul: Extensions algébriques infinies de PF -corps. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 70, 181—198 (1953).

Ein endlich-algebraischer Zahlkörper (ein Zahlkörper endlichen Grades über dem rationalen Zahlkörper) oder ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten mit beliebigem Körper als Konstantenkörper ist von Artin und Whaples durch zwei einfache Axiome charakterisiert worden [Artin and Whaples, Bull. Amer. math. Soc. 51, 469—492 (1945)]; ein derartiger Körper wird nach Artin PF -Körper genannt. Verf. betrachtet über einem PF -Körper endliche oder unendliche algebraische Erweiterungen und charakterisiert sie durch gewisse Axiome. φ sei eine nicht-triviale, nicht-negativwertige Bewertung eines kommutativen Körpers Ω mit $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ und mit $\varphi(x+y) \leq \max(\varphi(x), \varphi(y))$ ($x, y \in \Omega$). Dann setze man $v(x) = -\log \varphi(x)$ für $x \neq 0$; v heiße eine additive Bewertung von Ω . Je nachdem φ archimedisch oder nicht-archimedisch ist, heißt v auch archimedisch oder nicht-archimedisch. Axiom 1: Es existiert ein lokalkompakter topologischer Raum M_Ω , dessen Elemente nicht-triviale, einander nicht-äquivalente additive Bewertungen von Ω sind; auf M_Ω ist ein positives Radonsches Maß μ mit M_Ω als Träger (support) definiert. Für ein beliebiges Element $x \neq 0$ aus Ω soll \tilde{x} , definiert durch $\tilde{x}(v) = v(x)$ ($v \in M_\Omega$), eine in M_Ω stetige Funktion mit kompaktem Träger und mit $\mu(\tilde{x}) = 0$ sein. Aus Axiom 1 folgt folgendes: Enthält M_Ω keine archimedische Bewertung, so bildet die Gesamtheit k_0 aller Elemente, die in bezug auf eine beliebige Bewertung aus M_Ω nicht-negativen Wert besitzen, einen in Ω algebraisch abgeschlossenen Unterkörper von Ω ; k_0 heißt der Konstantenkörper von Ω . Im folgenden bezeichnet R stets den rationalen Zahlkörper, falls M_Ω eine archimedische Bewertung enthält; sonst bezeichnet R den rationalen Funktionenkörper $k_0(t)$, wo t ein beliebig festgelegtes, über k_0 transzendentes Element aus Ω bedeutet. Verf. stellt ferner die beiden folgenden Axiome auf. Axiom 2: Ist ein Unterkörper K von Ω einfache Erweiterung von R , so existiert eine Bewertung aus M_Ω , welche in K eine reguläre Bewertung induziert. Dabei heißt eine additive Bewertung v_K von K regulär („reasonable“ nach Artin), wenn v_K entweder archimedisch ist oder nicht-archimedisch diskret ist derart, daß der Restklassenkörper von K in bezug auf v_K endlicher Körper oder über k_0 endlich algebraisch ist. Axiom 3: Für einen solchen beliebigen Unterkörper K von Ω , daß K über R einfach ist, ist $K(v)$ ($v \in M_\Omega$) eine offene Menge aus M_Ω , wo $K(v)$ die Gesamtheit aller Bewertungen aus M_Ω , welche mit v zusammen in K ein und dieselbe Bewertung induzieren. Verf. beweist zunächst, daß eine beliebige (endliche oder unendliche) algebraische Erweiterung eines PF -Körpers stets den drei obigen Axiomen genügt. Sind umgekehrt die Axiome 1, 2 und 3 erfüllt, so ist Ω eine algebraische Erweiterung eines PF -Körpers k . Ist dabei k ein Funktionenkörper, so ist k_0 der Konstantenkörper von k ; die k_0 trivial bewerten. Ist aber k ein endlich-algebraischer Zahlkörper, so ist jede additive Bewertung von Ω mit einer aus M_Ω äquivalent. M_Ω ist ein Umgebungsraum von der Art, daß für jedes v aus M_Ω die Gesamtheit aller $K(v)$ ein volles Umgebungssystem von v bildet, wo K alle Unterkörper von Ω endlichen Grades über R durchläuft.

M. Moriya.

Zahlentheorie:

Moessner, Alfred: Drei diophantische Probleme. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 191—193 (1953).

Gloden, A.: Une méthode de résolution de l'équation diophantienne $2x^2 + 1 = ay^2$, ($a = 2b^2 + 1$). Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 22, 195—196 (1953).

Gloden, A.: Un procédé de formation de systèmes multigrades normaux. *ull. Soc. Roy. Sci. Liège* **22**, 474—480 (1953).

Die Gleichungen $\sum_i A_i^k = \sum_i B_i^k$ heißen ein mehrgradiges System von der Ordnung n , wenn sie für $k = 1, 2, \dots, n$ bestehen. Das System heißt normal, wenn die Anzahl der A_i und B_i nicht mehr als je $n + 1$ beträgt. Das Symbol $\left(\begin{smallmatrix} a & b & \dots \\ a' & b' & \dots \end{smallmatrix} \right)$ soll angeben, daß die A_i in arithmetische Progressionen mit a bzw. b usw. Elementen und die B_i in solche mit a' bzw. b' usw. Elementen zerfallen. Verf. geht von normalen Systemen der Ordnung 3 aus, die die Form $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ haben, und leitet hieraus normale Systeme der Ordnung 4 ab, die noch mehrere Parameter enthalten. W. Schulz.

Buquet, A.: Sur un critère d'indépendance de plusieurs solutions données de l'équation diophantienne en nombres rationnels $x^3 + dx + e = z^2$. *Mathesis* **62**, 31—289 (1953).

The author continues his study of geometric properties of rational solutions of the diophantine equation (1) $x^3 + dx + e = z^2$ (this Zbl. **48**, 29). By means of a quite complicated classification of systems of points on (1) he develops an algorithm for solving the question mentioned in the title. The procedure is elementary. W. Ljunggren.

Bini, Umberto: La risoluzione delle equazioni $x^n + y^n = M$ e l'ultimo teorema di Fermat. *Archimede* **5**, 49—53 (1953).

Verf. setzt seine Untersuchungen über die Titelgleichung (vgl. Zbl. **46**, 10) fort. E. Hlawka.

Carlitz, L.: Permutations in a finite field. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 538 (1953).

A polynomial $f(x)$ with coefficients in the Galois-field $GF(q)$ ($q = p^n$) is called permutation polynomial if the numbers $f(x)$, where $x \in GF(q)$, are a permutation of the x 's. The author proves the theorem that all permutation polynomials are generated by the special polynomials $x + \beta$, x^{q-2} ($x, \beta \in GF(q)$; $\alpha \neq 0$). Only the special cases $q = 5, 7$ of this theorem had been known before. T. Szecle.

Carlitz, L.: Some special equations in a finite field. *Pacific J. Math.* **3**, 13—24 (1953).

Let $GF[p^n, x]$ denote the set of all polynomials in an indeterminate x with coefficients in the Galois-field $GF(p^n)$. The author investigates the number of solutions in $GF(p^n)$ of equations of the type $f_1(\xi_1) \cdots f_r(\xi_r) = \alpha$ with given elements $f_i(x) \in GF[p^n, x]$ ($i = 1, \dots, r$), $\alpha \in GF(p^n)$, and he obtains some asymptotic formulas for this number. He also determines exactly the number of solutions in $GF(p^n)$ as well as in elements of degree $\leq m$ of $GF[p^n, x]$ of some equations $Q(\xi_1, \dots, \xi_r) = f(\xi_1, \dots, \xi_r)$ where Q is a quadratic form and f is a polynomial both with coefficients in $GF(p^n)$. T. Szecle.

Carlitz, L.: The Schur derivative of a polynomial. *Proc. Glasgow math. Assoc.* **1**, 159—163 (1953).

Suppose $f(x)$ is a polynomial in an arbitrary number of indeterminates with rational integer (mod p) coefficients. Let $f_m = f^{p^m}(x)$ and $f_m = f^{p^m}(x)$. The Schur derivatives $f_m^{(r)}(r = 1, m \geq 0)$ of $f(x)$ are defined by $f_m^{(r)} = (f_{m+1} - f_m)/p^{m+1}$. $f_m^{(r+1)} = (f_m^{(r)} f_{m+1} - f_m^{(r+1)} f_m)/p^{m+1}$. If $f(x) = a$, $f_m^{(r)}$ reduces to $a^{p^m - p^{m-r}}$. It is times the r -th Schur derivative of the sequence $\{a^{p^m}\}$ (cf. this Zbl. **50**, 38). It is proved that $f_m^{(r)}$ has integral coefficients (mod p) for $m \geq 0$ and $1 \leq r \leq p - 1$; and for all $r \geq 1$ if $f^{(p)}(x) = f(x^p)$ (mod p^2). More precisely for $h = 0, m = 0, 1, \dots, r \leq p$ we have

$$(f^{(h)})_m^{(r)} \equiv \frac{h^r}{r!} (f'_m)^r (\bar{f}_m)^{h e_r - r} \left[\prod_{i=1}^r (p^i - 1) \right] (p - 1)^{-r} \pmod{p^n};$$

if $r < p - 1$ this holds mod p^{m+1} . Here $e_r = (p^r - 1)/(p - 1)$. Finally a generalization of these derivatives is considered valid for any commutative ring that contains the rational integers. Similar results are derived, whereby special attention is paid to the Gaussian integers. W. Verdenius.

Carlitz, L.: A special congruence. Proc. Amer. math. Soc. 4, 933—936 (1953).

Sei p eine Primzahl > 3 , $m = p^r m_0$, $r \geq 0$, $m_0 > 0$, ganz, $w_p = [(p - 1)! + 1]/p$, $\delta_m = 1$ für $(p - 1) | (m - 1)$, sonst $\delta_m = 0$. Verf. zeigt

$$p^{-r-1} \left\{ p + (p-1) \sum_{0 < s(p-1) < m} \binom{m}{s(p-1)} \right\} \equiv m_0 \left\{ \frac{1}{2} - \sum_{\substack{0 < 2s < m, \\ p-1 \nmid 2s}} \binom{m-1}{2s-1} \frac{B_{2s}}{2s} + \delta_m \frac{w_p}{p-1} \right\} \pmod{p}$$

wobei B_m die Bernoullischen Zahlen sind.

K. Prachar.

Carlitz, Leonard: A theorem of Glaisher. Canadian J. Math. 5, 306—316 (1953).

Sei p prim., $p > 3$, B_m die m -te Bernoullische Zahl und $(x - 1)(x - 2) \cdots (x - p + 1) = x^{p-1} - A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1}$. Glaisher zeigte $(p^{-1}) A^{2r} \equiv -(2r)^{-1} B_{2r}$, $(p^{-2}) A_{2r+1} \equiv [(2r + 1)/4r] B_{2r} \pmod{p}$. Verf. zeigt genauer u. a. Für $1 < r < \frac{p-1}{2}$ gilt $2r A_{2r+1} \equiv -\frac{p^2(p-2r-1)}{2} B_{2r} - \frac{(2r-1)p^3}{4} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{B_{2i} B_{2r-2i}}{i} \pmod{p^4}$. Verschiedene spezielle Kongruenzen werden gezeigt, z. B.

$$(-1)^m \binom{2m}{m} \equiv 2^{2m} \left(1 + \frac{1}{12} p^3 B_{p-3} \right) \pmod{p^4}, \quad \frac{(np)!}{n! (p!)^n} \equiv 1 - \frac{1}{9} (n^3 - n) p^3 B_{p-3} \pmod{p^4}$$

Weiter werden noch eine weitgehende Verallgemeinerung des Resultates von Glaisher hergeleitet und einige Kongruenzen über die sog. verallgemeinerten Eulerschen Zahlen bewiesen.

K. Prachar.

Carlitz, L.: Distribution of primitive roots in a finite field. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 4—10 (1953).

The author proves several generalizations of Davenport's theorem that if the prime p is sufficiently large and θ is a generating element of the Galois field $GF(p^n)$, then there exists an integer a such that $\theta + a$ is a primitive root of the field considered (this Zbl. 18, 109). He makes use of a lemma of Davenport on character sums and of a modification of a method due to Vinogradov. We mention the following results of the paper. The number of numbers in $GF(p^n)$ belonging to the exponent e is $\Phi(e) p/(p^n - 1) + O(p^{1-(n+1)/2+\epsilon})$ ($p \rightarrow \infty$). If $N_r(e)$ denotes the number of numbers of the form $\theta^r - a_1 \theta^{r-1} - \cdots - a_r$ ($a_i \in GF(p)$) belonging to the exponent e , then $N_r(e) = \Phi(e) p^r/(p^n - 1) + O(p^{r/2+\epsilon})$ ($p \rightarrow \infty$). It is also shown that for fixed p^n , r there exist infinitely many irreducible polynomials P in $GF[p^n, x]$ such that $A(p^{nm-1}) \equiv 1 \pmod{P}$ with $m = \deg P$ holds for all polynomials $A \neq 0$ of degree $< r$. In particular no such A is a primitive root mod P . T. Szele.

Carlitz, L.: Some hypergeometric congruences. Portugaliae Math. 12, 119—128 (1953).

Es werden zahlreiche Kongruenzen bewiesen, für die die folgende typisch ist: $\sum_{r=0}^m (4r + 1) \binom{m}{r} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} \equiv -2 \binom{2m}{m}^2 \pmod{p}$, $p = 4m + 3$, prim. Zum Beweis dieser Kongruenzen werden verschiedene Beziehungen zwischen verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen verwendet, z. B. für die obige Formel die Relation

$${}_5F_4 \left[\begin{matrix} a & 1+a/2 & c & d & -m \\ & a/2 & 1+a-c & 1+a-d & 1+a+m \end{matrix} \right] = \frac{(1-a)_m (1+a-c-d)_m}{(1+a-c)_m (1+a-d)_m}$$

mit $a = c = d = 1/2$.

K. Prachar.

Carlitz, Leonard: Weighted quadratic partitions over a finite field. Canadian J. Math. 5, 317—323 (1953).

Es sei $k = GF(q)$ der endliche Körper mit $q = p^n$ Elementen (p prim. > 2 ; n ganz > 1). Für $\alpha \in k$ werde $e(\alpha) = \exp[2\pi i t(\alpha)/p]$ gesetzt, wo $t(\alpha)$ die Spur von α in k ist. Verf. berechnet die Summe $S = S(\alpha, \lambda, Q) = \sum e(2\lambda_1 \xi_1 + \cdots + 2\lambda_s \xi_s)$, wo über sämtliche Lösungen (ξ) von $Q(\xi) = \alpha$ in k summiert wird.

Hier ist $Q(u) = \sum_{i,j=1}^s \alpha_{ij} u_i u_j$ eine quadratische Form mit Koeffizienten in k und nichtverschwindender Diskriminante δ , und α, λ_i sind gegebene Elemente von k . Falls Q' die zu Q inverse quadratische Form ist und falls $\alpha \neq 0, \omega = Q'(\lambda) \neq 0$ und $s = 2t$ gerade ist, so gilt $S = q^{s-1} l + q^{t-1} \psi((-1)^t \delta) K(\alpha, \omega)$. Dabei ist $t = 1$ oder 0 , je nachdem alle oder nicht alle λ_i verschwinden, $\psi(\beta) = +1$ oder -1 , je nachdem β ein Quadrat oder ein Nichtquadrat in k ist und $K(\alpha, \omega) = \sum \epsilon(\alpha \beta + \omega \beta^{-1})$, wo über sämtliche nichtverschwindende Elemente $\beta \in k$ summiert wird. Die Summe $K(\alpha, \omega)$ tritt nicht auf, falls s ungerade oder $\alpha \omega = 0$ ist. Verf. bemerkt, daß $S(\alpha, \lambda, Q) = S(\alpha, \lambda', Q')$, falls $\lambda_i = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \lambda'_j$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Er betrachtet schließlich noch einige weitere mit S verwandte Summen.

H. D. Kloosterman.

Carlitz, L.: A reciprocity formula for weighted quadratic partitions. Math. Scandinav. 1, 286—288 (1953).

Es sei $GF(q)$ der endliche Körper mit $q = p^n$ Elementen (p prim $> 2, n$ ganz ≥ 1). Es werde $\epsilon(x) = \exp \{2\pi i t(x)/p\}$ gesetzt, wo $t(x)$ die Spur von $x \in GF(q)$ ist, und weiter sei $S(\alpha, \lambda, Q) = \sum \epsilon(2\lambda_1 \xi_1 + \dots + 2\lambda_r \xi_r)$, wo $Q = Q(u)$ eine quadratische Form $\sum \alpha_{ij} u_i u_j$ mit Koeffizienten in $GF(q)$ und nichtverschwindender Determinante ist und die Summation über sämtliche Lösungen $\{\xi\}$ von $Q(\xi) = \alpha$ erstreckt wird (α und die λ_i sind gegebene Elemente von $GF(q)$). Verf. bemerkt, daß $S(\alpha, \lambda, Q) = S(\alpha, \lambda', Q')$, wo Q' die zu Q inverse quadratische Form ist und $\lambda_j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} \lambda'_i$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Er gibt überdies noch eine Verallgemeinerung dieser Formel.

H. D. Kloosterman.

Carlitz, Leonard: Weighted quadratic partitions (mod p^r). Math. Z. 59, 40—46 (1953).

Verf. berechnet die Summe $S = \sum \exp \{2\pi i (2\lambda_1 x_1 + \dots + 2\lambda_t x_t)/p^r\}$, wo die x_1, \dots, x_t sämtliche Lösungen der Kongruenz $a_1 x_1^2 + \dots + a_t x_t^2 \equiv c \pmod{p^r}$ durchlaufen. Hier ist p eine ungerade Primzahl, r ganz ≥ 1 , und die λ_i, a_i und c sind vorgegebene ganze Zahlen. Er macht dabei die Voraussetzung, daß die a_i alle $\equiv 0 \pmod{p}$ sind.

H. D. Kloosterman.

Ostrom, T. G.: Concerning difference sets. Canadian J. Math. 5, 421—424 (1953).

The paper deals with simple difference sets only. A set of integers $\{a_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) is a simple difference set modulo N if the set of differences $\{a_i - a_j\}$ contains each non-zero residue mod N exactly once. Hence N and n are connected by the relation $N = n^2 + n + 1$. If $\{a_i\}$ is a simple difference set mod N , so is the set $\{a_j + s\}$ ($s = 1, 2, \dots, N$). Hall (this Zbl. 29, 225) has defined a „multiplier“ as any number q such that the set $\{qa_i\}$ is the same as the set $\{a_j + s\}$ for some s . The author shows that if N contains a prime factor N_1 such that every multiplier mod N belongs to the same exponent mod N_1 as it does mod N_1 , then the multipliers form a cyclic multiplicative group. He makes use of this theorem to obtain extensions of some theorems of Mann and Evans (this Zbl. 45, 17).

S. Selberg.

Lehmer, Emma: On residue difference sets. Canadian J. Math. 5, 425—432 (1953).

The paper deals with n th power residues difference set of multiplicity λ with respect to a prime p . S. Chowla [Proc. nat. Acad. Sci. India, Sect. A, 14, 45—46 (1944)] proved that biquadratic residues modulo p form a difference set if $(p-1)/4$ is an odd square. The author proves a similar result for octic residues, namely: The set of octic residues modulo p forms a difference set if and only

if the number of terms $k = (p-1)/8$ and the multiplicity $\lambda = (p-9)/64$ are both odd squares. She also proves that a perfect residue difference set (a res. dif. set is called perfect or simple if $\lambda = 1$) contains all the powers of 2 modulo p .

S. Selberg.

Eda, Yoshikazu: On Selberg's function. *Proc. Japan. Acad.* 29, 418—422 (1953).

The author gives a new proof for A. Selberg's formula:

$$\frac{x}{k} V(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv \lambda(k)}} \log^2 p + \sum_{\substack{pq \leq x \\ pq \equiv \lambda(k)}} \log p \log q + O(x)$$

where

$$V(x) = \sum_{\substack{d \leq x \\ (d, k) = 1}} \frac{\mu(d)}{d} \log^2 \frac{x}{d} = \frac{2}{\varphi(k)} x \log x + O(x).$$

The method is based upon A. Selberg's original papers (this Zbl. 36, 306), H. N. Shapiro's paper (this Zbl. 38, 183) and a recent paper by the author [Sci. Rep. Kanazawa Univ. 2, 7—13 (1953)]. In the description of the calculations and results the umbral calculus introduced by Blissard is used. It seems the Reviewer hard to understand that this should be of any advantageousness in the present case.

S. Selberg.

Čudakov, N. G.: Über eine Klasse vollständig multiplikativer Funktionen. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 3 (55), 149—150 (1953) [Russisch].

Verf. untersucht für natürliche Zahlen als Argument definierte allgemeine multiplikative Funktionen, welche ähnliche Eigenschaften haben wie die durch eine endliche Abelsche Gruppe bestimmten Charaktere, und gibt ein Beispiel für solche „verallgemeinerte Charaktere“.

H. Brandt.

Koteljanskij, D. M.: Über die Methode von N. P. Romanov zur Gewinnung von Identitäten für zahlentheoretische Funktionen. *Ukrain. mat. Žurn.* 5, 453—458 (1953) [Russisch].

Nach einer Methode von Romanoff (dies. Zbl. 44, 40) wird jedem Orthonormalsystem eines Hilbertschen Raumes in gewisser Weise (siehe a. a. O.) ein anderes Orthonormalsystem zugeordnet. Durch Vergleich der Parsevalschen Gleichungen in beiden Systemen erhält man verschiedene Identitäten zwischen zahlentheoretischen Funktionen. Hier werden einige solche speziellen Identitäten aufgestellt, von denen wir nur die folgende anführen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) A(n) 2^r}{\varphi_s(n)} = 2 \frac{\zeta'(s) \zeta(2s) - \zeta(s) \zeta'(2s)}{\zeta(s) \zeta(2s)};$$

für $n = p_1^{x_1} \dots p_r^{x_r}$ ist hierbei $\lambda(n) = (-1)^{x_1 + \dots + x_r}$, $A(n) = \sum_{p^m = n} \log p$, $\varphi_s(n) = n^s \prod_{i=1}^r (1 - 1/p_i^s)$; $\text{Re } s > 1$.

K. Prachar.

Klimov, A. I.: Eine verbesserte Abschätzung der Grenze der Nullstellen von *L*-Funktionen. *Ukrain. mat. Žurn.* 5, 171—184 (1953) [Russisch].

A condensed version of this paper was reviewed earlier (this Zbl. 51, 33). Here the proofs are given in more detail.

P. T. Bateman.

Nečaev, V. I.: Über die Darstellung der natürlichen Zahlen als Summen von Summanden der Form $x(x+1) \dots (x+n-1)/n!$. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 17, 485—498 (1953) [Russisch].

For $n \geq 12$ put $\varphi_n(x) = x(x+1) \dots (x+n-1)$. Denote by $g(\varphi_n)$ the smallest r such that $n!N$, for every positive integer N , can be written as a sum $\varphi_n(x_1) + \dots + \varphi_n(x_r)$ with integral x_1, \dots, x_r . The author had previously proved [Trudy mat. Inst. Steklov. 38, 190—243 (1951)] that $g(\varphi_n) < \frac{1}{2} n^2 \log n + 6n \log n$. He now obtains the much improved estimate (1) $g(\varphi_n) < 6n \log n + 9n \log \log n$. The new proof uses the inequality of A. Weil (this Zbl. 32, 261; 36, 160),

$|S_{1,p}| < n\sqrt{p}$. Here $S_{a,q} = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i(a/q)f(x)}$; $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ is a polynomial with integral coefficients; q is a positive integer, which may become a prime p , such that $(a_1, \dots, a_n, q) = 1$, and a is an integer with $(a, q) = 1$. From (1), the author derives the inequalities

$$|S_{a,q}| \leq e^{2\pi n} q^{1-1/n} \text{ for general } f(x); |S_{a,q}| \leq e^{2\pi n} q^{1-1/n} \text{ if } f(x) = q_n(x).$$

This result, and a general upper bound for $g(q_n)$ given in the earlier paper, lead to the assertion.

K. Mahler.

Mardzanisvili, K. K.: Über gewisse nicht-lineare Systeme von Gleichungen in ganzen Zahlen. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 639—675 (1953) [Russisch].

Let l, m, \dots, n be g positive integers satisfying $0 < l < m < \dots < n$. The aim of the paper is to study the system of diophantine equations

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k = N_k, \quad k = l, m, \dots, n.$$

The paper is divided into two parts: analytical and arithmetical. In the first part the author proves:

Let $n \geq 12$, $r = [2n \log 10 n g + n \log \log 20 n g] + 1$, $f > 3n g$. If there exists a positive ε , such that the system of equations $\xi_1^k + \dots + \xi_f^k = N_k (N_n)^{-k/n}$, $k = l, m, \dots, n$ has a real solution $\xi_s \geq \varepsilon > 0$ ($s = 1, 2, \dots, f$) satisfying

$$|\mathcal{A}| \geq \varepsilon, \text{ where } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \xi_1^{l-1} & \dots & \xi_f^{l-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_f^{n-1} \end{pmatrix},$$
 then for $s = f + 2gr$, the number

$N(N_l, \dots, N_n)$ of solutions of (1) is $> C(l, \dots, n; f, g, \varepsilon) N_n^{f/n + 2g(1 - (1-1/n)^r) - (l + \dots + n)/n}$.

$\mathcal{E}(N_l, \dots, N_n; s) = O(N_n^{f/n + 2g(1 - (1-1/n)^r) - (l + \dots + n)/n})$, where C and ε are positive numbers and $\mathcal{E}(N_l, \dots, N_n; s)$ is the singular series. In the second part, he studies the positiveness of singular series and gives a sufficient condition for the solubility of (1). — Note that, in case $g = 1$, the problem reduces to the well-known Waring's problem and in case $g = n$, we may compare his result with the result of the reviewer (this Zbl. 41, 369, or revised, Chinese edition published by Inst. of Math., Academia Sinica).

L. K. Hua.

Richert, Hans-Egon: Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression. J. reine angew. Math. 192, 180—203 (1953).

Es seien r, k und l natürliche Zahlen, $(k, l) = 1$ und $\pi_r(x; k, l)$ die Anzahl aller quadratfreien Zahlen $\leq x$ in der arithmetischen Progression $\{nk + l\}$, $n = 1, 2, \dots$, welche genau r Primfaktoren haben. Verf. zeigt, daß für $x \geq 2$ und jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in k gilt:

$$\pi_r(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{0 \leq m \leq c^{-1}\sqrt{\log x}} \sum_{0 \leq h \leq r-1} A_r(h, m, k) L_{h, m+1}(x) + O(x e^{-c^{-1}\sqrt{\log x}}) + O\left(x^{1-1/bk^2} \frac{\log^{r-1} k}{\varphi(k) \log x} (\log \log x)^{r-1}\right).$$

Hier sind c eine absolute, b eine nur von ε abhängige Konstante. $L_{h, n}(x) = \int_2^x \frac{(\log \log u)^h}{\log^n u} du$

und die $A_r(h, m, k)$ sind durch eine sehr komplizierte Formel gegeben. Für $r = 1$ geht die obenstehende Formel in den Primzahlssatz von Page-Siegel-Walfisz über. — Es sei $\gamma(n)$ die Lösungsanzahl von der Gleichung $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n$ in Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4 mit $p_3 \leq p_4$. Estermann (dies. Zbl. 16, 290) hat bewiesen, daß $\gamma(n) > n^2 c \log^3 n \log \log n$ für $n = 1(2)$ und $n \geq N_0$. Verf. verschärft dies unter Anwendung der Vinogradovschen Methode, indem er die obenstehende Formel für $\pi_r(x; k, l)$ mit $r = 1$ und $r = 2$ benutzt, um die Approximationen auf den major arcs mit der notwendigen Genauigkeit durchzuführen, bis

$$\gamma(n) = (n^2/2 \log^3 n) \{(\log \log n + B) \mathcal{E}(n) + \mathcal{E}_1(n)\} + O[(n^2 \log \log n)/\log^4 n].$$

Hier bezeichnet B die sog. Mertenssche Konstante und

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) &= \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid n} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right), \\ \mathcal{E}_1(n) &= \sum_{p|n} \frac{1}{(p-1)^2} \prod_{\substack{p_0|n \\ p_0 \neq p}} \left(1 - \frac{1}{(p_0-1)^2}\right) \prod_{\substack{p_0 \nmid n \\ p_0 \neq p}} \left(1 + \frac{1}{(p_0-1)^3}\right) \\ &\quad - \sum_{p \nmid n} \frac{1}{(p-1)^3} \prod_{p_0|n} \left(1 - \frac{1}{(p_0-1)^2}\right) \prod_{\substack{p_0 \nmid n \\ p_0 \neq p}} \left(1 + \frac{1}{(p_0-1)^3}\right). \end{aligned}$$

Für $n = 1(2)$ ist $\mathfrak{S}(n) \geq 6/\pi^2$, und für $n \equiv 0(2)$ sind $\mathfrak{S}(n) = 0$ und $\mathfrak{S}_1(n) \geq 6/\pi^2$, womit folgt, daß für jedes hinreichend große n die Lösungsanzahl $\gamma(n) > 0$ ist. *S. Selberg.*

Ricci, Giovanni: Sul coefficiente di Viggo Brun. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 7, 133—151 (1953).

Bezeichnet man mit $Z_\delta(\xi; 2a)$ für positives ganzes a und $0 < \delta \leq 1$ die Anzahl aller Primzahlen p_i mit den Eigenschaften (1) $(1 - \delta)\xi < p_i \leq \xi$ und (2) $p_i + 2a = p_j$ ist eine Primzahl $\leq \xi$, so gilt nach V. Brun die Abschätzung

$$(3) Z_\delta(\xi; 2a) < c \prod_{\substack{p|a \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\delta \xi}{\log^2 \xi}; \text{ von Hardy und Littlewood stammt die Ver-}$$

$$\text{mutung (4) } Z_\delta(\xi; 2a) \sim 2H \prod_{\substack{p|a \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\delta \xi}{\log^2 \xi} \text{ mit (5) } H = \prod_{p > 2} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} = 0,6601 \dots$$

Verf. gibt Abschätzungen für die untere Grenze \bar{B}_δ der Konstanten c in (3) und beweist u. a. (in Übereinstimmung mit der Vermutung (4)) (6) $\bar{B}_\delta \geq 2H$. Weitere Abschätzungen werden angegeben für (7) $B_\delta(\mu, \lambda) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} z_\delta(\xi; 2a) \leq \bar{B}_\delta(\mu, \lambda)$ (μ, λ reell, $0 \leq \mu < \lambda$, $\mu \log \xi < 2a \leq \lambda \log \xi$), wobei $z_\delta(\xi; 2a)$ eingeführt ist durch (8) $Z_\delta(\xi; 2a) = z_\delta(\xi; 2a) \cdot \prod_{\substack{p|a \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\delta \xi}{\log^2 \xi}$. So gilt z. B. (9) $B_\delta(0, \lambda) \geq 2(\lambda - 1)$.

$\lambda^{-2}H$ ($\lambda > 1$), und dieses Resultat wird weiter verschärft. — Die Beweise sind elementar; sie schließen an (3) und den Primzahlsatz an. *B. Hornfeck — H. Ostmann.*

Lursmanašvili, A. P.: Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 19, 79—120 (1953) [Russisch].

The author shows that the number of integer solutions of $j_1^2 + \dots + j_{2k}^2 \leq x$ for fixed $k \geq 4$ may be put in the form

$$A_{k,0} x^k + A_{k,1} x^{k-1} + \dots + A_{k,m} x^{k-m} + O(x^{k-m-1/2})$$

where m is any integer such that $2(m+1) \leq k$ and the $A_{k,i}$ are bounded functions of x which are given explicitly by certain infinite sums. More precisely, let $B_a(z)$ be defined by $\int_0^1 \bar{B}_a(z) dz = 0$.

$d\bar{B}_a(z)/dz = a \bar{B}_{a-1}(z)$ ($a > 1$), $\bar{B}_0(z) \equiv 1$ in the range $0 \leq z \leq 1$ (so that there $\bar{B}_a(z)$ is a Bernoulli polynomial) and elsewhere let $B_a(z)$ be defined to be periodic modulo 1. Put $\Theta(k, 0) = 0$, $\Theta(k, 1) = -1$, $\Theta(k, a) = (-1)^a (k-1)(k-2) \dots (k-a+1)/a!$ ($a > 1$), and write $\psi_a(z) = \Theta(k, a) \bar{B}_a(z)$. Let g, u run through all (strictly) positive even and odd numbers respectively and let l run through all integers. Then

$$F(k) \pi^{-k} (1 - 2^{-k})^{-1} \zeta(k) A_{k,a} = \sum_u u^{a-k} \psi_a(z/u) + \sum_g g^{a-k} \{ \psi_a(z/g) - 2^a \psi_a(z/2g) \}$$

if k is even and

$$F'(k) \pi^{-k} L(k) A_{k,a} = \sum_u \left(\frac{-1}{u} \right) u^{a-k} \psi_a(z/u) + (-1)^{k-1} 2^{2^{a-1}-a} \sum_l (2l)^{a-k} \{ \psi_a(z/l) - 2^{a-1} \psi_a(z/2l) \} - 2^{2^{a-1}} \psi_a((z-l)/4l),$$

if k is odd, where $\left(\frac{-1}{u} \right)$ is the sign of quadratic residuacity and $L(k)$ denotes the series $\sum \left(\frac{-1}{u} \right) u^{-k}$.

This work improves earlier estimates of Walfisz [same Trudy 10, 111—160 (1941); 15, 275—296 (1947); 16, 215—230 (1948); this Zbl. 39, 40; 40, 17] and is on similar lines. *J. W. S. Cassels.*

Linnik, Ju. V. und A. V. Malyšev: Über ganzzahlige Punkte auf der Sphäre. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 209—211 (1953) [Russisch].

Wenn die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = m$ überhaupt ganzzahlige Punkte mit teilerfremden Koordinaten auf der Oberfläche enthält, so verteilen sich die ganzzahligen Punkte so über die ganze Oberfläche, daß ein sphärischer Kreis von fester Größe auf der Kugel im Innern stets ganzzahlige Punkte enthält, sobald m entsprechend der obigen Bedingung genügend groß gewählt wird. Ihre Anzahl liegt über einer Schranke $c \cdot h(-m)$, wo die Konstante c von m nicht abhängt und $h(-m)$ die binäre Klassenzahl bedeutet. Ferner liegt in der Nachbarschaft eines ganzzahligen Punktes stets ein weiterer solcher Punkt, wobei der Winkel zwischen ihnen, von der Kugelmittle aus gesehen, mit wachsendem m beliebig klein wird.

H. Brandt.

Ap Simon, H. G.: The critical lattices of the off-centre hypercube. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **4**, 204—209 (1953).

Die Koordinatenhyperebenen seien parallel zu den Seiten eines n -dimensionalen Würfels, aber keine von ihnen möge seinen Mittelpunkt enthalten. Der Würfel enthalte den Ursprung im Innern. Durch Wahl geeigneter Maßeinheiten auf den Achsen wird er dann durch $|y_r| = 1 \leq c_r$, ($c_r > 1$) beschrieben. Der Ursprung sei Gitterpunkt. Es wird gezeigt, daß der Würfel dann ein einziges kritisches Gitter hat, das durch $y_r = 2 \sum_{s=1}^n \xi_s + (c_r - 1) \xi_r$, ξ_s ganz, gegeben werden kann. Seine Determinante ist $|1 - 2 \sum (c_s - 1)^{-1}| \prod (c_s - 1)$.
G. Lochs.

Cohn, Harvey: Stable lattices. I. II. *Canadian J. Math.* **5**, 261—270 (1953), 6, 265—273 (1954).

Let $\varphi(\mathbf{x})$ be a real continuously differentiable function of $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, which is homogeneous of integral degree $h > 0$. For any lattice A let $q(A)$ denote the minimum of $|\varphi(\mathbf{x})|$ for all points \mathbf{x} other than \mathbf{o} of A ; and consider only lattices for which $q(A) > 0$. The author introduces the concept of the free dimension of the function φ and uses this to define a sub-class of lattices which are called stable lattices for the function φ . The use of the term stable lattice is then justified by showing that, if A^* is a stable lattice, then, for some $\eta > 0$, the inequality $q(A) \leq q(A^* + \eta d(A, A^*))$ holds for all lattices A , having the same determinant as A^* and lying in a certain neighbourhood of A^* , where $d(A, A^*)$ is a positive semi-definite distance from A^* to A , specially defined for A in the neighbourhood of A^* . A criterion is developed for determining whether or not a lattice is stable. A detailed investigation is made of the special case when

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_r (x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2) \cdots (x_{r+s+1}^2 + x_{r+s+2}^2),$$

where $r \geq 0$, $s \geq 0$, and A is generated by points $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ such that $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_n \mathbf{a}_n)$ is a form in u_1, \dots, u_n with integral coefficients. If $r = 2$, $s = 0$ it is shown that the lattice is stable, if and only if, the indefinite quadratic form $\varphi(\mathbf{u})$ assumes both the values $\varphi(A)$ and $-\varphi(A)$. More generally, if $s = 0$, so that $\varphi(\mathbf{u})$ is the norm form of a module in a totally real algebraic field, it is shown that the lattice is stable if, and only if, the numbers ξ_i of the module having minimum absolute norm (other than 0) are such that for any two i, j the ratio of the conjugates ξ_i, ξ_j is positive for some ξ_i and negative for others. It is shown that this condition is satisfied for the case when $\varphi(\mathbf{u})$ is the norm form of the integers of the totally real field generated by $\cos 2\pi/N$, with $N \geq 12$. A more complicated criterion for stability is given for the general case, when $\varphi(\mathbf{u})$ is the norm form of a module in an algebraic field which is not totally real. This is used to show that the lattices associated with the integer module in the field generated by $\exp(2\pi i/N)$ is stable if, and only if, N is square-free. (Note by the reviewer: Some of the concepts introduced by the author can be interpreted in terms of the group Γ of automorphisms Ω of the region $|\varphi(\mathbf{x})| < 1$. Thus the free dimension Q is $n^2 - 1 - a$, where a is the dimension of Γ . Again the pseudo-distance $d(A, A^*)$ is essentially the minimum of $\delta(\Omega A, A^*)$ for all Ω in Γ , where δ denotes the distance between two lattices in Mahler's topology.)
C. A. Rogers.

Tornheim, Leonard: Lattice packing in the plane without crossing arcs. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 734—740 (1953).

Es sei S eine Punktmenge und A ein Gitter. $S \neq A$ ist jene unendliche Punktmenge, die aus S durch Verschieben um die Gittervektoren entsteht. $S \neq A$ heißt eine separierte Gitterlagerung, wenn keine 2 Mengen $S + \lambda$, $S + \lambda'$ innere Punkte gemeinsam haben. Dabei sind $\lambda \neq \lambda'$ beliebige Punkte aus A . Es sei $E(S)$ der zu S gehörige Vektorbereich. Er entsteht durch Abtragen jedes in S liegenden Vektors von einem beliebigen Punkt aus; besteht also aus den Punkten $s - s'$, wo s, s' beliebige Punkte aus S sind. Chalk und Rogers (dies. Zbl. **34**, 26) haben gezeigt, daß $S \neq A$ dann und nur dann eine separierte Gitterlagerung ist, wenn das Gitter in bezug auf $E(S)$ zulässig ist. $S \neq A$ heißt eine Gitterlagerung ohne sich schneidende Bogen, wenn kein Bogen von $S \neq \lambda$ einen Bogen von $S + \lambda'$ schneidet. Nach vorbereitenden Hilffsätzen über sich schneidende Bogen zeigt der Verf.: Damit $S \neq A$ eine Gitterlagerung ohne sich schneidende Bogen ist, ist hinreichend, daß die von 0 verschiedenen Gitterpunkte, die zu $E(S)$ gehören, sogenannte lokale Randpunkte von $E(S)$ sind. N. Hofreiter.

Ollerenshaw, Kathleen: Irreducible convex bodies. Quart. J. Math., Oxford, II. Ser. 4, 293—302 (1953).

The following two theorems are proved: (i) Let the two-dimensional star domain $f(x_1, x_2) \leq 1$ be irreducible. Then the n -dimensional star body $f(x_1, x_2) \leq 1, |x_3| \leq 1, \dots, |x_n| \leq 1$ is likewise irreducible. — (ii) For $n \leq 5$ the n -dimensional sphere $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ is irreducible. [For the definition of irreducible star bodies see K. Mahler, Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 331—33 (1946). For the recent theory see C. A. Rogers, this Zbl. 46, 276.] K. Mahler.

Oppenheim, A.: Values of quadratic forms. III. Monatsh. Math. 57, 97—101 (1953).

Verf. hat in Teil I, II (dies. Zbl. 50, 273) folgenden Satz für $n \geq 5$ bewiesen: Sind Θ irrational, c_3, \dots, c_n ganz und $\neq 0$, so ist die Ungleichung

$$0 < x_1 x_2 + \Theta x_2^2 + c_3 x_3^2 + \dots + c_n x_n^2 < \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ ganzzahlig lösbar. In dieser Arbeit wird der Satz für $n = 4$ bewiesen. Dabei werden ein Satz über Gleichverteilung und ein Satz über die Darstellung der Zahlen der Form $\sigma^2 p$ (σ ganz, p Primzahl aus einer arithmetischen Reihe) durch ganzzahlige binäre quadratische Formen benutzt.

N. Hofreiter.

Jarník, Vojtěch: Über lineare diophantische Approximationen. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. 1.—18. 1. 1953, 189—192 (1953).

Bericht über zwei Arbeiten der jungen tschechischen Mathematiker J. Kurzweil (dies. Zbl. 48, 278) und A. Apfelbeck (dies. Zbl. 48, 278).

Mahler, K.: On the approximation of logarithms of algebraic numbers. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 245, 371—398 (1953).

Es wird ein Transzendenzmaß für $\ln x$ gegeben, wobei x eine algebraische Zahl $\neq 0, \neq 1$ sei. In Anwendungen wird z. B. $|2^a - e^{a_1}| \geq |2^3 - e^2|$ für alle positiven ganzen a und a_1 , sowie $e^b - [e^b] > b^{-40b}$ und $\ln c - [\ln c] > c^{-\ln \ln c}$ für genügend große positive ganze b und c gezeigt. Der Verf. verallgemeinert hier auch sein früheres Resultat, daß $\ln x$ für rationales $x \neq 0, \neq 1$, dem ein bis heute nicht verbessertes Transzendenzmaß für alle diese x zugrunde liegt (dies. Zbl. 3, 151, 388), keine U -Zahl sei, auf algebraische x . Der Beweis beruht auf der Angabe eines Systems linear unabhängiger Formen in Potenzen von $\ln x$ mit Koeffizienten, die Polynome in x mit ganzen Koeffizienten sind, das analog der Methode, die Siegel bei der Untersuchung der Werte der Besselfunktionen [Abh. Preuß. Akad. Wiss. 1929, Nr. 1 (1930)] aufgezeigt hat, behandelt wird. Dieses System linear unabhängiger Formen erhält man unter Heranziehung des Residuensatzes bei der Entwicklung der Integrale

$$\frac{P}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{z^h x^{\pm n}}{Q(z)} dz$$

mit $h = 0, 1, \dots, m$, $P = m! N^m (n!)^{m+1}$, wobei N das kleinste gemeinsame Vielfache von $1, 2, \dots, n$ ist, $Q(z) = \prod_{\nu=0}^n (z + \nu)^{m+1}$ und C einen Kreis um $z = 0$ mit Radius größer n bedeuten.

Th. Schneider.

Analysis.

● Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Herausgegeben von W. Schmeidler. Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen zu Teil I. (Teubners Math. Leitfäden, Bd. 33/34.) 7. Aufl. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1953. 109 S., 97 Abb. DM 3,20.

● Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Herausgegeben von W. Schmeidler. Teil IV: Übungsaufgaben mit Lösungen zu Teil II. (Teubners Math. Leitfäden, Bd. 35/36.) 6. Aufl. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1953. 108 S., 51 Abb. DM 3,20.

● Rothe, R.: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Herausgegeben von W. Schmeidler. Teil V: Formelsammlung. (Teubners Math. Leitfäden, Bd. 43.) 3. Aufl. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1953. 124 S., 74 Abb. DM 4,—.

● **Tricomi, Francesco: Esercizi e complementi di analisi matematica. Parte II.**

A cura del Tino Zeuli. 2. ed. Padova: Edizioni CEDAM 1953. XII, 487 p., 152 fig. L. 3200. (Litografie).

● **Pignedoli, Antonio: Lezioni di analisi matematica. Vol. I.** Padova: Edizioni CEDAM 1953. XV, 408 p.; 53 fig. L. 3500. (Litografie.)

Kapitelüberschriften: 1. Einführung der reellen Zahlen; 2. Die komplexen Zahlen; 3. Elemente der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung; 4. Determinanten; 5. Lineare Gleichungen und Formen; 6. Elemente der Punkt mengenlehre; 7. Zahlenfolgen und Grenzwerte; 8. Das Rechnen mit Grenzwerten; 9. Numerische Reihen; 10. Funktionen und ihre elementaren Eigenschaften; 11. Ableitung und Differential einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen; 12. Rechenregeln der Differentialrechnung; 13. Die Hauptsätze der Differentialrechnung und ihre geometrischen Anwendungen; 14. Taylorsche Reihen von Funktionen einer reellen Veränderlichen; 15. Algebraische Gleichungen. — Der vorliegende erste Band ist hinsichtlich Stoff und Darstellung ausgesprochen auf den das Studium beginnenden Ingenieur und Lehrer zugeschnitten. Definitionen und Sätze sind klar formuliert, die letzteren absichtlich und vermerktermaßen nicht immer lückenlos bewiesen. Das Ganze aber vermittelt ein eindruckliches Bild von den klassischen Schätzen der Analysis. Beispielsweise wird in I. im wesentlichen nur berichtet und in 15. nur die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen bis zum 4. Grad im Bereich der komplexen Zahlen behandelt; in II. wird auch die Integralrechnung angeschnitten. Im übrigen fehlt es nicht an gelegentlichen Streiflichtern auf modernere Ziele.

G. Aumann.

● **Menger, Karl: Calculus. A modern approach. 2. enlarged ed. Chicago: Illinois Institute of Technology 1953. XXIII, 303 p.**

Gegenüber der ersten Auflage (dies. Zbl. 47, 293) hat sich an den Vorschlägen hinsichtlich der Bezeichnungen in der Differential- und Integralrechnung nichts geändert. Auch der bisherige Aufbau und die Kapiteleinteilung sind beibehalten. Ein besonderes Gewicht (Kapitel 7) wurde gelegt auf die Unterscheidung der Begriffe „variable Größe“ (im physikalischen Sinne, welche entsteht, wenn physikalische Gegenstände mittels reeller Zahlen vollständig geordnet werden) und der „Weierstraßschen Variablen“ (im mathematischen Sinne als Symbol für ein beliebiges Element einer bestimmten Menge). Der erste dieser Begriffe wird einer ausführlichen axiomatischen Behandlung unterzogen, wobei auch für den Begriff der „benannten Zahl“ eine neuartige Auffassung entwickelt wird [statt „Stab (S) ist 2 Fuß (F) lang“ tritt die Gleichung „ S in F “ = 2“, was allgemein als eine Abbildung der Paare einer additiven Klasse in die Zahlen gedeutet wird]. Dieses Kapitel ist als eine bemerkenswerte Skizze zu einer Theorie der Anwendung der reellen Analysis anzusehen. Die hier vorgetragene neue Bezeichnungsweise und begriffliche Auffassung bringt die Reform in der Darstellung der Differential- und Integralrechnung jedenfalls in Fluß; von den zahlreichen Anregungen dürfte die eine oder andere bereits endgültige Form haben.

G. Aumann.

Menger, Karl: The ideas of variable and function. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 956—961 (1953).

Verf. zufolge stellen sich bei der Untersuchung der „Semantik der reinen und angewandten Analysis“ drei Arten von Variablen- und Funktionsbegriffen heraus: 1) die „logischen“, 2) die „naturwissenschaftlichen“, 3) die „mathematischen“ Begriffe. Die „logischen“ Begriffe werden am Spezialfall der „arithmetisierten Analysis“ erläutert. Danach ist eine Funktion (auch: „pure function“) eine nichtleere Menge geordneter Paare von reellen Zahlen, unter zusätzlicher Sicherung der Eindeutigkeit. Das entspricht einem in der Mengenlehre seit langem üblichen Verfahren; wir würden diesen Funktionsbegriff daher lieber als den „mengentheoretischen“ bezeichnen. Im Gegensatz zu dieser exakt mengentheoretischen Definition definiert Verf. eine reelle Variable als „ein Symbol, welches für irgendein Element einer gewissen Menge reeller Zahlen (des Wertevorrates oder Bereiches — range — der Variablen) steht“. Offenbar ist diese Definition von völlig anderer Natur als die mengentheoretische des Funktionsbegriffes; nach Ansicht des Ref. ist es nicht zweckmäßig, so heterogene Dinge unter die gemeinsame Kategorie „logische Begriffe“ fallen zu lassen. Variable im fraglichen Sinne sind überhaupt keine Bestandteile der „Semantik“, sondern sind Elemente der Syntax, als der formalisierten Darstellung der „Semantik“. — Die Idee einer „naturwissenschaftlichen Variablen“ erläutert Verf. am Beispiel der Gastemperatur θ : „ θ is the pairing with each specimen of θ (i. e. with each act of reading a thermometer immersed in gas) of a 'value' of θ (i. e. the observed number of degrees)“. Die Menge aller specimens wird die Spezies, die aller Werte der Wertevorrat oder Bereich (range) von θ genannt. Und: „Es ist eine Beobachtungstatsache, daß bei Übereinstimmung der Werte zweier specimens des Gasdruckes p — bei geeigneten experimentellen Voraussetzungen — auch die entsprechenden Werte der Gastemperatur θ übereinstimmen; das ist es, was die Physiker meinen, wenn sie die Variable θ als eine Funktion der Variablen p bezeichnen“. Der Begriff der „naturwissenschaftlichen

Variablen“ fällt damit unter den allgemeinen Begriff einer eindeutigen Abbildung u irgendeiner Menge A , der „Spezies“ von u , von Elementen a , den „specimens“, auf eine Menge U reeller Zahlen α , den Wertevorrat oder Bereich (range) von u . Eine solche Abbildung bezeichnet Verf. (wenn wir ihn recht verstanden haben) daher als eine „mathematische Variable“. Ist v eine weitere mathematische Variable, mit der Spezies B und dem Wertevorrat V , ist ferner I eine eindeutige Abbildung von A auf B (vom Verf. als eine „Paarung“ bezeichnet), so heißt v „eine mathematische Funktion von u bezüglich P “, falls die Hintereinanderausführung $v P \tilde{u}$ (\tilde{u} die i. a. mehrdeutige Inverse von u), eine Abbildung von U auf V also, eindeutig ist, oder, anders ausgedrückt, falls die auf den Parameter $a \in A$ bezogene ebene Kurve $a \rightarrow [u(a), v(P(a))]$ schlicht über U liegt. In diesem Falle schreibt Verf. $v P \tilde{u} = (v P u)$ oder auch einfach, bei gedachtem festem P , v_u , und nennt u die unabhängige, v die abhängige Variable. Mit dieser mathematischen Theorie der „Variablen“ ist die Differentialrechnung — wir zitieren — „durch die Annahme verbunden, daß es zu manchen Variablenpaaren u, v , bei denen v eine Funktion $v_u = (v P u)$ von u ist, eine mit dv/du bezeichnete und das „Maß der Änderung von v mit u “ genannte Variable gibt, welche mit u die gleiche Spezies A besitzt, und mit v durch die Beziehung $(dv/du) I u = v'_u$ verbunden ist“ (I = identische Selbstabbildung von A , v'_u = Ableitung von v_u). Diese implizite Definition von dv/du könnte man wohl durch die explizite $(dv/du)(a) = v'_u(u(a))$ ($a \in A$) ersetzen. — Zum Schluß geht Verf. auf die Verwirrung ein, die „durch Verwechslungen dieser drei Arten von Variablen untereinander und mit Funktionen entstehen können“. Damit wird der Anschluß an eine einleitende Bemerkung hergestellt: „The lack of distinction is one of the reasons that prompted Russell to call the notion of variable one of the most difficult with which logic has to deal“.

Jürgen Schmidt.

● Turán, Paul: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. Budapest: Akadémiai Kiadó 1953. 196 S.

Verf. gibt eine lehrbuchmäßige zusammenfassende Darstellung seiner Methode und der bisher betrachteten Anwendungen (vgl. dies. Zbl. 26, 203; 29, 291, 393, 395; 33, 147; 40, 16, 23; 41, 371; 43, 124; 44, 38; 48, 311). Er gibt neue Resultate und weist auf neue Probleme hin. Es soll eine kurze, unvollständige Übersicht gegeben werden. Setzen wir

$$S(a; z; m, n; s) = S(a_1, \dots, a_k; z_1, \dots, z_k; m, n; s) = \min_{m \leq t \leq n} \left| \sum_{j=1}^k a_j z_j^t \right|, \quad M_s(t; U; a; m, n; s) = \min_{m \leq t \leq n} S(a; z; m, n; s)$$

erstreckt über alle komplexen Zahlen z_1, \dots, z_k , $M_1 = \min |z_j|^t$, $M_2 = \max |z_j|^t$, $M_3 = \sum |a_j| |z_j|^t$, $M_4 = (\sum |a_j|^2 |z_j|^{2t})^{1/2}$, so handelt es sich bei der Turánschen Methode um die

Abschätzung von U nach unten für $s = 1$ und 2. [Der Dirichletsche und Kroneckersche Approximationssatz liefern für $s = 3$ solche Abschätzungen nach unten, wo sich aber t schlecht oder gar nicht lokalisieren läßt; $s = 4$ wurde von N. Wiener (dies. Zbl. 10, 28) implizit in seiner Untersuchung über den Fabryschen Lückensatz betrachtet.] Die Hauptsätze lauten (Satz 7):

$$(1) \quad S(a; z; m, m+k; 1) \geq (\sum a_j) (2k/2e(m+k))^k$$

für $m \geq 0$. Wenn m ganz ist, gilt diese Abschätzung auch für $S(a; z; m+1, m+k; 1)$ für $m \geq -1$. (Satz 9):

$$(2) \quad S(a; z; m, m+k; 2) \geq (k/24e^2(m+2k))^k F(a_1, \dots, a_k),$$

wo $F(a_1, \dots, a_k)$ vom ersten Grad in den a , aber von nicht so einfacher Gestalt wie in Satz 7 ist. Ist die Numerierung so getroffen, daß $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_k|$ ist, dann kann $F = \min_j |a_1 + \dots + a_j|$ genommen werden. Der Beweis von (2) ist natürlich schwieriger

als der von (1). Die kompliziertere Gestalt von (2) beschränkt einstweilen die Anwendung von (2) auf den Fall $a_1 = \dots = a_k = 1$. In diesem Fall lassen sich (1) und (2) verschärfen, und zwar insbesondere für $m = 1$. Auch dieser Spezialfall ist von besonderem Interesse, und zwar gilt (Satz 1; Satz 2) (3) $U(1; 1, k; 1) \geq 1; 1 \geq U(1; 1, k; 2) > \log 2(1 + 1/2 + \dots + 1/k)^{-1}$. Dabei ist im Satz 1 die Abschätzung scharf. Für Satz 2 besteht die Vermutung, daß nicht nur $U > 0,69/\log(k+1)$ ist, sondern daß es eine absolute Konstante c gibt, so daß $U \geq c$ ist. Wichtig ist die Bemerkung (von P. Erdős), daß die im Vergleich zur obigen Abschätzung scheinbar grobe Abschätzung (aus Satz 9) $U(1; 2, k+1; 2) > 3/4^{k+1}$ doch das Richtige trifft. Weiter gilt $U(1; 1, 2k; 2) \geq 1/2$ (Satz von N. Schmeitzer) und z. B. $1 \geq U(1; 1, 2 + [k\epsilon^{-1}], \log(2k/\epsilon); 2) \geq 1 - \epsilon$ ($0 < \epsilon < 1$) (Turán-A. Rényi). Weitere wichtige Sätze sind die Sätze 11 und 12. Die Anwendungen bringen 1) Einen Satz von Littlewood, 2) Ist $F(x) =$

$$\sum_{j=0}^k (a_j \cos n_j x + b_j \sin n_j x) \quad (0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k) \text{ und } 0 < b < \pi, \text{ dann ist } \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| = (2e\pi/b)^{2k+1} \max_{|x| \leq b} |f(x)|. \quad 3) \text{ Die obere Abschätzung der Anzahl } N(f; a, a+d) \text{ der Wurzeln}$$

des fastperiodischen Polynoms $f(x) = \sum_{v=0}^N a_v \cos \lambda_v x$ ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$) in $(0 <) a \leq X \leq a+d$.

4) Potenz- und Dirichletreihen mit Lücken. Neuartig ist der Satz 19: Ist $U(r, q) = \sum r^{\lambda_j}$

$b_1 \cos \lambda_1 q + b_2 \sin \lambda_2 q$ in der ganzen Ebene eine konvergente harmonische Entwicklung ist. Fabry'sche Lückenbedingung $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j/j = \infty$, dann ist für alle $r \in r_0(U, \epsilon, \beta + \alpha)$, $0 < \epsilon < 1/2$, $f(r)^{1+\epsilon} \leq 8(S\epsilon\pi(\beta+\alpha))^4 M(2r)^{2\epsilon} M(r, \alpha, \beta) (M = \max_{\alpha \leq \varphi \leq \beta} |U(r, q)|, M(r, \alpha, \beta) = \max_{\alpha \leq \varphi \leq \beta} |U(r, q)|)$.
 Daraus folgt ein analoger Satz über Potenzreihen $\sum a_i z^{2i}$, welche der Fabrybedingung genügen.
 Zur Theorie der quasianalytischen Funktionen und der Randwerte analytischer Funktionen.
 Über die Verschiebung ganzer Funktionen: Was kann über die Ordnung und den Typus einer ganzen Funktion $\sum_{i=1}^n b_i b_i(z; \tau_i)$ ausgesagt werden, in Abhängigkeit von der Ordnung und dem Typus der ganzen Funktion $b(z)$. 7) Zur Theorie der Differentialgleichungen. Es wird die folgende „finitisierte“ Form des Satzes von Poincaré-Perron aufgestellt (Satz 24):
 $y = \sum_{i=1}^n b_i(z) y_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) ein System (die f in $0 \leq a \leq t \leq a+d$ stetig)
 $M = \max |f_{ij}(a)|$, $M = \max_{a \leq t \leq a+d} \sum_{i,j} |f_{ij}(t) - f_{ij}(a)|^2$ und ist
 $M \leq (1/4n^2 d^2) (d/2e(a+d))^{2n} \exp(2(l - (n+1)B)a - 2nd(2B+1)) \leq 1$
 > 0 = Minimum der Restteile der Nullstellen der Säkulargleichung $\text{Det}(f_{ij}(a) - \lambda \delta_{ij}) = 0$),
 dann ist
 $\max_{a \leq t \leq a+d} \sum_{i=1}^n |y_i(t)|^2 \geq (\sum_{i=1}^n |y_i(0)|^2) (\epsilon^{2ia} 4n^2 d^2) (d/2e(a+d))^{2n}$.

Angenäherte Lösung algebraischer Gleichungen: Methoden von Graeffe-Bernoulli. Satz 2 und Satz 4 liefert z. B., wenn die z_i mit $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$ die Nullstellen von $f_0(z) = a_0 + \dots + z^n$ ($a_{-1} = 1$, $f_n(z)$ die Graeffeschen transformierten Polynome von $f_0(z)$ sind, s_{jk} die Potenzsummen zu f_k vom Grad j bedeuten, daß $2^{-k} \log |n| \leq \log |z_1| - 2^{-k} \log (\max_{j=1, \dots, 2n} |s_{jk}|^{1/j}) \leq 2^{-k} \log 2$.
 Wenn nur die s_{jk} mit $1 \leq j \leq n$ herangezogen werden, dann muß in der oberen Abschätzung $2^{-k} \log |n| - \log$ der unteren Schranke in (3) ersetzt werden (wo k durch n zu ersetzen ist).
 Anwendungen auf die Theorie der Zetafunktion und die Theorie des Restgliedes im Primzahlansatz. (Quasiriemannsche Vermutung; vgl. dazu auch dies. Zbl. 31, 348; Satz von Carlson usw.). Gerade diese Probleme bildeten für den Verf. den Ausgangspunkt seiner Methode.)
 Der Verf. entwickelt seine Überlegungen in ausführlicher und sehr anregender Weise. Es liegt hier ein sehr bedeutendes Werk vor. E. Hlawka.

Jecklin, H.: Trigonometrische Mittelwerte. *Elemente Math.* 8, 54—60 (1953).

Verf. vergleicht die Mittelwerte $H = n^{-1} (1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n)$,
 $A = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$, $A = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$, $Q = \sqrt{((x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/n)}$,
 $= \arcsin[(\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n)/n]$, $C = \arccos[(\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n)/n]$,
 $= \arctg[(\tg x_1 + \tg x_2 + \dots + \tg x_n)/n]$, $Ct = \text{arctg}[(\ctg x_1 + \ctg x_2 + \dots + \ctg x_n)/n]$
 nach ihrer Größenordnung auf Grund des Satzes von K. Knopp [*Math. Z.* 30, 37—413 (1929)]: Sind $q(x)$ und $p(x)$ stetige wachsende Funktionen, so gilt
 $p^{-1}[(p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n))/n] \leq q^{-1}[(q(x_1) + q(x_2) + \dots + q(x_n))/n]$
 dann und nur dann, falls $p q^{-1}(x)$ von oben konvex ist. J. Aczél.

Mengenlehre:

Copi, Irving M. and Frank Harary: Some properties of n -adic relations. *Portugaliae Math.* 12, 143—152 (1953).

Die Verff. schlagen Definitionen für Symmetrie und Transitivität und ferner für das Konverse und das relative Produkt bezg. n -gliedriger Relationen vor und beweisen für diese Begriffe einfache Sätze. Auf eine unabhängige Arbeit ähnlichen Inhalts von K. E. Aubert in *Arch. Mat. Naturvid.* 52, 9—58 (1954) wird hingewiesen. G. H. Müller.

Marczewski, E. and C. Ryll-Nardzewski: Projections in abstract sets. *Fundamenta Math.* 40, 160—164 (1953).

Es bedeute $X \times Y$ das cartesische Produkt von zwei Grundmengen X, Y . Für jedes $Z \subset X \times Y$ wird dann mit $P(Z)$ die Projektion von Z auf X bezeichnet. Die Operation P ist absolut additiv, d. h. es gilt $P(\bigcup_i Z_i) = \bigcup_i P(Z_i)$, jedoch nicht multiplikativ. Im allgemeinen gilt: $P(\bigcap_i Z_i) \subset \bigcap_i P(Z_i)$. Die umgekehrte Relation

gilt, wenn für das System Z_t gewisse Voraussetzungen gemacht werden. Es sei \mathfrak{X} ein System von Teilmengen von X bzw. Y und \mathfrak{Y} das System von allen $E \times F \subset X \times Y$ mit $E \in \mathfrak{X}$ und $F \in \mathfrak{Y}$. Verff. zeigen: wenn das System \mathfrak{X} kompakt ist, dann hat $0 \neq Z \in \mathfrak{X}_{\delta\delta}$ bzw. $\mathfrak{X}_{\delta\delta}$ bzw. \mathfrak{X}_A als Folgerung $P(Z) \in \mathfrak{G}_{\delta}$ bzw. \mathfrak{G}_A bzw. \mathfrak{G}_A . Dagegen aus $0 \neq Z \in \mathfrak{X}_\delta$ bzw. \mathfrak{X}_δ bzw. \mathfrak{X}_σ bzw. \mathfrak{X}_δ bzw. $\mathfrak{X}_{\delta\sigma}$ folgt stets (auch wenn \mathfrak{X} nicht kompakt), daß $P(Z)$ zu \mathfrak{G} mit dem entsprechenden Index gehört; hierbei haben die Indizes die bekannte mengentheoretische Bedeutung von Obersystembildungen aus den Systemen \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{G} .

D. A. Kappos.

Kurepa, Svetozar: Peano's transformations and Suslin's problem. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 175—188 und engl. Zusammenfassg. 189—190 (1953) [Kroatisch].

Definitions: The totally ordered, continuous set E is said to have the property (S) (Suslin's property), if every family of pairwise disjoint intervals in E , is either finite or denumerably infinite. E is said to have the property (D), if there exists at least one monotonic mapping f which carries E into E in such a manner that the set Df of points of discontinuity of f is everywhere dense in E , that is if $\overline{Df} = E$. — Theorems: I. Let E be a totally ordered continuous space with a first and a last element, and let E possess Suslin's property. Then a necessary and sufficient condition that the space E^2 possesses Suslin's property is the existence of a Peano's transformation of E onto E^2 . — This theorem is interesting, because it shows the connection of Suslin's problem with the existence of so exceptional transformations like those of Peano. — II: Let E be a totally ordered, continuous set with Suslin's property and without a first and a last element. Then a necessary and sufficient condition that E be similar to the set of real numbers $(0, 1)$ is that E possesses the property (D). — III: The property (D) is not characteristic for the totally ordered continuous sets with the property (S). — An example is given of a set E , which has the property (D) but which has not the property (S). From this follows the problem: Is there a totally ordered set, which has the property (S) but which has not the property (D)?

Autoreferat.

Sierpiński, W.: Un théorème concernant les fonctions continues dans les ensembles ordonnés. Ann. Soc. Polon. Math. 24, Nr. 2, 175—180 (1953).

Verf. beweist folgenden Satz: Jede in einer abzählbaren geordneten Menge E definierte Funktion mit Werten aus einer geordneten Menge H kann dargestellt werden als Limes einer Folge stetiger Funktionen. — Von Limes und Stetigkeit wird hierbei gesprochen im Hinblick auf die übliche Deutung einer geordneten Menge als Hausdorffscher topologischer Raum. — Der Satz bleibt richtig, wenn H ein beliebiger Hausdorffscher topologischer Raum ist, aber er kann, wie Verf. durch ein Gegenbeispiel zeigt, falsch werden, wenn man E als abzählbaren Hausdorffschen topologischen Raum wählt, dessen Topologie nicht mehr die einer geordneten Menge ist.

W. Neumer.

Sierpiński, W.: Une généralisation des théorèmes de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl. Fundamenta Math. 40, 1—2 (1953).

Verf. beweist den Satz: Jeder Geraden d der euklidischen Ebene sei eine Kardinalzahl m_d mit $2 \leq m_d \leq 2^{\aleph_0}$ zugeordnet. Dann gibt es eine Punktmenge S in P derart, daß die Menge $d \cap S$ die Mächtigkeit m_d besitzt für jede Gerade d der Ebene.

W. Neumer.

Wirsing, Eduard: Ein metrischer Satz über Mengen ganzer Zahlen. Arch. der Math. 4, 392—398 (1953).

Verf. nennt im Anschluß an den Ref. eine Menge \mathfrak{A} nicht negativer ganzer Zahlen irreduzibel, wenn \mathfrak{A} nicht als (Schnirelmann-) Summe mindestens zweielementiger Mengen darstellbar ist. Verf. nennt ferner \mathfrak{A} total irreduzibel, wenn auch jede zu \mathfrak{A} asymptotisch gleiche Menge \mathfrak{B} (d. h. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind von einer Stelle an identisch) irreduzibel ist. Ordnet man nun einer Menge \mathfrak{A} den dyadisch geschriebenen Bruch $\varrho(\mathfrak{A}) = e_0, e_1 e_2 \dots$ [$e_i = 1$ ($i \in \mathfrak{A}$), $e_i = 0$ ($i \notin \mathfrak{A}$)] zu, so entsprechen den Mengen nicht negativer ganzer Zahlen Punkte des Intervalls $\langle 0; 2 \rangle$; läßt man die endlichen Mengen außer Betracht, so ist die Zuordnung $\mathfrak{A} \rightarrow \varrho(\mathfrak{A})$ eineindeutig. Es lassen sich dann punktmengentheoretische Begriffe und Sätze auf Klassen von Mengen nicht negativer ganzer Zahlen übertragen. Hinsichtlich maßtheoretischer Begriffe spielt überdies die Klasse aller endlichen Mengen keine Rolle, da sie einer Menge vom Lebesgueschen Maß Null entspricht. Verf. beweist, daß die Gesamtheit aller reduziblen Mengen

das Lebesguesche Maß Null hat, also fast alle Mengen irreduzibel sind. Als leicht ersichtliche Folgerung ergibt sich hieraus, daß fast alle Mengen sogar total irreduzibel sind. Die Beweise werden auf Sätze von E. Borel über die Verteilung g -adischer Ziffern im Bereich der g -adisch α schreibenden reellen Zahlen gestützt.

H. Ostmann.

Kruskal jr., Joseph B.: Monotonic subsequences. Proc. Amer. math. Soc. **264**—274 (1953).

N sei die kleinste Zahl mit folgender Eigenschaft: Jede Folge von N Vektoren a_i im r -dimensionalen euklidischen Raum enthält eine Teilfolge aus $n + r$ Vektoren a_j , für welche mit passendem Vektor b die Folge der Skalarprodukte $a_j \cdot b$ monoton ist. Für $r = 1$ ist nach Erdős und Szekeres $N = n^2 + 1$. Hier wird $N = r n + n^2 - n + 1$ vermutet und in den Fällen $n = 1$ und $n = r = 2$ bewiesen, für $n = 2$ wird $N \leq r n + n^2 - n - 1$ gezeigt. — In einer Menge E seien k binäre Relationen q_i so erklärt, daß für jedes Paar a, b wenigstens einmal $a q_i b$ erfüllt ist: Eine Folge a_1, a_2, a_3, \dots werde monoton genannt, falls $a_1 q_i a_2, a_2 q_i a_3, \dots$ für wenigstens ein q_i gilt. Theorem: Jede Folge aus $n^k + 1$ Elementen enthält eine monotone Teilfolge aus $n + 1$ Elementen. Für gegebenes n und k gibt es mit Relationen versehene Mengen, für welche $n^k + 1$ minimal ist.

Ernst Witt.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Marczewski E.: On compact measures. Fundamenta Math. **40**, 113—124 (1953).

Ein System \tilde{X} von Teilmengen einer Grundmenge X heißt nach Verf. kompakt, wenn gilt: aus $P_i \in \tilde{X}$ und $\bigcap_{i=1}^n P_i \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$, folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i \neq \emptyset$. Es bezeichne $\mu|_{\mathfrak{M}}$ ein Maß auf nicht negative, additive und normierte Funktionen μ auf einen Körper \mathfrak{M} von Teilmengen von X . Man sagt, ein System \tilde{X} von Teilmengen von X approximiert \mathfrak{M} bezüglich μ , wenn gilt: Für jedes $E \in \mathfrak{M}$ und $\epsilon > 0$ existieren $P \in \tilde{X}$ und $D \in \mathfrak{M}$ mit $D \subset P \subset E$ und $\mu(E - D) < \epsilon$. Ist das System \tilde{X} kompakt, so heißt das Maß $\mu|_{\mathfrak{M}}$ kompakt. Jedes kompakte Maß $\mu|_{\mathfrak{M}}$ ist abzählbar (total-)additiv, deshalb besitzt es eine σ -Erweiterung, die, wie Verf. zeigt, kompakt ist. Eine Familie \tilde{X}_t , $t \in T$, von Systemen von Teilmengen der Grundmenge X heißt abzählbar unabhängig bzw. pseudo-unabhängig, wenn gilt: Für jede Folge von verschiedenen Indizes t_1, t_2, \dots und $P_i \in \tilde{X}_{t_i}$ oder $X - P_i \in \tilde{X}_{t_i}$ (bzw. $P_i \in \tilde{X}_{t_i}$) ist $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i \neq \emptyset$. Falls \tilde{X}_t ein komplementäres System, $t \in T$, ist, dann fallen beide Begriffe zusammen. Es sei \tilde{X}_t , $t \in T$, abzählbar pseudo-unabhängig und jedes \tilde{X}_t δ -abgeschlossen und kompakt, dann ist $\tilde{X} = \bigcup_{t \in T} \tilde{X}_t$ ein kompaktes System. Es sei \mathfrak{M}_t , $t \in T$, wo jedes \mathfrak{M}_t ein σ -Körper, abzählbar unabhängig. Es existiere ferner ein Maß $\mu|_{\mathfrak{M}}$, wobei \mathfrak{M} der kleinste Körper über allen \mathfrak{M}_t , $t \in T$, falls das partielle Maß $\mu|_{\mathfrak{M}_t}$ für jedes $t \in T$ kompakt ist, dann ist auch $\mu|_{\mathfrak{M}}$ kompakt. $\mu|_{\mathfrak{M}}$ kann deshalb kompakt σ -erweitert werden. — Es bedeute X^T das cartesische Produkt einer Familie von Grundmengen X_t , $t \in T$. Eine Teilmenge $Z \subset X^T$ heißt ein abzählbar reduziertes artesisches Produkt von X_t , $t \in T$, wenn gilt: Für jede Folge von Indizes $t_j \in T$ und jede Folge von Elementen $\xi_j \in X_{t_j}$ existiert ein Punkt $(x)_{t \in T}$, $x \in Z$ mit $x_{t_j} = \xi_j$, $j = 1, 2, \dots$. Ein Zylinder $C_t(E)$ (in Z) mit dem Index t und Basis $E \subset X_t$ wird dann als $C_t(E) \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in Z; x_t \in E\}$ definiert. Es sei $\mu_t|_{\mathfrak{M}_t}$ ein Maß, wo \mathfrak{M}_t ein Körper von Teilmengen von X_t für jedes $t \in T$. Es bedeute \mathfrak{M} den Körper aller $C_t(E)$ für alle $E \in \mathfrak{M}_t$. $\mu_t^*(C_t(E)) \stackrel{\text{Def}}{=} \mu_t(E)$ definiert dann ein Maß $\mu_t^*|_{\mathfrak{M}}$ für jedes t . Jede gemeinsame Erweiterung $\mu|_{\mathfrak{M}}$ von allen $\mu_t^*|_{\mathfrak{M}}$, $t \in T$, auf den kleinsten Körper \mathfrak{M} über allen \mathfrak{M}_t wird als ein Produktmaß von $\mu_t|_{\mathfrak{M}_t}$ definiert. Ist jedes $\mu_t|_{\mathfrak{M}_t}$ ein σ -Maß, d. h. μ_t abzählbar additiv und \mathfrak{M}_t ein σ -Körper, für jedes $t \in T$, so ist im allgemeinen, wie Sparre-Andersson und Jessen (dies. Zbl. **31**, 13) gezeigt haben, nicht jedes Produktmaß $\mu|_{\mathfrak{M}}$ von $\mu_t|_{\mathfrak{M}_t}$, $t \in T$, abzählbar additiv. Verf. zeigt nun, daß $\mu|_{\mathfrak{M}}$ kompakt (und deshalb abzählbar additiv) ist, falls jedes $\mu_t^*|_{\mathfrak{M}_t}$, $t \in T$ kompakt ist. Aus dem Satz des Verf. folgt ein Satz von Kolmogoroff, der das Produktmaß von Körpern linearer Punktfolgen betrifft. Verf. zeigt schließlich, daß ein nicht-atomares Sierpińskisches σ -Maß die kompakt sein kann. Ein σ -Maß heißt Sierpińskisch, wenn jede Nullmenge bezüglich dieses Maßes höchstens abzählbar ist.

D. A. Kappos.

Ryll-Nardzewski, C.: On quasi-compact measures. Fundamenta Math. **40**, 125—130 (1953).

Ein σ -Maß $\mu|_{\mathfrak{M}}$, wobei also μ abzählbar additiv und \mathfrak{M} ein σ -Körper (vgl. vorhergeh. Referat), heißt quasi-kompakt, wenn gilt: Für jede Folge $Q_n \in \mathfrak{M}$ und jedes $\eta > 0$ existiert

ein $Q_0 \in \mathfrak{M}$, so daß $\mu(Q_0) > 1 - \eta$ und $\{Q_0 Q_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, ein kompaktes System (vgl. Def. dieses Begriffes im vorhergeh. Referat) ist. Aus der Kompaktheit eines σ -Maßes folgt stets seine Quasi-Kompaktheit. Für ein vollständiges σ -Maß $\mu|\mathfrak{M}$, wobei also \mathfrak{M} alle Teilmengen von μ -Nullmengen enthält, ist die Quasi-Kompaktheit äquivalent mit der Perfektheit, die Gnedenko und Kolmogoroff [Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Veränderlicher, Moskau 1949 (Russisch)] eingeführt haben oder, was gleichwertig, mit der Eigenschaft: Für jede \mathfrak{M} -meßbare Funktion f ist der σ -Körper \mathfrak{M}_f von allen linearen Mengen E mit $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ die μ -Vervollständigung des Maßes $\mu_f|\mathfrak{B}$ ($=$ Körper aller Borelschen linearen Mengen); hierbei ist $\mu_f(E) = \mu(f^{-1}(E))$. Verf. bezeichnet ein σ -Maß $\mu|\mathfrak{M}$ als separabel, wenn gilt: Es existiert

eine Folge $\{E_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, (Basis) von meßbaren Mengen, die folgende Eigenschaften besitzt: 1) wenn $x \neq y$, dann gilt $x \in E_{n_0}$ und $y \notin E_{n_0}$ für mindestens einen Index n_0 , 2) die μ -Vervollständigung von $\mu|\mathfrak{M}$ fällt mit der μ -Vervollständigung von $\mu|\mathfrak{M}_0$ ($=$ der kleinste σ -Körper über die Basis $\{E_n\}$) zusammen. — Ein σ -Maß heißt fast-separabel, wenn es separabel nach Entfernung von gewissen μ -Nullmengen ist. Verf. zeigt, daß die Begriffe Kompaktheit, Quasi-Kompaktheit und Fast-Punktsomorphismus mit dem Lebesgueschen Maß für ein fast-separables Maß äquivalent sind. Wenn jedes σ -Maß $\mu|\mathfrak{M}_t$, $t \in T$, quasi-kompakt ist, so ist die σ -Erweiterung von jedem Produktmaß von μ , $t \in T$, auch ein quasi-kompaktes Maß.

D. A. Kappos.

Marzewski, E. and C. Ryll-Nardzewski: Remarks on the compactness and non direct products of measures. Fundamenta Math. 40, 165—170 (1953).

Es sei $\mu|\mathfrak{M}$ bzw. $\nu|\mathfrak{N}$ ein normiertes Maß und \mathfrak{M} bzw. \mathfrak{N} ein Körper von Teilmengen der Grundmenge X bzw. Y . Es bedeute $X \times Y$ das cartesische Produkt von X und Y ; \mathfrak{S} das System aller Produktmengen $A \times B$ für $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$ und \mathfrak{A} den kleinsten Körper über \mathfrak{S} . Ein Maß $\lambda|\mathfrak{A}$ heißt direktes Produkt von $\mu|\mathfrak{M}$ und $\nu|\mathfrak{N}$, wenn gilt: 1) $\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ für jedes $A \times B \in \mathfrak{S}$. Gilt statt 1) die schwächere Bedingung: 2) $\lambda(A \times Y) = \mu(A)$ und $\lambda(X \times B) = \nu(B)$ für jedes $A \in \mathfrak{M}$ und $B \in \mathfrak{N}$, so heißt λ nicht-direktes Produktmaß. Für ein direktes Produktmaß λ gelten bekanntlich folgende Eigenschaften: I) aus μ und ν abzählbar additiv folgt λ abzählbar additiv. II) Wenn jedes μ , ν und λ ein σ -Maß ($=$ abzählbar additiv mit σ -Körper als Definitionsbereich), dann gilt $\lambda_i(E \times Y) = \mu_i(E)$ für jedes $E \subset X$, wobei λ_i bzw. μ_i das innere Maß, das λ bzw. μ auf allen Teilmengen von $X \times Y$ bzw. X induziert. Verff. zeigen, daß die Eigenschaften I) und II) für nicht-direktes Produktmaß λ gelten, falls $\mu|\mathfrak{M}$ und $\nu|\mathfrak{N}$ kompakte Maße (vgl. die beiden vorhergeh. Referate) sind. Durch Beispiele zeigen sie außerdem, daß diese Eigenschaften nicht allgemein für jedes nicht-direkte Produktmaß gelten. Verff. zeigen schließlich, daß jedes echte atomare Maß stets kompakt ist, und geben ein interessantes Beispiel eines nicht atomaren und nicht kompakten Maßes, dessen minimale σ -Erweiterung ein echt atomares Maß und deshalb ein kompaktes Maß ist.

D. A. Kappos.

Kriekeberg, Klaus: Zur Theorie des oberen und unteren Integrals. Math. Nachr. 9, 86—128 (1953).

Die Arbeit gibt eine ausführliche Darlegung der Theorie des zu einem Maß $m|z$ gehörigen oberen und unteren Integrals unter Zugrundelegung der Definition, welche derjenigen von Darboux beim Riemannintegral entspricht (sog. Unterteilungsintegral). Gegenüber den bisherigen Darstellungen macht Verf. keinerlei Endlichkeitsvoraussetzungen über $m|z$ (z. B. σ -Endlichkeit, vgl. weiter unten). In den §§ 1—4 werden die Hilfsmittel aus der Theorie der Reihen, sowie (mit Beweisen) der σ -additiven Mengenfunktionen, der Maße und der (z -)meßbaren Funktionen zusammengestellt. Es folgen (§ 5) die Sätze über Existenz und Eigenschaften des oberen und unteren Integrals einer reellen (Punkt-) Funktion f über einem meßbaren Integrationsbereich D . Hier wird insbesondere gezeigt, daß die Ober- und Untersummen (von f bezüglich einer Einteilung von D in abzählbar viele fremde, meßbare Teile) ihre untere bzw. obere Grenze, nämlich den Wert des oberen bzw. unteren Integrals jedenfalls dann erreichen, wenn letzterer gleich $\pm \infty$ ist; und diese Feststellung wird benutzt beim Beweise, daß das obere bzw. untere Integral — falls es existiert — σ -additiv ist. Schließlich (§ 6) werden Integrabilitätskriterien entwickelt, von denen folgende genannt seien: Es heiße f fast-meßbar (in D), wenn ein $N \in z$ mit $m(N) = 0$ existiert derart, daß f in $D - N$ meßbar ist; weiter heiße $m|z$ σ -endlich (in D), wenn D darstellbar ist als Vereinigung abzählbar vieler meßbarer D_r mit $m(D_r) < +\infty$. Dann gilt: Jedes integrierbare f mit endlichem Integralwert ist fast meßbar. Damit f fast-meßbar sei, ist notwendig und — falls $m|z$ σ -endlich ist — auch hinreichend, daß für jede meßbare Teilmenge T von D gilt: Falls das obere oder untere Integral von f über T existiert, ist f integrierbar über T . Ein Gegenbeispiel zeigt, daß die Vor. der σ -Endlichkeit im letzten Satz nicht entbehrlich ist.

Otto Haupt.

Cafiero, Federico: Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale per successioni d'integrali di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 223—245 (1953).

Es werden einige früher (dies. Zbl. 50, 281) angekündigte Kriterien für die

Vertauschbarkeit der Integration mit einem gleichzeitigen Grenzübergang beim Integranden und beim Maß bewiesen, die sich auf den Begriff der gleichgradigen Totaladditivität einer Familie von reellen Funktionen, die in einem festen Booleschen σ -Mengenring $\tilde{\mathcal{N}}$ mit einer größten Menge S definiert sind (vgl. dies. Zbl. 46, 58), stützen. Die Hauptergebnisse (vgl. auch ein Buch des Verf., dies. Zbl. 50, 278) lauten: f_n sei über S summierbar in bezug auf das σ -endliche Maß q_n in $\tilde{\mathcal{N}}$ ($n = 1, 2, \dots$), und für jedes $I \in \tilde{\mathcal{N}}$ existiere der Grenzwert $q(I) = \lim q_n(I)$, sobald alle $q_n(I)$ endlich sind. Ist nun jede Zahlenfolge $f_n(x)$ mit $x \in S$ beschränkt und $\underline{f} = \liminf f_n$ und $\bar{f} = \limsup f_n$ über S bezüglich q summierbar, so stellt die gleichmäßige Totaladditivität der Mengenfunktionen $\int_I f_n d q_n$ in $\tilde{\mathcal{N}}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß $\int_I \underline{f} d q \leq \liminf \int_I f_n d q_n \leq \limsup \int_I f_n d q_n = \int_I \bar{f} d q$ für jedes $I \in \tilde{\mathcal{N}}$. Ist sogar $\lim f_n(x) = f(x)$ für jedes $x \in S$ vorhanden, so ist die genannte Bedingung notwendig und hinreichend dafür, daß $\lim \int_I f_n d q_n = \int_I f d q$ für jedes $I \in \tilde{\mathcal{N}}$. K. Krickeberg.

Cesari, Lamberto: Contours of a Fréchet surface. *Rivista Mat. Univ. Parma* 4, 73—194 (1953).

Es sei $T: X = X(w)$ eine eindeutige, stetige Abbildung des Quadrates Q der w -Ebene in den E_3 , ferner S die zugehörige Fläche und $[S]$ die Menge der Punkte von S , weiter $L(S)$ das Lebesguesche Flächenmaß von S , schließlich $f(P)$, $P \in [S]$, eine reelle, eindeutige Lipschitzfunktion. Bezeichnet $l(t)$ eine gewisse, verallgemeinerte, der Menge S_t aller P mit $f(P) = t$ zugeordnete Länge, so gilt $KL(S) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) dt$, wobei K eine Lipschitzkonstante von f ist (vgl. z. B. Cesari, Surface area, Princeton 1954). In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß $l(t)$ invariant ist bezüglich der Fréchetschen Äquivalenz. Beim Beweis wird die Primendentheorie herangezogen (vgl. dazu H. D. Ursell und L. C. Young, dies. Zbl. 43, 169). Otto Haupt.

Fullerton, R. E.: On the rectification of contours of a Fréchet surface. *Rivista Mat. Univ. Parma* 4, 207—212 (1953).

Es sei Q ein Quadrat in der w -Ebene, $T: X = X(w)$, $w = (u, v) \in Q$, eine eindeutige stetige Abbildung von Q in den E_3 der X , ferner S die zugehörige Fréchetsche Fläche und $[S]$ die Menge der Punkte von S , schließlich $f(P)$ eine reelle Lipschitzfunktion auf $[S]$. Mit $B = B(t, T)$ werde bezeichnet die Menge der w , für die $f(X(w)) < t$ gilt; es sei $F(t, T) = \bar{B} - B$ die Begrenzung von B in Q . Es wird gezeigt: (1) Besitzt $T(F(t, T))$ endliche (verallgemeinerte) Länge $l(t)$ (vgl. das vorsehende Ref.), dann existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine mit T im Sinne von Fréchet äquivalente Abbildung $T': X' = X'(w)$, $w \in Q$, derart, daß $|X(w) - X'(w)| < \varepsilon$, $w \in Q$, und daß jede Komponente von $F(t, T')$ ein einfacher Bogen oder eine einfache Kurve oder ein Konstanzkontinuum für T' in Q ist. — (2) Es gibt sogar ein zu T äquivalentes T' , welches Entsprechendes besitzt gleichzeitig für jedes $F(t_i, T)$ bzw. $F(t_i, T')$, wo die abzählbar vielen t_i beschränkt sind mit endlichem $l(t_i)$. Otto Haupt.

Kac, I. S.: Zur Frage der Struktur der singulären Funktionen von beschränkter Variation. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 5 (57), 157—159 (1953) [Russisch].

Der folgende Satz wird bewiesen: Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jede stetige, singuläre, auf dem Einheitsintervall erklärte Funktion f gibt es eine stetige, singuläre Funktion g , so daß (1) $\text{var}(f - g) < \varepsilon$ und (2) die Summe aller Intervalle, wo g konstant ist, das Lebesguesche Maß 1 hat. Für jede stetige, singuläre

Funktion f gibt es also eine Folge stetiger, singulärer Funktionen mit der Eigenschaft (2), welche gegen die Funktion f im Banachschen Raume V aller Funktionen g mit beschränkter Variation $\text{var}(g)$ konvergiert.

R. Sikorski.

Padmavally, K.: On the roots of equation $f(x) = \xi$ where $f(x)$ is real and continuous in (a, b) but monotonic in no subinterval of (a, b) . Proc. Amer. math. Soc. 4, 839—841 (1953).

Sia $f(x)$, $a \leq x \leq b$, una funzione continua e siano m, M il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[a, b]$. Per ogni $m \leq y \leq M$ denoteremo con $S(y)$ l'insieme dei numeri x tali che $f(x) = y$, $a \leq x \leq b$. S. Minakshisundaram (questo Zbl. 23, 20) ha dimostrato che se $f(x)$ è mai differenziabile allora $S(y)$ ha la potenza del continuo per quasi ogni y . Nella presente nota l'A. dimostra che, se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e monotona in nessun subintervallo di $[a, b]$, allora $S(y)$ ha la potenza del continuo per quasi ogni y . Per note proprietà delle funzioni la presente proposizione è più generale della precedente.

L. Cesari.

Vota, Laura: Medie integrali. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 12 283—292 (1953).

Es werden die Funktionen $M(x_1, x_2) = (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ [$x_i = f(t_i)$, $f(t)$ stetig und steigend] als Mittelwerte von x_1, x_2 betrachtet und „Integralmittel“ genannt. Charakteristische Eigenschaft der Integralmittel ist die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(m_{01}, m_{02}, m_{12}, m_{23}) = (m_{23}, m_{31}, m_{03}, m_{01})$, wo $m_{hk} = M(x_h, x_k)$; das entspricht dem Desargueschen Satze, wenn folgende geometrische Deutung betrachtet wird: an der Kurve $y = F(t)$ [$F'(t) = f(t)$] ist $M(x_1, x_2)$ die Neigung der Sehne $P_1 P_2$ [$P_i = (t_i, y_i)$, $x_i = f(t_i)$] = Neigung der Tangente in P_i .

B. de Finetti.

Obreschkoff, Nikola: Über Integraldarstellungen reeller Funktionen auf den positiven Halbgeraden. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. I.—18. I. 1953, 197—202 (1953).

Verf. beweist einen Satz vom Typus des Bernsteinschen: Es besitzt $f(x)$, $x \geq 0$, Ableitungen $f^{(n)}(x)$ jeder Ordnung $n \geq 0$ mit $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ genau dann, wenn $f(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt) dw(t)$, wobei $w(t)$ nicht fallend und beschränkt ist für $t \geq 0$. Verf. ersetzt nämlich den „Kern“ $\exp(-x)$ durch $F(x) = \int_0^{+\infty} t^{d-1} \exp(-t - t^{-1}x) dt$, $x \geq 0$, wo $0 < d < 1$, d sonst beliebig, aber fest. Dann wird gezeigt: Es gestattet $f(x)$ die Darstellung $f(x) = \int_0^{+\infty} F(xt) dw(t)$ (für $x \geq 0$) genau dann, wenn $f(x)$ folgende Eigenschaften besitzt: Es existiert $f^{(n)}(x)$ für jedes $n \geq 0$ und $x > 0$ sowie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c \geq 0$; es ist $f(0) = f(0+)$. Ferner ist $f_n(x) \geq 0$, $n \geq 0$, wobei $f_0(x) = f(x)$ und $f_n(x) = x f_{n-1}'(x) + (1-d) f_{n-1}'(x)$ für $n \geq 1$. Der Beweis nimmt Bezug auf einen Satz über Vorzeichen und infinitäres Verhalten von (beliebig, aber endlich vielen) Funktionen f_n , die nach obiger Rekursionsformel definiert sind ($0 \leq n \leq Q$), und die noch gewissen Bedingungen genügen. (Wegen des Beweises dieses Satzes wird auf ähnliche Beweise früherer Sätze verwiesen; vgl. dies. Zbl. 36, 33.) Außerdem wird ein Operator zur Lösung der Integralgleichung $f(x) = \int_0^{+\infty} F(xt) g(t) dt$ bei in jedem endlichen Intervall summierbarem $g(t)$ angegeben; es wird nämlich gezeigt: Es konvergiere $\int_0^{+\infty} F(xt) g(t) dt$ für ein $x = b > 0$. Dann gilt $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(2n) n^{-d+1} a^{-n-1} f(a^{-1} n^2) = 2\pi g(a)$ für jedes $a > 0$ mit $\int_a^x |g(t) - g(a)| dt = o(x-a)$ bei $x \rightarrow a$.

Otto Haupt.

● **Roy Pastor, J.:** Elementes de la Theorie de la Fonction. 3. Aufl. Madrid-Buenos Aires: Ibero-Americana 1953. 560 S. [Spanisch].

L'ouvrage est essentiellement un traité des fonctions de variables réelles de conception classique, qui part de la coupure et s'arrête à la totalisation de Denjoy (sans qu'il soit question d'équations différentielles). Toutefois 66 pages sont consacrées aux fonctions d'une variable complexe. — Beaucoup de notions relativement modernes sont introduites; on trouve des exemples intéressants, souvent accompagnés de fines figures. Des résultats complémentaires sont indiqués sans démonstration, avec référence. Il y a aussi d'assez nombreux exercices. L'ouvrage peut rendre d'importants services. D'intéressantes notes terminent presque tous les chapitres; parmi elles, des notes historiques nous apprennent, par exemple, que les con-

litions d'analyticité de Cauchy-Riemann ont été données par d'Alembert en 1752, et que les symboles O et o sont dûs en réalité à Bachmann. Voici quelques-uns des sujets traités qui ne figurent pas toujours dans les ouvrages analogues. — Ch. I, une tentative pour faire entrer diverses notions de limite dans une même définition. — Ch. III, intéressants exemples de fonctions ayant une dérivée infinie sur un certain ensemble. — Ch. IV, notions sur les fonctions sphériques de Legendre. — Ch. V, définition axiomatique de l'aire et du volume. — Existence de l'intégrale de Riemann pour une fonction monotone. — Ch. VI, nombres de Bernoulli et d'Euler; théorèmes de Staudt et de Tauber. — Ch. VII, courbes de von Koch et de Peano. — Idéalistes et intuitionnistes. — Tiers exclu. — Ch. VIII, fonctions à variation bornée. — Familles compactes et normales. — Ch. IX, énoncés des théorèmes de Picard et de Julia; définition de l'ordre d'une fonction entière. — Fonctions monogènes de Borel. — Ultraconvergence. — Bibliographie assez importante sur les fonctions analytiques. — Les 3 derniers chapitres sont nettement plus originaux. Ch. X: espace de Hilbert réel et complexe, application aux séries de Fourier; fonctions orthogonales et polynômes remarquables. — Inégalités de Schwarz, Holder et Minkowski. — Séries trigonométriques, théorèmes de Riemann et de Fejér, relations entre séries trigonométriques et fonctions analytiques, moyennes de Césaro. — Espaces fonctionnels et de Hilbert. — Intégrales de Fourier. — Ch. XI: intégrale de Riemann-Stieltjes, intégrales impropres, absolument convergentes simples et doubles, critères d'Abel et de Dirichlet. — Ch. XII: axiomes de Peano des entiers; mesure dans E^n ; critères d'intégrabilité (R). — Fonction mesurable (définition de Lebesgue), intégrale de Lebesgue; théorèmes de F. Riesz et de Parseval. — Lemme de Fatou; exemple de Hausdorff. — Critères de mesurabilité. — Ensembles de Borel, fonctions de Baire. — Extensions diverses de l'intégrale de Lebesgue, idée de la totalisation. — L'ouvrage donne un peu l'impression d'un cours très élémentaire qui aurait subi des adjonctions successives l'amenant à son niveau actuel. A remarquer qu'il n'est nulle part question d'espace topologique, et que l'espace vectoriel n'intervient pas avant la p. 437 à propos de l'espace de Hilbert. — L'A. s'attache à donner d'abord chacune des définitions dans le cas d'une seule fonction d'une seule variable. Il en résulte parfois une certaine hétérogénéité: par exemple, pour une variable, la différentielle est définie comme étant l'expression $f'(x)dx$, et pour plusieurs variables comme une fonction linéaire de l'accroissement des variables qui approche suffisamment l'accroissement de la fonction. A propos des fonctions implicites, l'interprétation du jacobien comme déterminant de la transformation linéaire tangente semble passée sous silence.

R. de Possel.

● Rudin, Walter: Principles of mathematical analysis. (International Series in pure and applied Mathematics.) New York: McGraw-Hill 1953. 227 p. 37/6 d.

Das Buch ist offenbar für Leser gedacht, die schon einige Kenntnisse aus Differential- und Integralrechnung haben und nun ein geschlossenes, strenges Lehrgebäude dieser Disziplin kennenlernen sollen. Es behandelt dementsprechend größtenteils das, was auf unsern Hochschulen in einer Anfangsvorlesung an Infinitesimalrechnung geboten wird, geht aber in einigen Punkten bedeutend darüber hinaus. Wer das Buch durcharbeitet, wird sich nicht nur einen beachtlichen Grundstock an Sätzen, sondern auch die wichtigsten Beweismethoden angeeignet haben. Zahlreiche Gegenbeispiele sollen die Notwendigkeit von Voraussetzungen dem Anfänger zeigen. Eine größere Zahl von Aufgaben am Schluß jedes Kapitels soll teils zur Übung dienen, teils zur selbständigen Arbeit anregen. — In Kap. 1 werden die rationalen Zahlen vorausgesetzt, die reellen mittels Dedekindscher Schnitte und die komplexen auf die übliche Weise eingeführt. Das System der reellen Zahlen wird durch die beiden Zeichen $\pm \infty$ erweitert. Ref. hält die Definition $a \cdot 0 = -\infty$, wenn a positiv, für unzuverlässig. Jedenfalls führt ihre Verwendung in Theorem 4.27 zu einem Fehler. Kap. 2 enthält die Elemente der Mengenlehre, Überdeckungssatz von Heine-Borel, einiges über kompakte und über perfekte Mengen. Kap. 3: Folgen und Reihen komplexer Zahlen. Kap. 4: Stetige Funktionen. In Kap. 5, Differentiation, wird auch gezeigt, daß eine Ableitung jeden Zwischenwert annimmt. Kap. 6: Riemann-Stieltjes Integral. Zunächst wird $\int f(x) d\alpha(x)$ für monotone α mittels Ober- und Untersummen, dann aber als Grenzwert der „Riemannschen“ Näherungssummen auch für allgemeine α erklärt und gezeigt, daß dieses Integral existiert, wenn eine der beiden Funktionen f , α stetig und die andere monoton ist. Kap. 7, Folgen und Reihen von Funktionen, bringt auch den Weierstraßschen Satz über Approximation stetiger Funktionen durch Polynomfolgen und seine moderne Verallgemeinerung von Stone. Das 8. Kapitel enthält: Potenzreihen, Doppelreihensatz, Definition (mittels geometrischer Reihen) und Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, Fouriersche Reihen. Kap. 9, Funktionen mehrerer Veränderlicher, behandelt u. a. Auflösung von Gleichungssystemen (Umkehrfunktionen), implizite Funktionen, Abhängigkeit von Funktionen bei verschwindender Funktionaldeterminante. Das letzte, 10. Kap. ist der Lebesgueschen Integrationstheorie gewidmet. Sie wird für allgemeine Maßräume (Mengen, in denen ein σ -Ring von Untermengen gegeben ist, für die eine nichtnegative, vollständig additive Mengenfunktion definiert ist) entwickelt. Das Integral einer nichtnegativen Funktion f wird als obere Grenze der Maße von Summen endlich vieler Zylindermengen, deren Höhe nirgend größer als f ist (aber

natürlich nicht mit diesen Worten) eingeführt. Als Anwendungen wird der Parsevalsche Satz auf Funktionen der Klasse L^2 ausgedehnt und der Satz von Riesz-Fischer gezeigt. Die Beweise dieses letzten Kapitels sind teilweise nur skizziert, ganz einfache sogar weggelassen, einestils, um die Gedanken deutlicher hervortreten zu lassen, andererseits, weil der Lesers jetzt schon so viel Übung im Beweisen hat, daß er sie selbst ausführen kann. G. Lochs.

● Smirnow, W. I. (Smirnov, V. I.): **Lehrgang der höheren Mathematik. Teil I.** (Hochschulbücher für Mathematik. Band 1.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1953. XII, 413 S. mit 190 Abb.

Inhalt dieses ersten von geplanten 6 Teilen ist: I. Veränderliche Größen und funktionale Abhängigkeit. — II. Begriff der Ableitung und seine Anwendungen (Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitung und Differential erster und höherer Ordnung bei Funktionen einer Veränderlichen, Anwendung auf Funktionen von zwei Veränderlichen und die Geometrie). — III. Begriff des Integrals und seine Anwendungen (Unbestimmtes und bestimmtes Integral, Anwendungen, Weiterführung). — IV. Reihen und ihre Anwendungen auf die angenäherte Berechnung von Funktionen (Grundbegriffe, Taylorsche Formel, Weiterführung). — V. Funktionen von mehreren Veränderlichen (Ableitungen, Differentiale, Taylorsche Formel, Extrema). — VI. Komplexe Zahlen, Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen (u. a. rationale Funktionen und die Berechnung ihrer Nullstellen). — Die Bemühungen des Verf., die Begriffe „Funktion“ und „Grenzwert“ dem Anfänger möglichst anschaulich darzubieten, können nicht gerade als glücklich bezeichnet werden. So wirken die Begriffe „veränderliche Größe“ (wofür besser die Begriffe „Zahlenmenge“ oder „Definitionsbereich“ und „Wertebereich“ einer Funktion einzuführen wären), sowie „unendlich kleine Größen“ und „unendlich große Größe“ (Definition S. 47: „Die Größe x heißt unendlich groß oder gegen Unendlich strebend, wenn $|x|$ bei nacheinander erfolgender Veränderung größer wird als eine beliebig vorgegebene positive Zahl M und bei weiterer Veränderung auch bleibt“) oder die Erklärung (S. 347): „Das Produkt (zweier komplexer Zahlen) wird als die Zahl angesehen, die aus dem Multiplikanden so gebildet wird, wie der Multiplikator aus der Einheit“, eher geheimnisvoll als aufklärend, und manche Ausdrucksweise [z. B. S. 39: „wenn die Größe x unendlich klein wird“ oder „Wir betrachten als Beispiel einer unendlich kleinen Größe die Folge $q, q^1, q^2, \dots, q^n, \dots$ ($0 < q < 1$)“] mag für verwöhnte deutsche Leser ohne ausdrückliche Vorsicht ungenießbar sein oder sehr fremd klingen. Vielleicht wurde bei der Übersetzung aus dem Russischen doch nicht jene Freiheit geübt, die zum Wohlelingen einer solchen Übertragung nötig ist. Auf S. 113 z. B. steht der verstümmelte Satz: „Wir nehmen an, daß die Werte einer Funktion $f(x)$ bei denen der unabhängigen Veränderlichen x aus einem Intervall (a, b) betrachtet werden und daß verlangt sei, den größten und kleinsten von diesen Werten zu finden“. Schade, daß die Sprache des Buches sich nicht enger den Gepflogenheiten an deutschen Hochschulen anschließt; denn im übrigen ist die gemächlich kommentierende Breite der Darstellung, die Fülle des Stoffes und der Reichtum an Beispielen ein Novum. G. Aumann.

Allgemeine Reihenlehre:

Greiff Bravo, Luis de: **Das skalare Produkt bei der Multiplikation von Polynomen und Reihen.** *Revista Mat. element.* 2, 92—98 (1953) [Spanisch].

Tsuji, Masatsugu: **On the converse of Abel's theorem.** *J. math. Soc. Japan* 5, 81—85 (1953).

Hardy und Littlewood [*Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 22, 254—269 (1923)] bewiesen den Satz: Ist $f(x) = \sum a_n x^n$ regulär für $|x| < 1$, strebt $f(x) \rightarrow s$ für $x \rightarrow +1$ auf einer aus dem Innern des Einheitskreises nach $+1$ führenden Jordankurve, und gilt $a_n = O(1/n)$ für $n \rightarrow \infty$, so ist $\sum a_n$ konvergent. Verf. gibt einen neuen vereinfachten Beweis dieses Satzes. W. Meyer-König.

Zeller, Karl: **Transformationen des Durchschnitts und der Vereinigung von Folgenräumen.** *Math. Nachr.* 10, 175—177 (1953).

Ein BK -Raum ist ein Banachraum, dessen Elemente \mathfrak{x} Zahlenfolgen sind und in dem die Funktionale $f_k(\mathfrak{x}) = x_k$ ($\mathfrak{x} = \{x_k\}$) stetig sind. Für Matrixtransformationen $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ (d. h. $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$, wo die Transformation erklärt ist, wenn alle diese Summen konvergieren) beweist Verf. den Satz: Sind $\mathfrak{G}^{(i)}$ und $\mathfrak{G}^{(j)}$ BK -Räume mit $\mathfrak{G}^{(i)} \supset \mathfrak{G}^{(i+1)}$, $\mathfrak{G}^{(j)} \supset \mathfrak{G}^{(j+1)}$ ($i = 0, 1, \dots$) und bilden die Folgen $e_0 = \{1, 0, \dots\}$, $e_1 = \{0, 1, 0, \dots\}$, \dots in jedem $\mathfrak{G}^{(i)}$ eine Basis, so bildet eine Matrix A genau dann $\cap \mathfrak{G}^{(i)}$ in $\cap \mathfrak{G}^{(j)}$ ab, wenn es zu jedem j ein i gibt, so daß $\mathfrak{G}^{(i)}$ von A in $\mathfrak{G}^{(j)}$ abgebildet wird. Bei weiteren Sätzen dieser Art werden auch Vereinigungen von BK -Räumen betrachtet. Als Anwendung ergibt sich ein Beweis für einen Satz von I. M. Sheffer

Duke math. J. **11**, 167–188 (1944)], der genaue Bedingungen für Matrixtransformationen zwischen verschiedenen Folgenräumen \mathfrak{A} (mit $x \in \mathfrak{A}$, wenn $1/(\lim |x_k|^{1/k}) > r$) angibt. *A. Peyerimhoff.*

Zeller, K.: Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. der Math. **4**, 425–431 (1953).

Bei der Untersuchung von Limitierungsverfahren ist es oft wichtig, Grundmengen für das Wirkfeld zu kennen (wobei das Wirkfeld mit einer gewissen Topologie versehen sei); insbesondere treten die Fragen auf, ob die Folgen $e_0 = \{1, 0, \dots\}$, $e_1 = \{0, 1, 0, \dots\}, \dots$ eine Grundmenge bilden und ob für Elemente $a = \{a_i\}$ sogar eine Darstellung der Form $a = \sum a_i e_i$ gilt (hiermit stehen die Begriffe „Perfektheit“ und „Abschnittskonvergenz“ im Zusammenhang). Durch eine direkte Approximation zeigt Verf., daß die Folgen e_0, e_1, \dots für die Wirkfelder einer Klasse Euler-Knoppscher Reihentransformationen (in der Reihen-Reihen-Form) und für das Borelsche Verfahren \mathfrak{B}^* eine Grundmenge bilden. Für die Frage, wann im Wirkfeld eines Verfahrens eine Beziehung $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n h_{n,k} a_k e_k$ (d. h. $\sum a_i e_i$ ist H -summierbar zum Wert a) gilt, gibt Verf. einige gleichwertige Bedingungen an und zeigt, daß diese Beziehung für die Wirkfelder der Cesàro-Verfahren C_p ($p > 0$) gilt, wenn für H das Cesàro-Verfahren derselben Ordnung gewählt wird. Diese Tatsache ergibt sich als fast unmittelbare Folge aus dem Satz von Bohr-Hardy (das Zitat für diesen Satz ist nicht ausreichend, für beliebiges $p \geq 0$ vgl. Mosanquet, dies. Zbl. **28**, 1490). *A. Peyerimhoff.*

Zeller, K.: Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen. Math. Z. **59**, 271–277 (1953).

Eine Folge $\{x_n\}$ heißt C_1^q limitierbar zum Wert x , wenn gilt $\sum_{k=0}^n |x_k - x|^q = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) (starke C_1 -Limitierbarkeit q -ter Ordnung). Im ersten Teil der Arbeit werden für jedes $q \geq 1$ Matrixverfahren angegeben, die mit C_1^q äquivalent sind. Ferner wird für einen Satz von B. Kuttner [J. London math. Soc. **21**, 118–122 (1946)], der besagt, daß C_1^q für kein q mit $0 < q < 1$ einem Matrixverfahren äquivalent ist, ein kurzer Beweis erbracht. Ein zweiter Teil dient dem Beweis des Satzes, daß der Durchschnitt von permanenten und perfekten Matrixverfahren $A^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots$) keinem Matrixverfahren äquivalent ist, falls die Nullwirkfelder der $A^{(i)}$ eine monoton fallende Folge bilden und zu jedem j beliebig langsam wachsende Folgen existieren, die von $A^{(j)}$, aber nicht von allen $A^{(i)}$ zu Null limitiert werden. Als Anwendung wird gezeigt, daß das Verfahren $\bigcap_{a>a} C_a$ (C_a = Cesàro Verfahren) für kein $a > 0$ einem Matrixverfahren äquivalent ist. [Für $0 \leq a < 1$ hatte Verf. diese Tatsache früher bewiesen, vgl. Math. Z. **55**, 55–70 (1951)]. *A. Peyerimhoff.*

Tropper, A. Mary: A sufficient condition for a regular matrix to sum a bounded divergent sequence. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 671–677 (1953).

Es gibt permanente Matrixverfahren, die nur konvergente oder unbeschränkte Folgen limitieren, vgl. etwa Ref., Arch. der Math. **4**, 1–5 (1953). Verf. zeigt nun (Th. 2), daß eine permanente normale Matrix A eine beschränkte divergente Folge limitiert, wenn die beidseitige Inverse B nicht permanent ist und beschränkte Spalten hat. In Th. 3 wird eine etwas schwächere hinreichende Bedingung gegeben. Daß nur normale Matrizen betrachtet werden, bedeutet keine starke Einschränkung, da es zu jedem permanenten Matrixverfahren A ein normales Verfahren A^* gibt, das dieselben beschränkten Folgen zum selben Grenzwert wie A limitiert [Th. 1 und A. Brudno, Mat. Sbornik, n. Ser. **16**, 191–247 (1945)]. *K. Zeller.*

Altman, M.: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Mazur-Orlicz aus der Summationstheorie. Studia math. **13**, 233–243 (1953) [Russisch].

Mazur und Orlicz (dies. Zbl. **6**, 52) betrachteten Matrix-Limitierungsverfahren der Form $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_{n,k} e_k$ und stellten den folgenden Satz auf: Sind die Verfahren A und B permanent und limitiert B jede beschränkte A -limitierbare Folge, so sind A und B verträglich bezüglich beschränkter Folgen. Brudno [Mat. Sbornik, n. Ser. **16**, 191–247 (1945)] gab

den ersten Beweis dieses Ergebnisses; vgl. auch Ref., Math. Z. **53**, 463—487 (1951), dies. Zbl. **46**, 64. Verf. überträgt den Satz auf „stetige“ Verfahren der Form $\lim_{t \rightarrow t_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k(t) s_k$ und formuliert ein ähnliches Resultat für nulltreue Transformationen. Dabei setzt er voraus, daß die $a_k(t)$ stetig sind und daß $\lim_{t \rightarrow t_\infty} \sum_{k > m(t)} |a_k(t)| = 0$ für eine geeignete monotone Funktion $m(t)$ gilt. Die Voraussetzung bewirkt, daß die Menge der beschränkten A -limitierbaren Folgen in geeigneter Weise als B -Raum aufgefaßt werden kann. Verf. benützt die bis jetzt unveröffentlichte Beweismethode von Mazur und Orlicz.

K. Zeller.

Ščeglov, M. P.: Zur Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy-Littlewood. Ukrain. mat. Žurn. **5**, 299—303 (1953) [Russisch].

Bekanntlich sind die Verfahren C_1 (Cesàro) und A (Abel) gleich stark bezüglich des Raumes P der Folgen mit nichtnegativen Gliedern: siehe Hardy-Littlewood, Proc. London math. Soc., II. Ser. **13**, 174—191 (1913). Dies verallgemeinert Verf. Sei $\{s_n\}$ eine Folge aus P , ferner σ_n ihre C_1 -Transformierte, $\varphi(u)$ ihre Abeltransformierte (in der exponentiellen Form), $\lim \sigma_n = D$, $\lim \varphi(u) = D'$. Dann gilt: I. D und D' sind gleichzeitig endlich. II. $\inf_P \frac{D}{D'} = 1$, $\sup_P \frac{D}{D'} = e$ und weitere, ähnliche Beziehungen. III. Ist $\lim \sigma_n = D$, so gilt $D = D'$. IV. Es gibt eine Folge in P mit $D = D' < \lim \sigma_n$. V. Sind P_0 bzw. P_∞ die Unterräume von P mit $D = D' = 0$ bzw. $= \infty$, so gilt $\sup_{P_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{q(n-1)} = \sup_{P_\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{q(n-1)} = e$. Literatur: Verf., dies. Zbl. **42**, 68.

K. Zeller.

Kuttner, B.: A theorem on Riesz summability. J. London math. Soc. **28**, 451—461 (1953).

Man kennt in der Theorie der Riesz'schen Mittel (R, λ_n, α) zwei Arten von Vergleichssätzen: Beim „first theorem of consistency“ werden Verfahren mit verschiedenem α und gleichem λ_n betrachtet, beim „second theorem of consistency“ Verfahren mit gleichem α und verschiedenem λ_n . Der Verf. untersucht eine neuartige Fragestellung, nämlich die Beziehung zwischen dem Durchschnitt zweier Verfahren (R, λ_n, α) , (R, μ_n, α) und dem Verfahren (R, ν_n, α) ($\nu_n = c \lambda_n + d \mu_n$). Hier gilt folgender Satz: Ist $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ oder $\alpha = 1$, $\delta \geq 0$, so ist jede Reihe, die durch (R, λ_n, α) und (R, μ_n, α) zum Wert l summiert wird, auch (R, ν_n, α) summierbar zum Wert l . An Gegenbeispielen wird gezeigt, daß die Bedingung $\alpha \leq 1$ wesentlich ist. Es kann vorkommen, daß eine Reihe, die für ein beliebiges $\alpha > 1$ durch beide Verfahren zum gleichen Wert l summiert wird, nicht (R, ν_n, α') summierbar ist für jedes $\alpha' > \alpha$, oder auch (R, ν_n, α') summierbar ist zu einem Wert $l' \neq l$. Ferner wird gezeigt, daß der Satz falsch wird für $0 < \alpha < 1$, $\delta = 0$.

A. Peyerimhoff.

Hill, J. D.: Summability methods defined by Riemann sums. Canadian J. Math. **5**, 289—296 (1953).

Vorgegeben sei eine in $\langle 0, 1 \rangle$ eigentlich R -integrierbare reelle Funktion $f(x)$ mit $\int_0^1 f(x) dx = 1$, sowie eine Menge δ von Punkten x_k^n mit $(k-1)/n < x_k^n < k/n$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$). Dann heißt die Folge $\{s_n\}$ (R, f, δ) -summierbar zum Wert S , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k^n) s_k = S$ ist. Die Methoden (R, f, δ) werden miteinander und (z. T. ohne Beweis) mit den Cesàro-Verfahren (C, α) ($\alpha > 1$) verglichen. Z. B. wird bewiesen: a) Aus $(C, 1)\text{-}\lim s_n = S$ folgt $(R, f, \delta)\text{-}\lim s_n = S$ für beschränktes $\{s_n\}$. b) Damit bei festem $f(x)$ und beliebiger Menge δ aus $(C, 1)\text{-}\lim s_n = S$ stets $(R, f, \delta)\text{-}\lim s_n = S$ folgt, ist notwendig und hinreichend, daß $xf(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ schwankungsbeschränkt ist. c) Nimmt $f(x)$ monoton zu in

$\langle 0, 1 \rangle$, dann ist $(C, 1)$ äquivalent zu (R, f, δ) für jede Wahl von δ . d) Nimmt $f(x)$ monoton ab in $\langle 0, 1 \rangle$ und ist $f(1) > 1/2$, dann ist $(C, 1)$ äquivalent zu (R, f, δ) für jede Wahl von δ ; im Falle $f(1) = 1/2$ wird dies falsch. *D. Gaier.*

Chen, Kien-Kwong: Ikehara's theorem and absolute summability C . Acta math. Sinica 3, 8–10 u. engl. Zusammenfassg. 10–11 (1953) [Chinesisch].

In case of ordinary Dirichlet series, Ikehara's theorem is equivalent to the following

proposition. If the series $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ ($s = \sigma + it$) is absolutely convergent in the half-plane $\sigma > 1$, and the function $F(s)$ is continuous on the line $\sigma = 1$, then the condition $a_n > -K$ implies $\sum_{n=1}^x a_n = o(x)$. Wintner proved that the Tauberian condition $a_n > -K$ in Ikehara's theorem is never superfluous. Indeed, a fortiori, there exists a sequence a_1, a_2, \dots such that (i) $\sum a_n n^{-s}$ is absolutely convergent, when $\sigma > 1$, (ii) the function $\sum a_n x^n$ is of bounded variation in $(0, 1)$, (iii) $\sum_{n=1}^x a_n = o(x)$. In this note, I show that the existence of such a sequence a_1, a_2, \dots as satisfying (i), (ii) and (iii) is a corollary of the following Theorem. There exists a divergent series $\sum c_n$ which is summable (C, λ) for every positive order λ . Autoreferat.

Rajagopal, C. T.: On Tauberian oscillation theorems. Compositio math. 11, 71–82 (1953).

Mit einem nicht negativen und gewisse weitere Voraussetzungen erfüllenden Kern $\varphi(x, t)$ wird die reguläre Transformation $\Psi(x) = \int_0^{\infty} \varphi(x, t) s(t) dt$ (x reell und in jedem endlichen Teil des Intervalls $(0, \infty)$ von beschränkter Schwankung) gebildet und von $\Psi(x) = O(1)$ für $x \rightarrow \infty$ auf $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x)$ geschlossen, sofern die Tauber-Bedingung $\inf_{t \leq t' \leq T} (s(t') - s(t)) = o_x(1) \log \lambda$ bei $t \rightarrow \infty$ für $\lambda > 1$ erfüllt ist, in der t und T durch

$\lambda(T) = \lambda \cdot \lambda(t)$ gekoppelt sind und $\lambda(t)$ eine stetige, zunehmende, unbeschränkte Funktion ist, die über eine weitere Voraussetzung in Zusammenhang mit dem Kern φ steht. Verf. knüpft damit an Untersuchungen von J. Karamata (dies. Zbl. 17, 348; 27, 303), V. Ramaswami (dies. Zbl. 14, 360) und H. Delange (dies. Zbl. 39, 64) an. Der bewiesene Satz ist recht allgemein und enthält z. B. den folgenden Spezialfall: Aus $B(x) = \epsilon^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n / n! = O(1)$

für $x \rightarrow \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{n-m \leq n \leq n+\delta} (s_n - s_m) = o_x(\delta)$ für $\delta \rightarrow 0$ folgt $\text{osc } s_n = \text{osc } B(x)$. Weitere

Anwendungen. In einem analogen Satz ist $s(t)$ durch eine Folge s_n , $\varphi(x, t)$ durch $c_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$; $x > 0$), $\Psi(x)$ durch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) s_n$ ersetzt. Er ist parallel einem Satz von Vijayaraghavan (vgl. G. H. Hardy, Divergent series, Oxford 1949, Theorem 238, dies. Zbl. 32, 58). *W. Meyer-König.*

Delange, Hubert: Théorèmes taubériens pour les séries multiples de Dirichlet et les intégrales multiples de Laplace. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 70, 51–103 (1953).

Es werden Sätze Tauberscher Art, welche bis jetzt nur für Taylorsche Doppelreihen in Betracht gezogen waren, auf Laplacesche Integrale der Form $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x\mu - y\nu} s(\mu, \nu) d\mu d\nu$

und $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x\mu - y\nu} ds(\mu, \nu)$ mit der allgemeinen Konvergenzbedingung der Schmidtschen Form erweitert. Die Sätze, welche sich auf Stieltjesche Doppelintegrale beziehen, enthalten insbesondere entsprechende Sätze über Dirichletsche Doppelreihen; beispielsweise seien hier folgende erwähnt: Sei $0 < \lambda_{m-1} < \lambda_m \rightarrow \infty$, $0 < \mu_{n-1} < \mu_n \rightarrow \infty$, $\alpha = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}$, $\beta =$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$, $a_{m,n}$ reell und die Reihe $F(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \exp(-\lambda_m x - \mu_n y)$ konvergent und beschränkt für $x > 0$, $y > 0$. Falls $F(x, y) \rightarrow S$, wenn $(x, y) \rightarrow 0$ derart, daß $0 < \alpha < y/x < \beta$ bleibt und

$$\sum_{k=0}^n a_{m,k} \geq -K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^m a_{j,n} \geq -K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}$$

für jedes m und n erfüllt ist, dann ist $S - K(2 - \alpha - \beta) \leq \liminf S_{m,n} \leq \limsup S_{m,n} \leq S$, wobei m, n derart gegen unendlich streben, daß μ_n/λ_m und λ_m/μ_n beschränkt bleiben. — Der

Satz bleibt gültig, falls $a = 0$, $b = \infty$ ist und m, n beliebig gegen unendlich streben; ist insbesondere $\lambda_m \sim \lambda_{m+1}$ und $\mu_n \sim \mu_{n+1}$, dann folgt aus der Konvergenz von $F(x, y)$, bei $(x, y) \rightarrow 0$ die Konvergenz der Doppelreihe $\sum \sum a_{m,n}$. J. Karamata.

Čelidze, V. G.: Über die Multiplikation von Doppelreihen und Doppelintegralen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 19, 135—151 (1953) [Russisch].

Verf. überträgt bekannte Sätze über Reihenmultiplikation (vgl. K. Knopp, dies. Zbl. 31, 118 insbesondere S. 146f., S. 330f. des Buches) auf Doppelreihen. Dabei benützt er Zusatzvoraussetzungen über die Teilsummen und restringierte Summierbarkeit $C_\lambda(1, 1)$ (Cesàro) und A_λ (Abel). [Eine Doppelfolge s_{mn} heißt $C_\lambda(1, 1)$ -limitierbar, wenn die $C(1, 1)$ -Transformierte σ_{mn} einen Grenzwert besitzt für $m, n \rightarrow \infty$ unter der Nebenbedingung $\lambda^{-1} \leq m/n \leq \lambda$. Entsprechend wird A_λ erklärt.] Die Ergebnisse des Verf. lauten: Die Reihen $\sum \sum a_{ik}$ und

$\sum \sum b_{ik}$ seien konvergent, die Produktreihe $\sum \sum c_{ik}$ durch $c_{ik} = \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^k a_{pq} b_{i-p, k-q}$ definiert. I. Ist eine Ausgangsreihe absolut konvergent und hat die andere beschränkte Teilsummen, so ist die Produktreihe konvergent. II. Sind die Teilsummen A_{mn} und B_{mn} der Ausgangsreihen $= o(m+n)$, so ist die Produktreihe A_λ -summierbar für jedes $\lambda > 1$. III. Ist $A_{mn} = o(m+n)$ und B_{mn} beschränkt, so ist die Produktreihe $C_\lambda(1, 1)$ -summierbar. IV. In allen drei Fällen konvergiert die Produktreihe zum „richtigen“ Wert. — Verf. gibt auch die entsprechenden Ergebnisse für Integrale. K. Zeller.

Goddard, L. S.: Approximations to π by trigonometrical surds. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 308—312 (1953).

Two methods are described for the generation of sequences of approximations to π , one by a power series and the other by a continued fraction development for the series $\sin \theta \cos \theta \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2 \theta + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \sin^4 \theta + \dots\right)$. E. Frank.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Picone, Mauro: Allgemeine Gesichtspunkte zur Interpolation und einige durch sie angeregte Untersuchungen. Monatsh. Math. 57, 44—65 (1953).

Erweiterte Wiedergabe eines Vortrages, in welchem Verf. über seine neuen Untersuchungen berichtet. Vgl. hierzu die ausführlichen Referate in dies. Zbl. 45, 29; 48, 299. H. Bilharz.

Viola, Tullio: Sull'approssimazione delle funzioni continue. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 244—247 (1953).

Sono studiate alcune nuove proprietà di una classe di funzioni che intervengono in un procedimento di interpolazione introdotto da A. Ghizzetti [Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 80, 225—230 (1945)]. Data una funzione $f(x)$ con derivata continua ed indicato con $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni approssimanti $f(x)$, secondo Ghizzetti, l'A. indica in quali ipotesi la successione delle derivate $\{f'_n(x)\}$ converge ad $f'(x)$. La dimostrazione di questo teorema, e di altri risultati contenuti nella stessa nota, è stata data dall'A. in una memoria successiva (questo Zbl. 47, 68). C. Pucci.

Zuchovickij, S. I.: Über die beste Annäherung im Sinne P. L. Čebyševs eines endlichen Systems von unverträglichen linearen Gleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 327—342 (1953) [Russisch].

Verf. betrachtet die miteinander unverträglichen linearen Gleichungen $a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n = b_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$; $m > n$) und löst die Aufgabe, die Lösungen $x = (x_1, \dots, x_n)$ von $\max_k |a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n - b_k| = \min$ zu bestimmen, durch eine Art schrittweiser Annäherung, die nach endlich vielen Schritten zum Ziel führt (vgl. die Voranzeige dies. Zbl. 42, 299). Der Algorithmus, der sich im Raum der Koeffizienten geometrisch deuten läßt, wird an Beispielen vorgerechnet. Das Verfahren ist zur Bestimmung des Polynoms der „besten Annäherung“ zu einer gegebenen Funktion zu verwenden. Vgl. auch die vom Verf. nicht zitierte Arbeit von Ivanov (dies. Zbl. 44, 283). W. Hahn.

Šaginjan, A. L.: Einige Aufgaben der Theorie der besten Approximationen im Raume. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki, Nr. 3, 4—11 u. armen. Zusammenfassg. 12—13 (1952) [Russisch].

Es sei in einem durch glatte Flächenstücke mit beschränkter Krümmung begrenzten Bereich ein harmonisches Polynom n -ten Grades $H_n(P)$ gegeben und genüge der Ungleichung $|H_n(P)| \leq M$. Dann gilt in einem beliebigen Punkte des Bereichs $\partial^p H_n / \partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_p \leq M^p$ ($p = 1, 2, \dots$), worin die l_i irgendwelche Richtungen bezeichnen und die Konstante nur von p abhängt. Der Satz verallgemeinert eine von S. Bernštejn mitgeteilte Abschätzung für die ersten Ableitungen eines in der Kugel beschränkten Polynoms nach gewissen ausgezeichneten Richtungen; der Beweis benutzt Eigenschaften der Laplaceschen Kugelfunktionen. Verf. beweist mit Hilfe seiner Ungleichungen einen Satz (analog einem Theorem von de la Vallée-Poussin) in der folgenden Richtung: Ist $f(P)$ auf einer geschlossenen glatten Fläche stetig und nimmt die beste Annäherung durch harmonische Polynome hinreichend stark ab, so ist $f(P)$ Grenzwert einer im Innern des Bereichs regulären Funktion $F(P)$, für die die Stetigkeitsmoduln der p -ten Ableitungen abgeschätzt werden können. — Ein weiterer Satz liefert eine Aussage in umgekehrter Richtung: Ist $F(P)$ im Inneren einer Kugel harmonisch und hat $\partial^p F / \partial l^p$ den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$, so gilt für die beste Annäherung $E_n(f) < (n^{-1} \log n)^p \omega(n^{-1} \log n)$.
W. Hahn.

Ronkin, K. I.: Über die Approximation ganzer Funktionen durch trigonometrische Polynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 887—890 (1953) [Russisch].

Mitteilung von Sätzen über ganze Funktionen endlichen Grades σ . 1) Eine Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$, die für reelle x_i beschränkt ist, kann durch trigonometrische Polynome, deren Grade bezüglich x_i ($i = 1, \dots, n$) höchstens gleich σ sind, in jedem endlichen reellen Gebiet gleichmäßig approximiert werden. (Verallgemeinerung eines Satzes von Levitan, dies. Zbl. 16, 298.) An Stelle der Bedingung $\sup F < M$ kann auch die Majorisation durch gewisse Funktionen treten. Unter σ ist die Bildung $\sigma = \limsup_{|z_1| + \dots + |z_n| \rightarrow \infty} (|z_1| + \dots + |z_n|)^{-1} \log F$ mit $|z_1| + \dots + |z_n| \rightarrow \infty$ zu verstehen. 2) Es sei $\beta(t_2) \leq \beta(t_1)$ für $|t_2| \leq |t_1|$ und $\int_0^\infty (1+t^2)^{-1} \log \beta(t) dt$ endlich. Ferner sei $\alpha(t) \sim \beta(t)$. Dann existiert zu gegebenem σ eine ganze Funktion $\Phi(z)$ des Grades $\leq \sigma$ derart, daß $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(\lambda x) \alpha(x) = 0$ für $|x| \rightarrow \infty$, λ beliebig reell.
W. Hahn.

Ganzburg, I. M.: Über die Approximation von Funktionen von gegebenem Stetigkeitsmodul durch P. L. Cebyschev-Summen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1253—1256 (1953) [Russisch].

Es sei die Klasse H_ω gebildet aus den in $-1 \leq x \leq +1$ definierten Funktionen $f(x)$, für die $|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|)$ ist; dabei genügt der Stetigkeitsmodul $\omega(t)$ der Bedingung $\sum_{k=1}^n k^{-1} \omega(k n^{-2}) = O(\omega(n^{-1}))$. Es sei ferner $s_n(f, x)$ die n -te Näherungssumme der nach Tschebyscheffschen Polynomen $\cos n \arccos x$ fortschreitenden verallgemeinerten Fourier-Reihe von $f(x)$. Dann ist, wie Verf.

beweist, $\sup |f(x) - s_n(f, x)| = \frac{2 \log n}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{4u}{2n+1} \sqrt{1-x^2}\right) \sin u du + O(\omega(n^{-1}))$.

(Verallgemeinerung eines Ergebnisses von A. F. Timan, dies. Zbl. 42, 70.)
W. Hahn.

Ganzburg, I. M.: Über gewisse Methoden der Approximation summierbarer Funktionen durch Polynome. Ukrain. mat. žurn. 5, 304—311 (1953) [Russisch].

Es sei $f(x)$ eine summierbare periodische Funktion, $S_n(f, x)$ die n -te Partialsumme ihrer Fourier-Reihe und

$$t_n(f, x) = \frac{1}{3} \left(S_n(f, x) + S_n\left(f, x + \frac{4\pi}{3(2n+1)}\right) + S_n\left(f, x - \frac{4\pi}{3(2n+1)}\right) \right).$$

Verf. beweist, daß $\lim t_n(f, x) = f(x)$ an jedem Lebesgue-Punkt x der Funktion $f(x)$ ist, indem er t_n und die Differenz $t_n - f$ als Integrale darstellt, das

Integral in geeigneter Weise zerlegt und die einzelnen Summanden abschätzt. Als Anwendung wird die für $f \in L^r$, $r > 1$, bekannte Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n |S_r(f, x) - f(x)|^k = 0 \quad (\text{fast überall})$$

auf eine allgemeinere Klasse ausgedehnt, wobei die Ungleichung $2^{-k} |S_n - f|^k \leq \frac{1}{2} (|S_n - t_n|^k + |t_n - f|^k)$ benutzt wird. W. Hahn.

Timan, A. F.: Approximative Eigenschaften der linearen Summationsmethoden der Fourierreihen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **17**, 99—134 (1953) [Russisch].

Ausführliche Darstellung mit Beweisen der Ergebnisse des Verf., die in einer früheren Note mitgeteilt wurden (vgl. dies. Zbl. **46**, 295). B. Sz. Nagy.

Šajdukov, K.: Über die Vollständigkeit eines gewissen trigonometrischen Systems. *Uspechi mat. Nauk* **8**, Nr. 6 (58), 143—153 (1953) [Russisch].

Auf dem Wege über ein unendliches lineares Gleichungssystem und Determinantenabschätzungen wird für $\alpha \leq \frac{2}{3}$ die Vollständigkeit, für $\alpha > \frac{3}{4}$ die Unvollständigkeit des Funktionensystems $\{\cos(k - \alpha)x, \sin(k + \alpha)x\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) im $L^2(-\pi, \pi)$ bewiesen. Nach Ref., dies. Zbl. **35**, 196, insbesondere S. 47 dieser Arbeit, ist das System für $\alpha < \frac{3}{4}$ vollständig. F. W. Schäfke.

Freud, Géza: Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **4**, 127—134 und russ. Zusammenfassg. **135** (1953).

Siano $\{P_n(x)\}$, $-1 \leq x \leq +1$, $n = 0, 1, \dots$, i polinomi ortonormalizzati relativi alla funzione-peso $w(x)$. Se $f(x) \in L^2_w$, poniamo: (1) $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$. L'A. dà dei teoremi che assicurano la convergenza assoluta della serie (1): per

la (1) è richiesta la condizione (2) $\sum_{r=0}^n |P_r(x)|^2 = O(n)$, e per la $f(x)$ sono richieste

condizioni analoghe a quelle dei noti teoremi di S. Bernstein (questo Zbl. **9**, 251), G. H. Hardy e J. E. Littlewood [*J. London math. Soc.* **3**, 250—253 (1928)], A. Zygmund [*J. London math. Soc.* **3**, 194—196 (1928)], per es. la

seguente: $f(x)$ sia continua in $(-1, +1)$, e converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^*(1/n, f)}{1/n}$

$\omega^*(\delta, f) = \max_{|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta} |f(\cos \theta_1) - f(\cos \theta_2)|$. L'A. già provò (questo Zbl. **47**, 305)

che la (2) è valida uniformemente per gli x di ogni intervallo interno a (c, d) , $-1 \leq c < d \leq +1$, quando sia $w(x) \geq m > 0$ per $c \leq x \leq d$, e prova ora che la (2) è valida uniformemente per $-1 \leq x \leq +1$ quando sia $w(x) > m(1 - x^2)^{-1}$, $m > 0$. A. Zitarosa.

Alexits, Georges: Sur la sommabilité des séries orthogonales. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **4**, 181—188 und russische Zusammenfassg. **189** (1953).

Let $\{q_n(x)\}$ ($a \leq x \leq b$) be an orthonormal system of L^2 functions and let $L_n^{(i)}(x)$ ($i = 0, 1$) denote the n^{th} Lebesgue function associated with the (C, i) summation. Using a modification of the Kolmogoroff-Seliverstoff method on the convergence of Fourier series the author proves the following result: Let E be a subset of (a, b) such that either $L_n^{(0)}(x) \leq \text{const.}$ or else $L_n^{(1)}(x) \leq \text{const.}$ is satisfied for every $n = 0, 1, 2, \dots$ and every $x \in E$. Then $\sum_{n=0}^{\infty} c_n q_n(x)$ with $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ is almost everywhere $(C, 1)$ summable on E . According to a well known theorem of A. Zygmund this implies the (C, α) summability for every $\alpha > 0$ of the series in question almost everywhere on E . The word „uniformément“ has several meanings in the proofs. In particular in the reasoning on the lower half of p. 184 and at the end of p. 188 „uniformément“ means uniformly in $n \rightarrow \infty$ but not necessarily in $x \in (a, b)$. In another section of the paper the author generalizes the orthonormal systems of J. Walsh and A. Haar. Let $\{\psi_r(x)\}$ ($a \leq x \leq b$) be a sequence of bounded measurable functions satisfying

$$\int_a^b \psi_{r_1}(x) \psi_{r_2}(x) \dots \psi_{r_p}(x) dx = 0$$

or every $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p$ and $p \geq 1$ unless the integrand is a square. In the last case let the integral be 1. The author defines the following generalization of the Walsh system: Let $\varphi_0(x) = 1$ and let $\varphi_n(x) = \varphi_{r_1}(x) \dots \varphi_{r_p}(x)$ for $n = 2^{r_1} + \dots + 2^{r_p}$ ($r_1 < \dots < r_p$). If $\varphi_r(x) = 1$ ($r \geq 1$) then the Lebesgue function of order 2^n of the system $\{\varphi_n(x)\}$ can be calculated exactly: $L_{2^n}(x) = 1$. Hence the main result of the paper can be applied to the system $\{\varphi_n(x)\}$. I. S. Gál.

Stečkin, S. B.: Über den Satz von Kolmogorov-Seliverstov. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **17**, 499—512 (1953) [Russisch].

Nach Kolmogorov und Seliverstov [*C. r. Acad. Sci., Paris* **178**, 303—306 (1924) und *Atti Acad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VI, Ser. **3**, 307—310 (1926)] ist die Fourierreihe einer Funktion $f(x) \in L^p(-\pi, \pi)$ fast überall konvergent, wenn die Fourierkoeffizienten der Beziehung $\sum (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$ genügen. Nach Plessner [*J. reine angew. Math.* **155**, 15—25 (1926)] ist letztere Bedingung äquivalent mit $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{t} dt dx < \infty$.

Verf. nennt drei weitere gleichbedeutende Bedingungen und stellt mit Hilfe dieser lokalisierte Formen des obengenannten Satzes auf, z. B.: Ist $f(x) \in L(-\pi, \pi)$, $f(x) \in L^2(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ und $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \omega^2 \left(\frac{1}{n}, f, a, b \right) \right\}^2 < \infty$, so ist die Fourierreihe fast überall in (a, b) konvergent.

Hier ist $\omega^2(\delta, f, a, b) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^b |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx \right\}^{1/2}$. Bei den beiden anderen Bedingungen wird ein ähnlicher Integralausdruck verwendet, wobei zwischen den Betragstrichen Differenzen zweiter Ordnung bzw. $f(x) - s_{n-1}(x)$ auftreten.) Vgl. auch das nachstehende Referat. K. Zeller.

Ul'janov, P. L.: Verallgemeinerung eines Satzes von Marcinkiewicz. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **17**, 513—524 (1953) [Russisch].

Marcinkiewicz [*Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat.* **8**, 239—240 (1939)] bewies: Ist $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ ($1 \leq p \leq 2$) und $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} dt dx < \infty$,

so konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ fast überall. Verf. zeigt, daß dieser Satz „lokalisiert“ werden kann: Ist $f(x) \in L(0, 2\pi)$, $f(x) \in L^p(a, b)$ ($1 \leq p \leq 2$) und

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^p}{t} dt dx < A(\varepsilon) < \infty \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0,$$

so konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ fast überall in (a, b) . Im Falle $p = 2$ kann die Integralbedingung in eine einfachere Form gebracht werden, die der Ungleichung $\sum (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$ entspricht; vgl. die oben referierte Arbeit von Stečkin, wo ausschließlich der Fall $p = 2$ behandelt wird. K. Zeller.

Ul'janov, P. L.: Über gewisse äquivalente Konvergenzbedingungen für Reihen und Integrale. *Uspechi mat. Nauk* **8**, Nr. 6, 133—141 (1953) [Russisch].

Verf. zeigt, daß $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx dt$ und $\sum (a_k^2 + b_k^2) \omega(k)$, wo a_k und b_k die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ sind, gleichzeitig konvergieren, wenn entweder Bedingung I oder Bedingung II erfüllt ist: I. $\alpha(t) \geq 0$, $\alpha(t) \downarrow$, $\int_0^{2\pi} \alpha(t) dt = \infty$, $\delta^{-2} \int_0^\delta t^2 \alpha(t) dt \leq C \int_0^{2\pi} \alpha(t) dt$ für alle genügend kleinen $\delta > 0$ mit festem C . Die Folge $\omega(k)$ ist definiert durch $\omega(k) = \int_0^{1/k} \alpha(t) dt$. II. $\omega(k) \uparrow \infty$, $k(k+1) \{\omega(k+1) - \omega(k)\}^2 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\omega(k)}{k^2} \leq C \frac{\omega(m)}{m^2}$ für alle $m \geq 1$ mit festem C .

Die Funktion $\alpha(t)$ ist definiert durch $\alpha(t) = 0$ für $1 \leq t \leq 2\pi$, $\alpha(t) = k(k+1) \times \{\omega(k+1) - \omega(k)\}$ für $1/(k+1) < t \leq 1/k$ ($k \geq 1$). Der Spezialfall $\alpha(t) = 1/t$, $\omega(k) = \ln k$ stammt von Plessner. *J. reine angew. Math.* **155**, 15—25 (1926). Vgl. auch die beiden vorsteh. Referate. K. Zeller.

Jurkat, W. und A. Peyerimhoff: Der Satz von Fatou-Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz. Arch. der Math. 4, 285—297 (1953).

Eine Folge $a_n (n = 0, 1, \dots)$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_n - a_{n+1}| < \infty$ ist. $x_n = a(y_n)$ heißt, daß von einer Stelle an $x_n = z_n y_n$ ist mit absolut konvergenter Folge z_n .

Die p -te Differenz der Folge b_n wird durch $\bar{\Delta}^p b_n = \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} (-1)^r b_{n-r}$ (mit $b_k = 0$ für $k < 0$) gegeben. Satz 1 (Absoluter Fatouscher Satz): Erfüllen die Koeffizienten der Potenzreihe (1) $f(z) = \sum a_n z^n$ für ein ganzes $p \geq 0$ die Bedingung $\bar{\Delta}^p a_n = a(1)$, woraus die Konvergenz von (1) mindestens für $|z| < 1$ folgt, und ist (1) regulär bei $z = 1$, so ist $\sum |a_n| < \infty$. Dies ist für $p = 0$ das absolute Analogon eines bekannten Satzes von Fatou. Zum Beweis werden Hilfsmittel, die bei Fourier-Reihen üblich sind, benützt. — Die Reihen $\sum a_n$, $\sum b_n$ heißen absolut äquikonvergent, wenn $\sum |a_n - b_n| < \infty$ ist. Abkürzung: $A_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + a'_n \sin n\varphi$, entsprechend $B_n(\varphi)$. Mit Hilfe von Satz 1 wird bewiesen Satz 2 (Absoluter Riemannscher Lokalisationssatz): Zwei trigonometrische Reihen $a_0/2 + \sum A_n(\varphi)$ und $b_0/2 + \sum B_n(\varphi)$ sind genau dann für alle φ absolut äquikonvergent, wenn gilt: (a) Für ein ganzes $p \geq 0$ ist $\bar{\Delta}^p(a_n - b_n) = a(1)$, $\bar{\Delta}^p(a'_n - b'_n) = a(1)$; (b) es gibt eine integrierbare periodische Funktion, deren formal $(p+2)$ -mal differenzierte Fourier-Reihe überall absolut konvergiert und die in einem Intervall $|\varphi| \leq \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \pi$) mit der Summe der wegen (a) überall absolut konvergenten $(p+2)$ -mal formal (ohne Integrationskonstanten) integrierten Reihe $(a_0 - b_0)/2 + \sum (A_n(\varphi) - B_n(\varphi))$ übereinstimmt. Die Lokalisation besteht darin, daß es sich bei (b) nur um ein beliebig kleines Intervall handelt. Auf analoge Weise kann der gewöhnliche Riemannsche Lokalisationssatz aus dem gewöhnlichen Fatouschen Satz gewonnen werden. — Aus Satz 2 werden verschiedene Folgerungen gezogen, z. B. werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die absolute Konvergenz einer trigonometrischen Reihe hergeleitet, die dann ihrerseits zu Verschärfungen des Satzes 1 führen, ferner wird ein Analogon zu den Riemannschen Formeln bei absoluter Konvergenz aufgestellt.

W. Meyer-König.

Yano, Shigeki: A remark on absolute Cesàro summability of Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 194—195 (1953).

Der Verf. beweist mit Hilfe des Satzes von Banach und Steinhaus: Für Funktionen $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ ($p \geq 1$) ist die $|C, p^{-1}|$ -Summierbarkeit ihrer Fourierreihe an einer Stelle x_0 keine lokale Eigenschaft von $f(x)$ an x_0 . Für $p = 1$ stammt diese Aussage von Bosanquet und Kestelman (dies. Zbl. 20, 354), für $p \geq 1$ von Foà (dies. Zbl. 23, 220); vgl. auch T. Tsuchikura, Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 302—312 (1954).

D. Gaier.

Morduchow, Morris: Integral and equal division sums. Math. Mag. 27, 65—68 (1953).

The main result proved is: if the complex Fourier series $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_r \exp(i r x)$ of a function $f(x)$ defined on $[0, 2\pi]$ converges uniformly to the function on $[0, 2\pi]$,

then the function equation $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f\left(\frac{2\pi}{m} j\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ holds for an integer m if,

and only if, $\sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_r m = 0$.

V. S. Krishnan.

Wolibrun, W.: Sur certains corollaires du théorème de Titchmarsh. Studia math. 14, 107—110 (1953).

Se $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |a_h|^2 < +\infty$, $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |b_h|^2 < +\infty$, e (1) $c_h = \pi a_h b_h + \sum_{k \neq h} \frac{a_k b_k - a_h b_k - a_k b_h}{i(k-h)} = 0$ per $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, allora (2) $a_h = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{h+2k+1}}{2k+1}$ per $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, oppure

(3) $b_h = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{b_{h+2k+1}}{2k+1}$ per $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Infatti, posto $f(x) \sim \sum_{h=-\infty}^{+\infty} a_h e^{ihx}$, $g(x) \sim \sum_{h=-\infty}^{+\infty} b_h e^{ihx}$, $H(x) \sim \sum_{h=-\infty}^{+\infty} c_h e^{ihx}$, nell'intervallo $(0, 2\pi)$, per la (1) si ha $H(x) = f(x) * g(x)$, e per un teorema di Titchmarsh dalla ipotesi $H(x) = 0$ in $(0, 2\pi)$ [equivalente alla (1)]

que $f(x) = 0$ in $(0, \pi)$ ovvero $g(x) = 0$ in $(0, \pi)$ [relazioni equivalenti risp. alla (2) e (3)]. —
 sarebbe desiderabile una dimostrazione diretta di questo teorema, di cui si considerano alcuni
 rollari.

F. Bertolini.

Edmonds, Sheila M.: The Parseval formulae for monotonic functions. IV.
 Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 218—229 (1953).

Fortsetzung dreier gleichbenannter Arbeiten des Verf.; Berichte darüber, in denen auch
 er benutzte Zeichen erklärt sind, s. dies. Zbl. 29, 46; 38, 216, 217. Im folgenden bedeute E
 eine bestimmte Zahl $< \infty$; weiter sei

$$\int_0^x F_e(x) G_e(x) dx = \hat{H}_e(\xi, X), \quad \int_0^T f(t) g(t) dt = h(\tau, T) \text{ und kurz } \hat{H}_e(0, \infty) = H_e, \quad h(0, \infty) = h.$$

frühere Ergebnisse des Verf. legen hinsichtlich der Parsevalschen Formel (P. F.) Vermun-
 gen nahe, die auf Sinusbilder auch zutreffen, bei Cosinusbildern aber hier von ihm in vielen
 allen widerlegt werden, z. B. der Glaube, daß die P. F. $H_e = h$ gelte, wenn $f(t)$ und $g(t)$
 in $(0, \infty)$ (einsinnig) zu 0 abnehmen. Als Gegenbeispiel gibt er ein solches Funktionenpaar
 f, g an, daß $h = -\infty$ ist, $\hat{H}_e(\xi, X)$ jedoch nicht zu $-\infty$ strebt, wenn $\xi > 0$ nach 0 hin
 und $X \rightarrow \infty$ läuft, $g(t)$ ist eine Potenz, $f(t)$ eine Treppenfunktion mit geeigneter Stufenbreite
 und -höhe; wegen der Einzelheiten des Ansatzes muß auf die Abh. selbst verwiesen werden.
 Es zeigt sich, daß dann, kurz gesprochen, $h = -\infty$, aber $H_e = -\infty$ ist. — Ebenso wenig
 braucht die P. F. richtig zu sein, wenn $f(t)$ und $G_e(x)$ in $(0, \infty)$ zu 0 abnehmen und $h = \infty$

ist. — Was Reihen $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $g(x) = \frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos nx$ als Seitenstücke
 zu Bildintegralen angeht, so gibt es, wie Verf. zeigt, zwei hinschwindende Folgen $\{a_n\}$, $\{x_n\}$

der Art, daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = -\infty$ ist, daß aber $h(\delta, 2\pi - \delta)$ mit $\delta \rightarrow 0$ nicht zu ∞ strebt. — Ob
 in Falle $H_e = E$ die P. F. gilt, wenn f und g zu 0 abnehmen, bleibt unentschieden. Dagegen
 örtert Verf. noch einen Fall, in dem $h(0, T)$ für $T \rightarrow \infty$ nicht einem E zustrebt, obwohl
 $f(t)$ in $(0, \infty)$ gegen 0 abnimmt, $F_e(x)$ zu $L(0, 1)$ und $F_e(x) G_e(x)$ zu $L(0, \infty)$ gehört.

L. Koschmieder.

Hirschman jr., I. I.: A convexity theorem for certain groups of transforma-
 tions. J. Analyse math. 2, 209—218 (1953).

Verf. knüpft an Arbeiten von M. Riesz [Acta math. 49, 465—497 (1927)] und G. O.
 Thorin (dies. Zbl. 34, 204) an und arbeitet beim Beweis seines Hauptsatzes mit denselben
 Hilfsmitteln. Ist $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ und $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$, so werde $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
 beschrieben. $\lambda_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ sei eine gegebene Folge reeller Konstanten; mit ihr

werde $A(\sigma) f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n \sigma} c_n e^{inx}$ gesetzt ($-\infty < \sigma < \infty$). Satz 1: Für jede Funktion $g \in L^p(0, 2\pi)$
 und $h \in L^q(0, 2\pi)$ sei $\|A(\tau) g\|_p \leq A(\tau) \|g\|_p$, $\|A(\tau) h\|_q \leq A(\tau) \|h\|_q$, wobei für jedes $a > 0$
 gilt $\log A(\tau) = O(e^{a\tau})$ für $\tau \rightarrow \infty$; ist dann $0 < \Theta < 1$, $\sigma = \sigma_1 \Theta$, $n^{-1} = (1 - \Theta) p^{-1} + \Theta q^{-1}$,
 so ist $\|A(\sigma) f\|_p \leq B \|f\|_p^{1-\Theta} \|A(\sigma_1) f\|_p^{\Theta}$, wobei B von den λ_n , σ_1 , p , q und Θ , aber nicht
 von f abhängt. Von den Folgerungen sei genannt Satz 2: Sei $f(z)$ ($z = q e^{i\theta}$) eindeutig regulär
 für $\varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2$, und ferner $\log \varrho_0 = (1 - \Theta) \log \varrho_1 + \Theta \log \varrho_2$, $n^{-1} = (1 - \Theta) p^{-1} + \Theta q^{-1}$
 $0 < \Theta < 1$; $1 \leq p, q \leq \infty$; dann gilt $M_p(f, \varrho_0) \leq M_p(f, \varrho_1)^{1-\Theta} M_q(f, \varrho_2)^{\Theta}$. Dabei ist $M_r(f, \varrho)$

durch $[(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^r d\theta]^{1/r}$ erklärt. Zum Schluß wird Satz 1 auf abstrakte Form ver-
 allgemeinert. W. Meyer-König.

Berkeš, Branko: Fouriersche Reihe und Laplacesche Transformation. Soc. Sci.
 Natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 196—211 und kroatische
 Zusammenfassg. 212 (1953).

Nach ausführlichen theoretischen Erläuterungen werden für 66 periodische
 Funktionen, deren Kurvendarstellungen sich aus geraden Stücken, Kreisbogen
 und dergleichen zusammensetzen, einerseits ihre Fourierreihen, andererseits
 ihre Laplace-Transformierten angegeben.

G. Doetsch.

Shapiro, Victor L.: A note on the uniqueness of double trigonometric series.
 Proc. Amer. math. Soc. 4, 692—695 (1953).

Generalizing a result of M. T. Cheng (this Zbl. 38, 220), the author proves
 the following theorem. If a double trigonometric series $\sum a_M e^{MX}$ (where M and X
 are vectors) satisfies the conditions: (i) $a_M = o(|M|^{-\epsilon})$, $\epsilon > 0$, (ii) the series is

circularly summable $(C, 1)$ to zero everywhere, and (iii) $F(X) = a_0(x+y)^2/4 - \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |M| \leq R} (a_M/|M|^2) e^{iMX}$ is continuous on the complement of an enumerable plane set of points, then the series vanishes identically. *K. Chandrasekharan*

Spezielle Funktionen:

● **Lebedev, N. N.:** *Spezielle Funktionen und ihre Anwendungen.* (Physikalisch-mathematische Bibliothek des Ingenieurs.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 480 S. R. 12,— [Russisch].

In dem vorliegenden Buch werden folgende spezielle Funktionen behandelt: I -Funktion (B -Funktion), Fehlerfunktion (die Funktionen erf, Fresnelsche Integrale), Integralsinus (Si, Ci, Ei), Integrallogarithmus, die Polynome von Legendre, Laguerre, Hermite, Zylinderfunktionen, Kugelfunktionen, Hypergeometrische Funktionen, Funktionen der parabolischen Zylinder. Von allen diesen Funktionen findet man hier die wichtigsten Eigenschaften, asymptotische Entwicklungen, Entwicklungssätze unter für die Anwendung bequemeren Voraussetzungen usw. Die Anwendungen umfassen die meisten Gebiete der theoretischen Physik, wobei oft auch speziellere Dinge erörtert werden, wie z. B. Randwertaufgaben für den Torus. Am Ende jedes der 10 Kapitel finden sich genaue Hinweise auf Tabellenwerke sowie Übungsaufgaben. Die Lektüre des Werkes erfordert sehr wenig Vorkenntnisse, da alle breit ausgeführt wird. Durch geschickte Auswahl des Stoffes gelingt es, eine gute Einführung in das sehr ausgedehnte Wissensgebiet zu geben. *K. Prachar.*

Humbert, P. et R. P. Agarwal: *Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques unes de ses généralisations.* Bull. Sci. math., II. Sér. 77, 180—185 (1953).

Ableitung von Eigenschaften der Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m / \Gamma(m\alpha + 1)$ und ähnlich gebauter Funktionen auf dem Wege über ihre symbolischen Bilder (Laplace-Transformierte). *G. Doetsch.*

Freud, G.: *Über einen Satz von P. Erdős und P. Turán.* Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 255—266 und russische Zusammenfassg. 266 (1953).

Untersuchungen über die Nullstellenverteilung von Orthogonalpolynomen bei festem Intervall, insbesondere Abschätzung des Abstandes benachbarter Nullstellen. Bedeutung der Resultate bei numerischer Quadratur.

E. J. Nyström.

Dougall, John: *The product of two Legendre polynomials.* Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 121—125 (1953).

Darstellung der Koeffizienten A_{2k} in der bekannten Darstellung $P_p(z)P_q(z) = A_0P_{p+q}(z) + A_2P_{p+q-2}(z) + \dots$ durch das Integral

$$I_k = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\alpha - \beta))^k (1 - \cos \alpha)^{p-k} (1 - \cos \beta)^{q-k} d\alpha d\beta \\ = 4\pi^2 2^{k-p-q} (2k)! (k!)^{-2} (2p-2k)! ((p-k)!)^{-2} (2q-2k)! ((q-k)!)^{-2}.$$

O. Volk.

Kanter, L. H.: *On a separation theorem for the zeros of the ultraspherical polynomials.* Proc. Amer. math. Soc. 4, 729—733 (1953).

In $[-1, 1]$ seien $P_n(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{[n/2]} k_{n-2j}(\lambda) x^{n-2j} = (-1)^n P_n(-x, \lambda)$ die zum Gewichte $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$ mit $\lambda > 1/2$ gehörigen Gegenbauerschen Polynome (G. P.) mit den Vorzahlen k_{n-2j} , so genormt, daß k_n von λ abhängt; die r -te Nullstelle (Nst.) von P_n sei $x_r(\lambda) \in (-1, 1)$. Indem Verf. die Beziehung $P_n(x_r, \lambda) = 0$ nach λ ableitet und für $\lambda \neq 0$ die Polynome

$\phi P_n(x, \lambda), \phi \lambda = R_n(x, \lambda)$ einführt, die auch der Gestalt $R_n(x, \lambda) = 2 \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(x, \lambda) T_{n-\nu}(x)/(n-\nu)$

fähig sind, wo $T_h(x)$ das h -te Tschebyscheffsche P. erster Art (G. P. mit $\lambda = 0$) ist, gewinnt er den Satz, daß sich die positiven (negativen) Nst. von $R_n(x, \lambda)$, und zwar je eine davon, zwischen zwei aufeinanderfolgende (auf.) $x_\nu > 0 (x_\nu < 0)$ einfügen, oder daß die Mitglieder der ersten Gesamtheit mit den $x_\nu > 0 (x_\nu < 0)$ abwechseln. — Ist $c(\lambda)$ beliebig reell, so hat jedes der Polynome $V_n(x, \lambda) = R_n(x, \lambda) + c(\lambda) P_n(x, \lambda)$ lauter reelle Nullstellen, wenn bei der Annahme $k_n > 0$ entweder (1) $k'_n(\lambda)/k_n(\lambda) + c(\lambda) \leq 0$ oder (2) $k'_0(\lambda)/k_0(\lambda) + c(\lambda) \geq 0$ bzw. $k'_1(\lambda)/k_1(\lambda) + c(\lambda) \geq 0$ ist, je nachdem ob n gerade bzw. ungerade. — Anwendung auf

Jacobische P. $\mathbb{P}_n[x, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$, wo $\alpha(\lambda) > -1$, $\beta(\lambda) > -1$. Man bilde aus ihnen die Polynome $\mathbb{R}_{n-1}(x, \lambda) = \alpha[k_n^{-1} \mathbb{P}_n(x, \alpha, \beta)] \partial \lambda$. Wenn dann $\alpha'(\lambda), \beta'(\lambda) \neq 0$, $|\alpha'(\lambda)| + |\beta'(\lambda)| > 0$ ist, so fügt sich je eine Nst. von \mathbb{R}_{n-1} zwischen zwei auf. Nst. von \mathbb{P}_n ein, und alle liegen in $(-1, 1)$. Sonderfall $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ oder $\alpha = 0$, $\beta = \lambda$ ($\lambda > -1$).

L. Koschmieder.

Braffman, Fred: A relation between ultraspherical and Jacobi polynomial sefs. *Canadian J. Math.* **5**, 301—305 (1953).

Für die Jacobischen Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = ((\alpha + 1)_n (n!) {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; (1 - x)/2)$ wird die Entwicklung abgeleitet: $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{j=0}^n f_{j,n} x^j = \sum_{j=0}^n f_{n-j,j}$, wobei ist:

$$f_{j,0} = P_j^{\alpha, \lambda}(x), \quad \left(\frac{1}{2}\right)_k 2^{2k} k! f_{j,2k} = (-1)^k ((\beta - \alpha)/2)_k ((\alpha - \beta)/2)_k P_j^{\alpha+k, \lambda+k}(x), \\ 3/2)_k 2^{2k+1} k! f_{j,2k+1} = \\ (\alpha - \beta) (-1)^k ((\beta - \alpha + 1)/2)_k ((\alpha - \beta + 1)/2)_k P_j^{\alpha+k+1/2, \lambda+k+1/2}(x), \\ 2\lambda = \alpha + \beta. \quad O. Volk.$$

Ap Simon, H. G.: A property of Bessel functions. *Quart. J. Math., Oxford* **I. Ser. 4**, 282—283 (1953).

This paper derives an expansion for the difference of two products, each containing a Bessel and a Hankel function.

M. J. O. Strutt.

Siegel, Keeve M.: An inequality involving Bessel functions of argument nearly equal to their order. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 858—859 (1953).

The inequality derived in this paper is an improvement on two inequalities given by Watson.

M. J. O. Strutt.

Jankovic, Zlatko: On recurrence formulae for Bessel functions. *Soc. Sci. Natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser.* **8**, 161—166 und kroatische Zusammenfassg. 166—167 (1953).

As pointed out by the author there exist many — more or less complicated — ways to obtain recurrence formulae for Bessel functions but almost all of them need the explicit form of solutions so that the required form are to be obtained by calculation for every kind of linearly independent solutions separately [see e. g. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of Modern Analysis*, 4. ed. Cambridge 1927, p. 359—360]. Contrary to this method the author suggests a more simple and direct way to obtain these formulae, following an idea already applied in the case of Hermite's and Laguerre's polynomials (this *Zbl.* **51**, 307).

R. Gran Olsson.

Ragab, Fouad M.: Generalization of an integral due to Hardy. *Proc. Glasgow math. Assoc.* **1**, 115—117 (1953).

$$\text{Beweis der Formeln } \prod_{s=1}^{p-1} \int_0^\infty K_n(t_s) t_s^{2s/p-1} dt_s K_n(b(t_1 t_2 \dots t_{p-1})^{-1}) = \pi^{p-1} K_{pn}(p b^{1/p}), \\ > 0, p = 2, 3, \dots \text{ und } \prod_{s=1}^{p-1} \int_0^\infty J_n(t_s) t_s^{2s/p-1} dt_s J_n(b(t_1 t_2 \dots t_{p-1})^{-1}) = J_{pn}(p b^{1/p}), b > 0, \\ R(n) > 1/2 - 2/p. \quad O. Volk.$$

MacRobert, T. M.: An infinite integral involving a product of two modified Bessel functions of the second kind. *Proc. Glasgow math. Assoc.* **1**, 187—189 (1953).

$$\text{Darstellung des Integrals } I(b) = \int_0^\infty x^{l+1} K_m(x) K_n(b/x) dx \text{ durch verallgemei-} \\ \text{nerte hypergeometrische Reihen auf dem Wege über eine Differentialgleichung} \\ \text{mterter Ordnung, der } I(b) \text{ genügt, für } R(b) > 0, l = 1, m = n \text{ gibt Hardys Formel} \\ \int_0^\infty K_n(x) K_n(b/x) dx = K_{2n}(2\sqrt{b}). \quad O. Volk.$$

Tortrat, A.: Les fonctions orthogonales d'Hermite et les relations d'incertitude
 J. Math. pur. appl., IX. Sér. **32**, 85—128 (1953).

In dem Werke von P. Appell und J. Kampé de Fériet: Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite, Paris 1926, ist auf S. 363—387, deren Kenntnis im folgenden vorausgesetzt wird, alles enthalten, was zur Zeit seiner Abfassung über Hermite-Polynome (H. P.) mehrerer Veränderlichen bekannt war (und dazu noch vieles Neue); ihre Orthogonalität, die Entwicklung willkürlicher Funktionen $f(x, y)$ nach den H. P. $H_{mn}(x, y)$ mit einer nur für Polynome $f(x, y) = P(x, y)$ entschiedenen Gültigkeit; das System zweier Teil-Differentialgleichungen (T.-Dgn.) für die $H_{mn}(x, y)$ mit dem Nachweise, daß sie seine einzige polynomische Lösung sind. Über diesen klassischen Bestand hinaus erzielt Verf. mit der vorliegenden (nicht durchweg leicht lesbaren) Abh., der er drei kürzere Vorläufer vorausgeschickt hatte (dies. Zbl. **30**, 91; **39**, 77), bedeutsame Fortschritte auf fast allen Gebieten des Stoffes, den er zudem noch um Beziehungen zur neueren Physik bereichert. Im ersten Abschnitt beweist er die Vollständigkeit des Inbegriffs der Hermite'schen Funktionen (H. F. $\psi_{n_i}(x_i) = \psi_{n_1, \dots, n_r}(x_1, \dots, x_r)$, $\chi_{n_i}(x_i)$, die mit den genormten H. P. $*H_{n_i}(x_i)$, $*G_{n_i}(x_i)$

durch die Formeln $\psi_{n_i} = e^{-\varphi/2} *H_{n_i}$, $\chi_{n_i} = e^{-\varphi/2} *G_{n_i}$ zusammenhängen; $\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^r a_{ij} x_i x_j$ ist eine positiv definite quadratische (p. d. q.) Form, mit deren Hilfe die H. P. von dem

Ausdruck (1) $\exp[\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i)] = \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^r \frac{h_i^{n_i}}{n_i!} \right) H_{n_i}(x_i)$ (kürzer geschrieben) = $\sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{k_i^{n_i}}{n_i!} G_{n_i}(x_i)$ erzeugt werden, wo (2) $k_i = \frac{1}{2} \partial \varphi / \partial h_i$, $h_i = \frac{1}{2} \partial \varphi / \partial k_i$ und $\varphi(\xi) = \sum \beta_{ij} \xi_i \xi_j$ mit

$\xi_i = \sum a_{ij} x_j$ die Kehrform zu φ ist. Die ψ_{n_i} bilden mit den χ_{n_i} eine biorthogonale Gesamtheit vom Gewichte 1. Verf. gewinnt die T.-Dgn. \mathfrak{L} , denen die H. P. genügen, und andre auf die H. P., H. F. oder ihre Erzeugenden bezügliche Ableitformeln. — Die Wellengleichung eines Schwingers in r Ausdehnungen unter der Wirkung einer von einem elliptischen Potential q herrührenden Anziehungskraft läßt sich auf \mathfrak{L} nur in dem entartenden Falle $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) zurückführen. — Die Mehlersche Formel (M. F.) auf r Veränderliche verallgemeinert und

berechnet Verf. die 16 Summen $K = \sum_{n_i=0}^{\infty} t_i^{n_i} Y_{n_i}(y) X_{n_i}(x)$ mit H. F. X, Y . Dabei beginnt er an demselben Ausgangspunkte, wie ihn N. Wiener (The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933) bei einer Veränderlichen wählte, nämlich mit dem (r -fachen) Integral

$$(3) \quad \int_{11} L(x_i, y_i, t_i) \exp[\varphi(y_i) - \varphi(y_i - h_i)] dy_i = \exp[\varphi(x_i) - \varphi(x_i - h_i t_i)],$$

wo ${}_{11}L = {}_{11}K \exp\{-\frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(y)]\}$ für $X_{n_i} = \psi_{n_i}$, $Y_{n_i} = \chi_{n_i}$ (Ref. glaubt, daß auf S. 92, letzte Z., $e^{\varphi(x) + \varphi(y)}$ statt $e^{\varphi(y)}$ zu lesen ist). Durch Ableitung von (3) nach den h_i ergibt sich für H. P. eine lineare homogene Integralgleichung mit Eigenwert $t_i^{n_i}$ und Kern ${}_{11}L$, dessen bilineare

Formel die M. F. wird; er ist ${}_{11}L = \pi^{-r/2} \cdot 1_{\varphi} \cdot 1_{\xi}^{-1/2} \exp[-\tau(\eta_i - t_i \xi_i)]$, wo $1_{\varphi}, 1_{\xi}$ die Determinanten der Formen φ und $\xi = \varphi(x_i) - \varphi(x_i t_i)$ sind, und τ die Kehrform zu ξ ist. Um von hier zur Darstellung willkürlicher Funktionen fortzuschreiten, greift Verf. auf ein Verfahren von W. Myller-Lebedeff für $r=1$ [Math. Ann. **64**, 388—416 (1907)] zurück, das er auf höhere r ausdehnt. Er erweist sodann die Gleichwertigkeit seiner verallgemeinerten M. F. mit älteren Ergebnissen, die für $r=2$ vom Ref. (dies. Zbl. **18**, 303), für allgemeines r von A. Erdélyi (dies. Zbl. **19**, 113) herrühren [unrichtige Schreibung vorstehend beider Namen in Anm. 4) und 5). Sonstige bemerkte Druckfehler: S. 87, Z. 6 lies η statt η ; S. 107, Z. 14 lies r statt n]. — Sonderfall: Gleichheit aller t_i , Fouriersche Abbildung der H. F. — Eine Integralformel für die Zusammensetzung zweier Kerne. — Im zweiten Abschnitt schätzt Verf. den Betrag der H. F. ab, indem er das von Iyengar (dies. Zbl. **23**, 529) bei einer Veränderlichen zum gleichen Zwecke benutzte Verfahren verallgemeinert. Dazu bedient er sich eines Hilfsatzes über die Zerlegung einer p. d. q. Form in zwei Formen derselben Art. Er beweist ihn geometrisch und algebraisch, auf dem zweiten Wege sogar noch allgemeiner für eine bilineare Form von $2r$ Veränderlichen. Die für alle n_i und x_i zustand kommende Abschätzung lautet

$$e^{-2\varphi} *H_{n_i}^2(x_i) \leq C \left(\frac{1}{2} M \sigma \right)^{\sum n_i} \prod (1 + n_i^{-1}) n_i! \left[\left(\frac{1}{2} n_i \right)! \right]^{-2},$$

wo $[(n_i/2)!]^2 = [(n_i - 1)/2]! [(n_i + 1)/2]!$ bei ungeraden n_i , ferner $\sigma = 1 + \sum |\alpha_{ij}(\alpha_{ii} \alpha_{jj})^{-1/2}|$, $M = \max |\alpha_{ij}|$, $C = (1 + 1/2 \sigma^{-1})^2 \pi^{-\sum n_i/2} (\det. \alpha_{ij})^{1/2}$. — Verf. wendet sich dann dem System von r T.-Dgn. zu, dem die H_{n_i} genügen. — als seine einzige polynomische Lösung. Bezugnahme auf ältere Untersuchungen von Lauricella, Rend. Circ. mat. Palermo **7**, 122—129 (1893). — Einen neuen Gesichtspunkt bringt der dritte Abschnitt mit dem Anschluß der H. P. an Heisenbergs Unbestimmtheitsbeziehungen (Ub.). Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen; i

nerst rechtfertigt Verf. die zum Beweise der Orthogonalität der H. P. gliedweise vorgenommene Integration der Reihe, die durch Vervielfachung der Erzeugungsformeln der ψ_n und χ_n entsteht. — Die in der Quantenlehre übliche Schreibweise benutzend, geht Verf. daran, die Streuung $\sigma = \int q$ einer Raumveränderlichen q zu berechnen, deren Wahrscheinlichkeitsgesetz eine Funktion $\psi(q) \in L^2$ ist, q sei auf seinen Mittelwert bezogen, also $q = \int q | \psi |^2 dq = 0$, dann allgemein $x = \int x | \psi |^2 dq$ der Mittelwert von x ist. Mit dem Zeichen der Norm $\|f\| = (\int f f^* dq)^{1/2}$ ist $\sigma^2 = \|q \psi\|^2$. Die einfachste Wellenfunktion ψ der Art, daß $q = 0$, $q^2 = \sigma^2$, ist $q_0(x)$, wenn $\exp[-x^2/(4\sigma^2)] H_n(x/\sqrt{2}\sigma) (1/2\pi\sigma^2)^{1/2} = q_n^{\sigma}(x)$, kurz q_n gesetzt wird; darum liegt es nahe, σ^2 zu berechnen, indem man die genormte ψ nach den q_n entwickelt,

$$\psi = \sum_0^{\infty} \alpha_n q_n, \quad \sum_0^{\infty} \alpha_n \alpha_n^* = 1.$$
 Ist auch $q \psi \in L^2$, so findet man unter der Annahme $\sum_0^{\infty} n |\alpha_n|^2 < \infty$ die Formeln

$$(\Delta q)^2 = \sum_0^{\infty} [(2n+1) |\alpha_n|^2 + 2 \sqrt{(n+1)(n+2)} \operatorname{Re} \alpha_n \alpha_{n+2}^*],$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{16\pi^2 \sigma^2} \left[1 + 2 \sum_1^{\infty} n |\alpha_n|^2 - 2 \sum_2^{\infty} \sqrt{n(n-1)} \operatorname{Re} \alpha_n \alpha_{n-2}^* \right],$$

die zweite am leichtesten durch die Beziehung zwischen den Wahrscheinlichkeiten zweier konjugierter Veränderlicher. Aus beiden zusammen folgt

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 = \frac{\hbar^2}{16\pi^2} + \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \sum_1^{\infty} n |\alpha_n|^2.$$

Entsprechende Formel bei r Raumveränderlichen q_i und ihren konjugierten p_i . — Der im ersten der möglichen Zustände des linearen Schwingers sich ergebende Wert $\Delta p \Delta q = (\hbar/2\pi)(p+1/2)$ verschärft die Ub. $\Delta p \Delta q \sim (\hbar/2\pi)p$ von Heisenberg. — Zum Schluß erörtert Verf. das Verhältnis der Ub. zu den Streuungsflächen \mathfrak{D}^2 zweiten Grades, die je nach ihrer Zugehörigkeit zu den q_i oder p_i die Gleichungen $f(u_i) = 1$ oder $G(x_i) = 1$ haben,

$$f(u_i) = \int \psi^* \left(\sum u_i q_i \right)^2 \psi d\tau = \overline{(u_i q_i)^2} \quad (d\tau = dq_1 \cdots dq_r),$$

$$\frac{\hbar^2}{16\pi^2} G(x_i) = \left\| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right\|^2 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \int \left| \sum x_i \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right|^2 d\tau,$$

also Ellipsoide sind. Die Kehrform zu $f(u_i)$ sei $F(x_i)$. — Der Sonderfall des Gaußschen Fehlergesetzes (G. F.) ist durch $\psi_0 = \delta^{1/4} (2\pi)^{-r/4} \exp[-\frac{1}{4} q(q)]$ ausgezeichnet, wo δ die Determinante von q . Setzt man im allgemeinen Falle $\psi = \psi_0 \chi(q)$ mit F statt q in ψ_0 , so kann man G auf die Form $G(x_i) = F(x_i) - 4 \int \sum x_i \sigma_{ij} dq_j \left| \psi_0 \right|^2 d\tau$ bringen; das zweite Glied verschwindet nur beim G. F. $\chi = \text{const.}$ Die Arbeit endet mit geometrischen Bemerkungen über die gegenseitige Lage der beiden \mathfrak{D}^2 .

L. Koschmieder.

Sips, R.: Recherches sur les fonctions de Mathieu. I—IV. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 22, 341—355, 374—387, 444—455, 530—540 (1953).

Verf. betrachtet die Mathieuschen Funktionen ganzer Ordnung für reelle Parameter und im wesentlichen reelle Variable. Den Ausgangspunkt bildet die als „formule fondamentale“ bezeichnete Entwicklung von $H^{(1,2)}(\lambda R)$ nach Produkten von vier Mathieuschen Funktionen der Argumente ξ, η, ξ_0, η_0 , wenn R der Abstand der beiden Punkte mit den elliptischen Koordinaten (ξ, η) und (ξ_0, η_0) bei $\xi = \xi_0$ ist (herrührend schon von P. M. Morse. Vgl. Spezialfall $\lambda = 0$ in Meixner-Schärfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954, S. 182—183). Für sie wird ein ausführlich aufgeschriebener Beweis gegeben. Weiter wird nun gezeigt, wie aus ihr mit Hilfe des Additionstheorems der Zylinderfunktionen und der Whittakerschen Integralgleichungen die Reihenentwicklungen der Mathieuschen Funktionen nach Zylinderfunktionen und nach Produkten von Zylinderfunktionen hergeleitet werden können. Durch Aufsummierung werden Analoga der Sommerfeldschen Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen erhalten. Durch Grenzübergang $q \rightarrow \infty$ (Ausartung zu ebener Welle) werden die Whittakerschen Integralgleichungen und hieraus durch Iteration gewisse einfache Integralgleichungen mit Zylinderfunktionskern gewonnen. Anschließend werden die entsprechenden Eigenwerte und die Verknüpfungsrelationen behandelt. Schließlich werden aus der „formule fondamentale“ noch Entwicklungen von elliptischen Zylinderwellen nach Kreiszyylinderwellen (gleiches Zentrum oder Zentrums-trennpunkt) und die umgekehrten Entwicklungen abgeleitet. — Ref.: Formeln und Methoden sind — wesentlich allgemeiner und damit in einfacherer Notierung und Herleitung — bekannt. Man vgl. J. Meixner, dies. Zbl. 36, 178; 43, 75, sowie F. W. Schärfke, dies. Zbl. 50, 293 (Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen). Die vorliegenden Noten werden jedoch für den von besonderem Wert sein, der Interesse an zahlreichen sorgfältig aufgeschriebenen Spezialfällen hat.

F. W. Schärfke.

Henrici, Peter: A Neumann series for the product of two Whittaker functions. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 329—334 (1953).

The author considers expansions for the product of two Whittaker functions of equal indices and different arguments in a series expression containing Bessel functions. The coefficients are given in extenso. As special cases expansions of a single Whittaker function and Gegenbauer's expansion are considered.

M. J. O. Strutt.

Ragab, F. M.: A linear relation between E -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 185—186 (1953).

Beweis der Formel:

$$\sum_{r=0}^n {}^{2n}C_r \frac{(b;r)(2x)^{-r}}{(b/2+1/2-n;r)} E\left(\frac{1/2+r/2, 1+r/2, b/2+1/2-n+r, \alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; x}{1/2+b/2+r, 1/2-n+r, 1+r, \alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r}\right) \\ = \frac{(2n)! 2^{-2n}}{n!(1/2-b/2;n)} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x). \quad O. Volk.$$

MacRobert, T. M.: An integral involving an E -function and an associated Legendre function of the first kind. Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 111—114 (1953).

Darstellung des Integrals

$$\sin(l\pi) \int_{-1}^{+1} \left[(1-\lambda^2)^{m/2} T_{m+n}^{-m}(\lambda) (1-\lambda)^{-l-m-1} E\left(\begin{matrix} l+m+1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; z(1-\lambda) \\ \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_q \end{matrix}\right) \right] d\lambda$$

durch die Summe zweier E -Funktionen bzw. durch verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen.

O. Volk.

MacRobert, T. M.: Integral of an E -function expressed as a sum of two E -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 118 (1953).

$$\text{Beweis der Formel: } \frac{1}{\Gamma(\varrho_{q+1}-\alpha_{p+1})} \int_0^1 t^{-\varrho_q+1} (1-t)^{\varrho_q+1-\alpha_{p+1}-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; xt) dt =$$

$A E(p+1; \alpha_r; q+1; \varrho_s; x) + B E(p+1; \alpha_r - \varrho_{q-1} + 1; 2 - \varrho_{q+1} + 1, \varrho_1 - \varrho_{q+1} + 1, \dots, \varrho_q - \varrho_{q+1} + 1; x)$, wo $A = \sin(\alpha_{p+1}\pi)/\sin(\varrho_{q-1}\pi)$, $B = \sin((\alpha_{p+1} - \varrho_{q-1})\pi)/\sin(\varrho_{q+1}\pi)$, $\varrho_{q-1} - \alpha_{p+1} > 0$, $\alpha_r - \varrho_{q+1} + 1 > 0$, $r = 1, 2, \dots, p$ und $p \geq q+1$.

O. Volk.

Ragab, Fouad M.: An integral involving a modified Bessel function of the second kind and an E -function. Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 119—120 (1953).

Beweis der Formel

$$E(p+2m; \alpha_r; q; \varrho_s; x) = 2^{m+1} m \pi^{m-1} \int_0^\infty K_{mn}(2m\lambda) \lambda^{mk-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x \lambda^{2m}) d\lambda$$

m natürliche Zahl, $\alpha_{p+2r+1} = 1/2(k+n) + r/m$, $\alpha_{p+2r} = 1/2(k-n) + r/m$, $r = 0, 1, \dots, m-1$. Ersetzt man λ durch $\lambda e^{i\pi/m}$ und x durch $x e^{-i\pi}$, so erhält man eine analoge

Darstellung für $2^{m+1} m \pi^m i \int_0^\infty J_{mn}(2m\lambda) \lambda^{mk-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x \lambda^{2m}) d\lambda$. *O. Volk.*

Ragab, Fouad M.: Integrals involving E -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 129—136 (1953).

In I Beweis der Formel

$$\prod_{r=1}^{m-1} \int_0^\infty e^{-t_r} E(\alpha, \beta; : t_r) t_r^{r/m-1} dt_r e^{-b/(t_1 t_2 \dots t_{m-1})} E(\alpha, \beta; : b/(t_1 t_2 \dots t_{m-1})) =$$

$$(\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta))^m (\Gamma(m\alpha) \Gamma(m\beta))^{-1} (2\pi)^{m-1} 2^{-1/2} m^{-1/2} e^{-mb^{1/m}} E(m\alpha, m\beta; : m b^{1/m})$$

mit $b > 0$, auf dem Weg über die Differentialgleichung von $w \equiv e^{-z} E(\alpha, \beta; : z)$.

In II Beweis der Formel $\int_0^\infty e^{-n\lambda} \lambda^{nk-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x \lambda^{-n}) d\lambda = (2\pi^{(n-1)/2} \sqrt{n})^{-1} \cdot$

$E(p+n; \alpha_r; q; \varrho_s; x)$ mit $\Re(k) > 0$, n natürliche Zahl und $\alpha_{p+r+1} = k + r/n$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$, mittels der Hilfsformel

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-F} G dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-1/2} e^{-nb^{1/n}}, \quad b > 0,$$

$$F = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + b/(x_1 x_2 \dots x_{n-1}), \quad G = x_1^{1/n-1} x_2^{2/n-1} \dots x_{n-1}^{(n-1)/n-1}.$$

In III Beweis der Relation $\int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} E(\gamma, \delta; : t) E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x t) dt = \Gamma(\gamma) \Gamma(\delta) \cdot$

$E(p+2; \alpha_r; q+1; \varrho_s; x)$, wo $\alpha_{p+1} = \gamma + k$, $\alpha_{p+2} = \delta + k$, $\varrho_{q+1} = \gamma + \delta + k$,

$\Re(\gamma + k) > 0$, $\Re(\delta + k) > 0$, sowie Darstellung des Integrals $\int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} E(\alpha, \beta; : t) \cdot$

$E(\gamma, \delta; : t) E(p, \alpha_r; q; \varrho_s; x t) dt$ durch eine E -Funktion. In IV Beweis der Formel

$$\int_0^\infty e^{-nt} t^{k-1} E(n\gamma, n\delta; : nt) E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x t^v) dt = \Gamma(n\gamma) \Gamma(n\delta) (2\pi)^{(1-n)k} n^{-1/2} \cdot$$

$$E(p+2n; \alpha_r; q+n; \varrho_s; x), \quad \alpha_{p+2n+1} = \gamma + k + r n, \quad \alpha_{p+2n+2} = \delta + k + r n,$$

$$\varrho_{q+r+1} = \gamma + \delta + k + r/n, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad \Re(k + \gamma) > 0, \quad \Re(k + \delta) > 0.$$

In V Beweis der Formel

$$\int_0^\infty \exp(-y^2 + x - x) x^{-\alpha-\beta-1} E(\alpha, \beta; : x) = 2 \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) (y/2)^{-\alpha-\beta} K_{\alpha-\beta}(y), \quad \text{wo}$$

$$\Re(y^2) > 0.$$

O. Volk.

MacRobert, T. M.: Some integrals involving E -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 190—191 (1953).

Bestimmung der Integrale $\int_0^1 \lambda^{x-1} (1-\lambda)^{-x-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; z/\lambda^m) d\lambda =$
 $\Gamma(\varrho - \alpha) m^{x-1} E(p-m; \alpha_r; q-m; \varrho_s; z)$ mit $\alpha_{r+1} = (\alpha + r)/m$, $\varrho_{q+r+1} = (\varrho + r)/m$,
 $r = 1, 2, \dots, m-1$, $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\varrho - \alpha) > 0$, m natürliche Zahl; $(2\pi i)^{-1} \cdot$

$\int_0^\infty \xi^{-\varrho} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; z \xi^m) d\xi = (2\pi)^{m-1/2} m^{1/2-\varrho} E(p; \alpha_r; q+m; \varrho_s; z m^m)$, wo
 der Integrationsweg längs der Achse des Reellen von $-\infty$ in positivem Sinne
 um den Nullpunkt nach $-\infty$ zurückgeführt wird, und ähnlicher Integrale, die
 F. M. Ragab (s. die beiden vorstehenden Referate) behandelt hat. *O. Volk.*

Ragab, F. M.: Integrals of E -functions expressed in terms of E -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 192—195 (1953).

Auswertung der Integrale $\int_0^\infty e^{-z/\lambda^{w-1}} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; \lambda z) d\lambda, \int_0^\infty \lambda^w E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; \lambda) \cdot$
 $E(l; \beta_t; m; \sigma_u; v) d\lambda$ mit $w = k-1$, $v = z/\lambda$ bzw. $w = -\alpha_{p+1} - 1$, $v = z/\lambda$,
 woraus durch Spezialisieren zahlreiche Integrale mit Zylinderfunktionen und der
 Weber-Schafheitlinsche diskontinuierliche Faktor gewonnen werden. *O. Volk.*

Olver, F. W. J.: Note on the asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions. J. London math. Soc. 28, 462—464 (1953).

This note corrects an error of Barnes' exponentially infinite asymptotic expansions of linear combinations of generalized hypergeometric functions.

M. J. O. Strutt.

Agarwal, R. P.: On integral analogues of certain transformations of well-poised basic hypergeometric series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 161—167 (1953).

The author uses integrals to obtain transformations of basis series of well-poised type and of any order. First he proves the basic analogue of Barnes' second lemma. Then, contour integrals representing basic well-poised series are given. This leads to an integral analogue of Dougall's basic theorem.

M. J. O. Strutt.

Agarwal, R. P.: General transformations of bilateral cognate trigonometrical series of ordinary hypergeometric type. Canadian J. Math. 5, 544—553 (1953).

Verf. gibt zunächst Definitionen von Fourierreihen vom „well-poised“-Typus und vom „bilateral“-Typus und führt in bezug auf diese Reihen einige

neue Schreibweisen ein. Dann geht er von einem Transformationssatz für obige Reihen aus, der von Sears stammt. Dieser Satz wird in mehrfacher Weise erweitert, und es wird gezeigt, daß bisher bekannte Transformationen als Sonderfälle der allgemeinen vom Verf. aufgestellten Formeln betrachtet werden können. Zum Schluß werden noch einige Integralformeln angegeben.

M. J. O. Strutt.

Agarwal, R. P.: Some transformations of well-poised basic hypergeometric series of the type ${}_8\phi_7$. Proc. Amer. math. Soc. 4, 678—685 (1953).

The series of the type ${}_8\phi_7$ are classified in different groups. The author studies systematically the relations existing between the 192 allied series that occur in the classification. First, relations between two ${}_8\phi_7$ series are given. Then, a number of three-term relations between the allied series is derived. Finally, integrals representing two-term and three-term relations are put forward.

M. J. O. Strutt.

Funktionentheorie:

● **Ahlfors, Lars V.:** Complex analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) London: McGraw-Hill Publishing Co., Ltd. 1953. XI, 247 p. 37 s. 6 d.

Vorliegendes Buch gibt eine Idee von dem Stoff eines Fortgeschrittenen-Kursus über Funktionentheorie in den Vereinigten Staaten. Zugleich legt es Zeugnis davon ab, wie stark moderne topologische Theorien so klassische Theorien wie die Cauchysche Funktionentheorie bis in ihre Grundmauern vereinfachend zu beeinflussen imstande sind. Das Vorhaben des Verf., ein kurzes, präzises, leicht vortragbares und leicht lesbares Buch zu schreiben, ist nach Ansicht des Ref. voll gelungen. Es ist sehr zu begrüßen, daß Verf. die Theorie der reellen Zahlen und die Grundlagen der Analysis als bekannt voraussetzt und nur solche Begriffe der Topologie entwickelt, die für den exakten Beweis der Fundamentalsätze notwendig sind. Die Auswahl des Stoffes wird durch übliche Vorschriften der Kurse der Funktionentheorie beschränkt und erstreckt sich auf die Grundlagen der Cauchy-Weierstraß-Riemannschen Theorie. Aber Verf. zeigt durch die vielen originellen Einzelheiten und den interessanten Aufbau, daß man auch die klassischen Sätze neu und anregend darstellen kann. Durch die Artinsche Idee der Verwendung der Windungszahl als Grundlage der Homologietheorie gewinnen die Cauchyschen Sätze sowohl an Exaktheit beim Beweise als auch an Eleganz bei der Formulierung. Nachdem das erste Kapitel die elementare analytische Geometrie der komplexen Ebene bringt, führt das zweite Kapitel den Lernenden in die komplexe Betrachtungsweise und den Begriff der analytischen Funktion ein. Die allgemeinen Sätze und Definitionen werden vielfach an Beispielen erprobt. Das dritte Kapitel bringt in meisterhafter Form und unter Verwendung der Homologietheorie die Grundlagen der Cauchyschen Funktionentheorie, also im wesentlichen die beiden Fundamentalsätze und den Residuensatz. Erst das nächste Kapitel wendet die Grenzprozesse der Analysis an und bringt den Studierenden näher zu dem Weierstraßschen Standpunkt der analytischen Funktion unter Einbeziehung der Montelschen Auffassung der analytischen Funktionen. Das Kapitel endet mit einem schönen, zum Teil auf Lindelötschen Grundlagen aufgebauten Beweis des klassischen Riemannschen Abbildungssatzes. Die Behandlung des Dirichletschen Problems, dem fast das ganze fünfte Kapitel gewidmet wird, und dessen Lösung mit Hilfe Perronscher Methoden erbracht wird, gibt dem Studierenden die Möglichkeit, sich das verhältnismäßig schwierige Problem der Abbildung mehrfach zusammenhangender Bereiche in relativ kurzer Zeit und durch kaum zu überbietende Eleganz anzueignen. Das einheitliche Einbauen dieses Problems in ein Lehrbuch kann nicht hoch genug gewürdigt werden. Das letzte Kapitel behandelt die mehrwertigen, insbesondere die algebraischen Funktionen. Ein Teil dieses Kapitels wird, ähnlich wie in Carathéodorys Buch (dies. Zbl. 37, 332), der Theorie der linearen Differentialgleichungen, insbesondere der hypergeometrischen Differentialgleichung gewidmet. Das Buch ist eine ausgezeichnete, streng aufgebaute Einführung nicht nur in die klassische Funktionentheorie, sondern auch in viele wichtige Fragen der modernen Funktionentheorie. Daß unter dieser die Nevanlinnasche Theorie der meromorphen Funktionen sich nicht befindet, liegt wohl daran, daß ähnliche Darstellungen schon vorliegen. — Nachfolgende Zusammenstellung der Nummern gibt ein Bild vom Aufbau des Buches. I. Kapitel: Komplexe Zahlen. 1. enthält speziell die Algebra der komplexen Zahlen. 2. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen. 3. Theorie der linearen Transformationen. II. Kapitel: Komplexe Funktionen. 1. Elementare Funktionen. 2. Topologische Begriffe. 3. Definition

der analytischen Funktion. 4. Einfache konforme Abbildungen. III.: Komplexe Integration. 1. Die Hauptsätze. 2. Die Cauchysche Integralformel. 3. Lokale Eigenschaften der analytischen Funktionen. 4. Allgemeine Fassung des Cauchyschen Satzes. 5. Residuensätze. IV. Kapitel: Unendliche Funktionenfolgen. 1. Konvergente Folgen. 2. Potenzreihen. 3. Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung. 4. Die Theorie der normalen Familien. V. Kapitel: Das Dirichletsche Problem. 1. Harmonische Funktionen. 2. Subharmonische Funktionen. 3. Kanonische Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche. VI. Kapitel: Mehrdeutige Funktionen. 1. Analytische Fortsetzung. 2. Algebraische Funktionen. 3. Lineare Differentialgleichungen. Diese Aufzählung gibt natürlich nur eine schwache Vorstellung des Inhalts. Der Studierende kann erst den Gehalt dieses schönen Lehrbuches ermessen, wenn er es genau liest und die Beweise durchdenkt.

A. Dinghas.

● **Plemelj, Josip: Theorie der analytischen Funktionen.** (Acad. Scientiarum et Artium Slovenica, Opera 2.) Ljubljana 1953. XVI, 516 S. [Slowenisch].

Das Buch besteht aus folgenden 4 Teilen: I. Komplexe Zahlen und ihre Darstellungen (pp. 1–58): Komplexe Zahlen, Lineare Substitution (6–16), Kreis (19–26), Kreis, Lineare Substitution, Spiegelung (28–52), Stereographische Projektion (53–64); II. Allgemeine Theorie der anal. Funktionen (65–174): Reihen (67–71), Potenzreihen (72–92), Integral (93–97), Anal. F. nach Cauchy und Riemann (98–163), Darstellung der eindeutigen anal. F. (164–173); III. Elliptische Funktionen (175–293): Über ellipt. F. (177–187), Weierstraßsche ellipt. F. (188–220), Jacobische ellipt. F. (221–244), Multiplikation und Division (245–249), Ellipt. Modulfunktionen (250–293); IV. Geometrische Funktionentheorie (295–507): Allgemeine Eigenschaften der anal. F. und der Potentiale (299–326), Dirichletsches Problem (327–374), Riemannsche Flächen (375–404), Abbildung der mehrblättrigen Riemannschen Flächen (405–420), Uniformisierung der anal. Kurven (421–468), Abbildungen und Uniformisierung im Anschluß an Differentialgleichungen (469–486), Algebraische F. auf gegebenen Riemannschen Flächen (487–507), Sachregister (509–516). — Das Buch ist das Resultat einer fast fünfzigjährigen Lehrtätigkeit des Autors; eigene Hauptresultate [cf. Monatsh. Math. Phys. **29**, 211–246 (1908)] sind leider nur tangentiell erwähnt. Demgegenüber hat der Autor seine Form des Verzerrungssatzes wiedergegeben [cf. seinen Vortrag vom 24. 9. 1913 vor der Tagung der Deutsch. Math.-Verein, gedruckt erst 1923 Acad. Sci. et Arts, Zagreb, Bull. Cl. math. **15–18**, 35–40 (1923); s. auch G. Pick, Ber. Verh. Ges. Wiss., Leipzig **68**, 58–64 (1916) und L. Bieberbach, S.-Ber. Akad. Wiss. Berlin, **1916**, 946–955 (1916), insbesondere p. 946 Fußnote 2] und mehrere Anwendungen davon gemacht; dasselbe gilt für sein Kriterium, wann eine Randfunktion durch eine regulär-analytische Funktion induziert wird [p. 315, bzw. Monatsh. Math. Phys. **29**, 205–210 (1908)]. Die Methode der Auslegung ist analytisch und geometrisch und mehr von der Potentialtheorie durchdrungen, als es sonst üblich ist (es sei erwähnt, daß der Verf. den Jablonowski-Preis 1910 eben für seine Schrift „Potentialtheoretische Untersuchungen“, Leipzig 1911 erhielt). Der Harnacksche Satz über positive Potentiale ist aus der folgenden Aussage abgeleitet: sei f eine analytische Funktion in $|z| < 1$, wo $\operatorname{Re} f > 0$, $f(0) > 0$, dann ist da $|f(z)| \leq f(0) (1 + |z|) / (1 - |z|)^{-1}$. Vom Riemannschen Abbildungssatz sind 2 Beweise angegeben. Die Konstruktion der universellen Überlagerungsflächen und die Anwendungen derselben für die Uniformisierung (Kobesches iterierendes Verfahren mit Verzerrungssätzen) sind sehr klar dargestellt. Merkwürdigerweise ist die Konvergenz der Folgen und die der Produkte durch die Cauchysche Eigenschaft derselben erklärt (p. 67, 147). Schade, daß fast keine Literaturhinweise vorhanden sind. Das Buch enthält 131 Bilder. Leider ist das Buch nicht gebunden, sonst sind Druck, Papier, technische Ausstattung von guter Qualität. — Jeder Mathematiker, der eine slawische Sprache einigermaßen kennt, wird dieses erste in jugoslawischer Sprache über die Funktionentheorie geschriebene und gelungene Buch mit Nutzen lesen und verstehen können.

G. Kurepa.

● **Bowman, F.: Introduction to elliptic functions, with applications.** London: English Universities Press 1953. 115 p. 12 s 6 d.

Eine kurze Einführung in die Praxis der Jacobischen elliptischen Funktionen. Das Büchlein bringt viele Formeln und zeigt die Handhabung der vorhandenen Tafeln. Stets ist der Weg, der zur wirklichen Durchrechnung eines Problems gegangen werden muß, angegeben. Jedem Kapitel ist eine größere Zahl von Aufgaben angeschlossen. Die ersten drei Kapitel sind den elliptischen Funktionen und Integralen im Reellen gewidmet. Kapitel 9 behandelt die Zurückführung beliebiger elliptischer Integrale auf die Legendreschen Normalintegrale. In den Kapiteln 4 bis 8 werden zu verschiedenen elliptischen Funktionen und Integralen gehörige konforme Abbildungen eingehend besprochen. Kapitel 10 ist einem, auf elliptische zurückführbaren, hyperelliptischen Integral gewidmet. Von den Anwendungen möchte ich erwähnen: Pendel, Bogenlänge der Ellipse,

Oberfläche des Ellipsoids, elektrischer Widerstand verschieden geformter zweidimensionaler Leiter, zweidimensionale, wirbelfreie Flüssigkeitsströmung, Plattenkondensator, Kondensator aus zwei koaxialen Prismen. Zahlreiche Figuren.

G. Lochs.

Heffter, Lothar: Einfacher Beweis des Satzes von Looman-Menchoff. Arch. der Math. **4**, 446—447 (1953).

Verf. zeigt unter Benutzung zweier Formeln von der Art $(1) \oint_R f(x, y) dy = \iint_R f'_x dx dy$ (R achsenparalleles Rechteck, f reell, in R eindeutig, stetig, nach x differenzierbar) die Gültigkeit der Cauchyschen Integralformel unter der Voraussetzung der Stetigkeit, Eindeutigkeit, partiellen Differenzierbarkeit von Real- und Imaginärteil, sowie der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Die Formel (1) wurde von Morera [Rivista di Mat. **6**, 19—20 (1896)] unter der zusätzlichen Voraussetzung der flächenhaften Integrierbarkeit (im Riemannschen Sinne) von f'_x bewiesen. Verf. kündigt ihre Herleitung unter obigen Voraussetzungen in einer demnächst erscheinenden Schrift an.

P. Seibert.

Zin, Giovanni: Sull'esistenza in un dominio jordaniano di funzioni olomorfe all'interno e convergenti al contorno verso valori assegnati. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 476—483 (1953).

An eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **51**, 309) anschließend, beweist Verf. zuerst den folgenden Satz. Ein beschränktes (abgeschlossenes) Gebiet D auf der z -Ebene sei durch eine rektifizierbare Jordankurve C mit der Gleichung $z = z(s)$ ($0 \leq s \leq L$) begrenzt, wo s den Bogenparameter bedeutet. Es werde eine Funktion $\varphi(z)$ längs C angegeben, welche dort von beschränkter Schwankung ist und der Bedingung $\int_C \varphi(z) z^n dz = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) genügt. Dann gilt die

Beziehung $\int_0^L \varphi(z(s)) \frac{d\Phi(z(s))}{ds} ds = 0$ für jede auf D stetige und in $D - C$ reguläre

Funktion $\Phi(z)$, für welche $\Phi(z(s))$ totalstetig in $0 \leq s \leq L$ ist. — Daraus folgt er ferner, daß $\varphi(z)$ überall längs C die beiderseits übereinstimmenden Grenzwerte $\varphi(z^+) = \varphi(z^-)$ und daß die durch die Cauchysche Integralformel mit der Belegung $\varphi(t)$ dargestellte analytische Funktion an jedem Punkt von C den Randwert $\varphi(z^+) (= \varphi(z^-))$ annimmt.

Y. Komatu.

Giorgi, Ennio de: Un teorema sulle serie di polinomi omogenei. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **87**, 185—192 (1953).

Verf. gibt unter Zuhilfenahme komplexer Variabler einen einfachen Beweis für folgenden Satz: Gegeben eine Folge von homogenen Polynomen von r reellen Variablen, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich einer r -dimensionalen Kugel gleichmäßig konvergiert; dann ist die Reihensumme im Kugellinnern analytisch. Bemerkenswert im Vergleich zu unter schwächeren Voraussetzungen hergeleiteten Resultaten anderer Autoren [vgl. etwa E. E. Levi, Atti Accad. naz. Lincei, V. Ser. **42**, S16—S22 (1912)] erscheint, daß die Analytizität im gesamten Kugellinnern bewiesen wird.

M. J. De Schwarz.

Peysers, Gideon: Sur les théorèmes d'Abel et de Tauber pour des séries entières à n variables. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1135—1137 (1953).

In der einfach unendlichen Reihe $(1) \sum A(p_1, \dots, p_n)$ mit $p_1, \dots, p_n = 0, 1, \dots$ seien die Glieder so angeordnet: $A(p_1, \dots, p_n)$ kommt vor $A(p'_1, \dots, p'_n)$, wenn entweder (a) $p_1 + \dots + p_n < p'_1 + \dots + p'_n$ oder (b) $p_1 + \dots + p_n = p'_1 + \dots + p'_n$, $p_1 = p'_1, \dots, p_{k-1} = p'_{k-1}$, $p_k < p'_k$ ist. Satz (Abelscher Art): Konvergiert (1) zur Summe S , so strebt $f(z_1, \dots, z_n) = \sum A(p_1, \dots, p_n) z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n}$ gegen S , sofern $z_i \rightarrow 1$ ($i = 1, \dots, n$) in einem gewissen (bestmöglichen) „Stolz-

chen" Bereich. Ebenfalls ohne Beweis werden mitgeteilt zugehörige Sätze tauberscher Art mit o - und O -Bedingungen. W. Meyer-König.

Mergeljan, S. N.: Über die Vollständigkeit von Systemen analytischer Funktionen. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 4, 3—63 (1953) [Russisch].

Cet article d'exposition est essentiellement consacré à l'étude de l'approximation en moyenne quadratique, par des polynômes, d'une fonction analytique dans un domaine D du plan complexe; les fonctions envisagées sont celles de la classe $H_2(D)$ caractérisée par $\int_D |f(z)|^2 dx dy < +\infty$ ou, si l'on utilise un poids $h(z) \geq 0$, celles de la classe $H_2(D; h)$ définie par $\int_D |f(z)|^2 h(z) dx dy < +\infty$. Les travaux cités sont dus à M. V. Keldyš et à d'autres mathématiciens soviétiques: A. I. Markuševič, A. L. Šaginjan, M. M. Džrbašjan, N. Mergeljan; le présent article est rédigé pour être lu indépendamment de ces travaux, la plupart des démonstrations sont développées. Analyse: chap. I: domaine D borné, classe $H^2(D)$. 1) Domaines de Carathéodory (frontière de D identique à la frontière de la imposante non bornée du complémentaire de D): les polynômes forment un système complet dans $H^2(D)$ (O. Farrell, ce Zbl. 10, 348; A. I. Markuševič, Thèse, Moscou 1934); théorème analogue pour le système des fractions rationnelles à pôles imposés dans certains domaines multillement connexes. — 2) Domaines du type de la lunule limitée par deux cercles tangents: $D = D_1 - D_2$, $D_2 \subset D_1$, z_0 point commun unique aux frontières de D_1 et D_2 . Le système des polynômes est complet ou non dans $H_2(D)$ selon les propriétés métriques de \bar{D} (M. V. Keldyš, ce Zbl. 22, 364). Critère de normalité de Šaginjan [Doklady Akad. Nauk Armjanskoi SSR, 5, no. 4 (1946)]; les fonctions $f(z)$ holomorphes dans D_1 , à croissance convenablement limitée au voisinage de z_0 dans D_1 , et telles que $\iint_D |f(z)|^2 dx dy \leq \text{const.}$, forment une famille normale dans D_1 , si de plus le domaine D satisfait à une condition de nature métrique, impliquant que D n'est pas "trop mince" au voisinage de z_0 . — 3) Soit D borné tel que la famille des fractions rationnelles à pôles hors de \bar{D} est partout dense dans $H^2(D)$; un critère de M. V. Keldyš publié ici pour la première fois, donne une condition métrique permettant d'affirmer que le système des polynômes est complet dans $H^2(D)$. — Chap. II: domaine borné, classe $H^2(D; h)$. Dans le cas du cercle d'abord, de domaines généraux ensuite, on donne des conditions permettant d'affirmer que le système des polynômes est complet, puis des exemples du cas contraire. — Chap. III: domaine non borné. Exemple, dû à Šaginjan, d'un domaine partout dense dans le plan et pour lequel le système des polynômes est complet. — Si on prend pour D le domaine $y > 0$, $a e^{-y} x^p < y < c e^{-y} x^p$ ($0 < p < 1/2$), le système des polynômes n'est pas complet. — Condition suffisante pour que le système des polynômes soit complet. — Étude de l'approximation polynomiale sur une courbe fermée, puis sur une courbe allant à l'infini.

G. Bourion.

Mergeljan, S. N.: Über die Geschwindigkeit der Approximation von Funktionen durch Polynome auf beliebigen Kontinuen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 1, 1271—1274 (1953) [Russisch].

E est un continu borné à complémentaire connexe; $f(z)$ est définie et continue sur E , holomorphe aux points intérieurs. Poursuivant l'étude asymptotique de la meilleure approximation $\varrho_n(f, E)$ de $f(z)$ sur E par des polynômes de degré n , l'A. examine les cas suivants: 1) $f(z)$ holomorphe et bornée dans un domaine D , $E \subset D$; 2) $f(z)$ admet un module de continuité donné.

G. Bourion.

Macintyre, Sheila Scott: An interpolation series for integral functions. *Proc. Edinburgh math. Soc.*, II. Ser. 9, 1—6 (1953).

Verf. beweist über die Gontcharoffschen Interpolationsreihen

1) $\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(a_n) G_n(z)$, wobei $G_0(z) = 1$ und $G_n(z) = \int_{a_0}^z dz_1 \int_{a_1}^{z_1} dz_2 \cdots \int_{a_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_n$; $n \geq 1$,

folgendes Theorem, das nachher noch verschärft wird: Ist $a_n = \omega^n$ mit $|\omega| > 1$, $\arg \omega \neq 0$ und $F(z)$ eine ganze Funktion, so konvergiert die zugehörige Reihe (1) in jedem beschränkten Bereiche gleichmäßig gegen $F(z)$, wenn (2) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log M(r) = \varrho_1$.

$M(r)$ bezeichnet das Maximum von $|F(z)|$ auf $|z| = r > 0$ und ϱ_1 den Absolutbetrag derjenigen Nullstelle von $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n(n-1)/2} z^n / n!$, welche $z = 0$ am nächsten liegt. Die Konstante ϱ_1 in (2) läßt sich nicht verbessern. E. Lammel.

Mikhail, M. N.: Derived and integral sets of basic sets of polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 4, 251—259 (1953).

Eine Polynomfolge (1) $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) heißt basisch, wenn sich jedes Polynom in z eindeutig als endliche Linearkombination der $p_n(z)$ mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt. D_n soll der Grad desjenigen der in (2) $z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$ auftretenden Polynome $p_n(z)$ sein, welches den höchsten Grad hat. Der Ausdruck $\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n} \right\}$, wobei $\omega_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| M_i(R)$ und $M_n(R) = \max_{|z|=R} |p_n(z)|$ bedeuten, wird als die Ordnung der Folge (1) bezeichnet. Zu jeder in einer Umgebung von $z = 0$ regulären Funktion $f(z)$ gibt es eine basische Reihe (3) $\sum_n \Pi_n f(0) p_n(z)$, wobei $\Pi_n = \pi_{0n} + \sum_i \frac{\pi_{in}}{i!} \frac{d^i}{dz^i}$ ist. Eine basische Polynomfolge (1) nennt man in einem Bereiche B effektiv, wenn für jede in B reguläre Funktion $f(z)$ die zugehörige Reihe (3) in B gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Aus einer basischen Polynomfolge (1) erhält man durch h -malige Differentiation nach z eine Polynomfolge, welche durch Weglassen von höchstens h Gliedern in eine basische Polynomfolge (4) $\{t_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) übergeht. Verf. beweist, daß für eine basische Polynomfolge (1) mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n/n = a$ ($a \geq 1$) die Polynomfolge (4) wenigstens in demselben Bereiche wie die Folge (1) effektiv ist. Hat ferner eine basische Polynomfolge (1) die Ordnung ω und ist $D_n = O(n^a)$; $a \geq 1$, so ist die Ordnung der Folge (4) $\geq \omega$. Integriert man eine basische Polynomfolge (1) h -mal nach z , so entsteht eine Polynomfolge, aus der man durch Hinzunahme der Polynome $1, z, z^2/2!, \dots, z^{h-1}/(h-1)!$ eine basische Polynomfolge (5) $\{t_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) erhält. Bezüglich dieser Folge beweist Verf., daß $\{p_n(z)\}$ und die zugehörige Folge (5) im gleichen Bereiche effektiv sind, wenn $\{p_n(z)\}$ die Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n/n! = a$ ($a \geq 1$) hat. Schließlich wird gezeigt, daß die Ordnung von $\{t_n(z)\}$ nicht größer als die von $\{p_n(z)\}$ sein kann.

E. Lammel.

Makar, Ragy and Bushra H. Makar: Effectiveness at the origin of the sum set of basic sets of polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 4, 246—250 (1953).

$\{p_n^{(v)}(z)\}$ ($v = 1, 2, \dots, k$) seien k Polynomfolgen, wobei $p_n^{(v)}(z)$ den Grad n hat und der Koeffizient von z^n gleich 1 ist. Jede dieser basischen Polynomfolgen sei für $z = 0$ effektiv. Verf. zeigen, daß dann die basische Polynomfolge $\{q_n(z)\} = \sum_{v=1}^k \lambda_v p_n^{(v)}(z) / \sum_{v=1}^k \lambda_v$, $\sum_{v=1}^k \lambda_v \neq 0$ nicht notwendig für $z = 0$ effektiv sein muß. Ist aber die Folge $\{q_n(z)\}$ algebraisch, so ist sie für $z = 0$ auch effektiv. Wegen der Terminologie sei auf die Arbeit der Verf., dies. Zbl. 44, 79 verwiesen.

E. Lammel.

Gaier, Dieter und Alexander Peyrerimhoff: Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen. Math. Z. 58, 232—242 (1953).

Das Euler-Knopp'sche Verfahren E_p sei als Limitierungsverfahren mit Hilfe der Matrix $a_{nv} = (p+1)^{-n} \binom{n}{v} p^{n-v}$ ($v = 0, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots$) erklärt ($p > 0$). Satz A: Für alle E_p -summierbaren Reihen $\sum a_n$ konvergiert $\sum (2p+1)^{-n} a_n$. Für diesen Satz gab der zweitgenannte Verf. früher (dies. Zbl. 46, 64) einen rein arithmetischen Beweis. Jetzt wird der Satz auf wenigen Zeilen mit funktionentheoretischen Mitteln abgeleitet. Dieselbe Methode wird zur Gewinnung weiterer Sätze benutzt. Sei $0 < p < q$, $0 < k$, \mathcal{R}_q der Kreis $|z - q(2q+1)^{-1}| = (q+1)(2q+1)^{-1}$. Das E_p -Summationsgebiet einer Potenzreihe $\sum a_n z^n$, die eine im Innern von \mathcal{R}_q reguläre und darüber hinaus nicht fortsetzbare Funktion darstellt, werde nach Hinzunahme aller Randpunkte unter Weglassung der Stelle $z = -(2q+1)^{-1}$ mit B_{pq}^+ bezeichnet. C_k bezeichne das Cesàro'sche Verfahren der Ordnung k . Die Folge ε_n heiße eine Folge von (A, B) -Summierbarkeitsfaktoren, wenn sie jede A -summierbare Reihe $\sum a_n$ in eine B -summierbare Reihe $\sum \varepsilon_n a_n$ überführt. Das Hauptergebnis im ersten Teil der Arbeit ist der Satz: Genau für die Punkte z aus B_{pq}^+ ist die Folge $\varepsilon_n = z^n$ eine Folge von $(C_k E_q, C_k E_p)$ -Summierbarkeitsfaktoren. Der Beweis wird vorbereitet durch ein hinreichendes Kriterium für $C_k E_p$ -Summierbarkeit einer Potenzreihe. Im zweiten Teil der Arbeit handelt es sich um die Übertragung des Satzes A auf allgemeine Euler-Transformationen im Sinn von Knopp und Perron. Die Übertragung gelingt für gewisse Klassen von solchen Transformationen.

W. Meyer-König.

Gaier, Dieter: Complex Tauberian theorems for power series. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 48—68 (1953).

Es handelt sich zuerst darum, bei dem Funktionselement (1) $f(z) = \sum a_n z^n = (1-z) \sum s_n z^n$ vom Konvergenzradius 1 aus dem Verhalten von $f(z)$ in der Umgebung von $z = 1$ auf das Verhalten von s_n für $n \rightarrow \infty$ zu schließen ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$). Nach P. Fatou gilt der Satz A: Ist

1) regulär bei $z = 1$ und $\lim a_n = 0$, so ist $\sum a_n$ konvergent. $S_1 = S_1(R, \Theta_0)$ sei der Bereich $z \in R, \arg(z-1) \in \Theta_0$ ($R > 1, 0 < \Theta_0 < \pi/2$); $S_1 = S_1 +$ Randpunkte von S_1 . Nach M. Riesz (vgl. z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Berlin 1929, S. 64) gilt Satz B: Ist 1) regulär in S_1 und stetig in $S_1 \cap (R, \Theta_0)$ fest), so ist $\sum a_n$ konvergent. Verf. schwächt die Voraussetzungen über $f(z)$ ab und bekommt einen Satz, der A und B enthält. $S_2 = S_2(\delta_0, \Theta_0)$ sei der Bereich $z = 1 + \delta_0 \cdot \arg(z-1) \in \Theta_0$ ($\delta_0 > 0, 0 < \Theta_0 < \pi/2$). Satz 1: Ist (1) regulär und beschränkt in S_2 ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und strebt $f(z) \rightarrow s$ für (reelles) $z \rightarrow 1 - 0$), so ist $\sum a_n$ konvergent. Um B als in Satz 1 enthalten zu erkennen, hat man zu beachten, daß aus der Stetigkeit von (1) in $z = 1$ in bekannter einfacher Weise $a_n \rightarrow 0$ folgt. Die Voraussetzung über $f(z)$ ist in Satz 1 gegenüber B lokalisiert. Beim Beweis, der komplexe Integration und Rieszsche Ansätze benützt, wird allgemeiner gleichmäßige Konvergenz von (1) auf $|z| = 1$ in einer Umgebung von $z = 1$ nachgewiesen. Satz 1 gilt nicht mehr, wenn S_2 ersetzt wird durch den Bereich S_4 : $z = 1 + \delta_0 \cdot \arg(z-1) \in \Theta_0$, $z = 1 + c_0 \cdot \Phi^2$ ($\Phi = \arg z$; $\delta_0 > 0, c_0 > 0$), es sei denn, man verstärkt die Voraussetzungen über s_n . Es gilt nämlich Satz 4: Ist (1) regulär und beschränkt in S_4 , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und $V \cdot \sum a_n = s$, so ist $\sum a_n$ konvergent. Darin bedeutet V ein reguläres Euler-Knopp-Verfahren E_α , oder das Borel-Verfahren B , oder das Verfahren S_α ($0 < \alpha < 1$), das auf der Transformation $t_n = (1 - \alpha)^{n+1} \sum_{h=0}^n \binom{n+h}{h} \alpha^h s_h$ beruht. Bei den bisherigen Sätzen

handelte es sich in der Behauptung um die Konvergenz von $\sum a_n$. In weiteren Sätzen zielt Verf. darauf ab, auf die V -Summierbarkeit von $\sum a_n$ zu schließen, wobei ab jetzt von (1) nur noch vorausgesetzt sei, daß der Konvergenzradius positiv ist. Z. B. Satz 6: Ist (1) regulär in $\mathfrak{R}(x)$, regulär in $\mathfrak{R}(2-x)$ ($\mathfrak{R}(a)$ die Kreisfläche $|z-a| < 1-a$) und stetig in $\mathfrak{R}(x)$ (x fest), so ist $C \cdot S_2 \cdot \sum a_n$ für jedes $\varepsilon > 0$ vorhanden (C_ε das Cesàrosche Verfahren der Ordnung ε). Ähnlich für E_ε ; speziellere solche Aussagen vgl. Ref., dies. Zbl. **34**, 329. Bemerkenswert ist Satz 8: Liegt $z = 1$ am Rand des Bereichs der B -Summierbarkeit von (1), was die Regularität von (1) in $\mathfrak{R}(\frac{1}{2})$ zur Folge hat, ist (1) regulär und beschränkt in S_2 , ist $B \cdot \lim a_n = 0$ und strebt $f(z) \rightarrow s$ für $z \rightarrow 1 - 0$, so ist $B \cdot \sum a_n$ vorhanden. Ähnlich für E_p und S_α . Von den weiteren Resultaten nach Satz 10: Ist (1) in $\mathfrak{R}(\frac{1}{2})$ regulär und dort zur Klasse H^1 gehörig, so ist dann und nur dann $B \cdot \sum a_n = s$, wenn $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} t^{-1} f((1+i t)^{-1}) \cdot \sin t \, dt = s$ ist für jedes $\tau > 0$. Damit wird eine Untersuchung von J. Karamata (dies. Zbl. **19**, 113) weitergeführt.

W. Meyer-König.

Blambert, Maurice: Complément à un théorème de G. Pólya. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1622—1624 (1953).

Die Funktion $q(s)$ sei durch eine Dirichletsche Reihe $q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$ gegeben. Verf. betrachtet Reihen von der Form $\psi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r \frac{d^r q}{ds^r}$. Für ihre Untersuchung ist die „Generatrix“ $\Theta(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r (-z)^r$ wichtig. Pólya (dies. Zbl. **8**, 62) hatte einige Bedingungen für $\Theta(z)$ angegeben, unter denen man aus der Regularität bzw. einer bestimmten Art von Singularität von $q(s)$ in einem Punkt auf die entsprechenden Eigenschaften von $\psi(s)$ schließen kann. Verf. verfeinert diese Ergebnisse noch; er verlangt z. B. von $\Theta(z)$ nicht mehr, daß sie vom exponentiellen Typ sei, sondern fordert schwächere Eigenschaften. Die Arbeit besteht aus der Formulierung zweier Sätze und einer Vermutung, sowie den dazu erforderlichen Definitionen. Beweise gibt Verf. nicht. O.-H. Keller.

Wilson, R.: On the Hadamard product of two isolated essential points of finite exponential order. J. London math. Soc. **28**, 490—494 (1953).

In Fortsetzung seiner Arbeiten aus den Jahren 1937—53 leitet der Verf. Sätze ab, die es erlauben, aus der Kenntnis der Ordnungen, Typen und Rich-

tungen des stärksten Anwachsens zweier analytischer Funktionen in der Umgebung ihrer isolierten wesentlichen Singularitäten Aussagen zu treffen über Ordnung, Typ und Richtungen des stärksten Anwachsens der Hadamardschen Komponierten beider Funktionen in der Umgebung der zugehörigen Produktsingularitäten (die bekanntlich, falls sie nicht mehrfach auftreten, wieder isolierte wesentliche Singularitäten für die Hadamardsche Komponierte sind). *St. Schottlaender.*

Wilson, R.: Some applications of the Hurwitz-Pincherle composition theory. *J. London math. Soc.* 28, 484—490 (1953).

Anders als im Fall der Hadamardschen Komposition ist im Fall der Hurwitzschen Komposition bisher nur bekannt, daß zwei Pole der Ordnungen $m + 1$ bzw. $n + 1$ bei der Komposition wieder einen Pol der Ordnung $m + n + 1$ liefern (falls die komponierte Singularität nicht mehrfach auftritt). Verf. beweist, daß die „Addition“ eines Poles und einer isolierten wesentlichen Singularität ebenso wie die „Addition“ zweier isolierter wesentlicher Singularitäten stets eine isolierte wesentliche Singularität für die Hurwitzsche Komponierte liefert (mehrfaches Auftreten ausgenommen). Ähnlich wie im Hadamardschen Fall leitet der Verf. dann Sätze ab, die Aussagen machen über Ordnung, Typ und Richtungen des stärksten Anwachsens der Hurwitzschen Komponierten in der Umgebung einer isolierten wesentlichen Singularität, wenn die entsprechenden Angaben für die zugehörigen Singularitäten der Ausgangsfunktionen bekannt sind.

St. Schottlaender.

Ponting, F. W.: The location of singularities on the circle of convergence of gap series. *I. Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* 4, 19—35 (1953).

Verf. schließt an eine Arbeit von A. J. Macintyre und R. Wilson (dies. Zbl. 26, 13) an. Dörtige Ergebnisse werden, mit den gleichen Hilfsmitteln, erweitert. Das Funktionselement (1) $\Phi(z) = \sum c_n z^n$ besitze (gemeint: auf seinem Konvergenzkreis) genau k verschiedene isolierte nicht-kritische Singularitäten endlicher Exponentialordnung. Dabei ist in der vorliegenden Arbeit $k = 2l$ mit $l = 2$ oder $l = 3$. Die obere Dichte der „kleinen“ Koeffizienten in (1) sei größer als $1 - 1/l$. („Kleine“ Koeffizienten sind solche, die einer Ungleichung der Form $|c_n| < e^{-\gamma n}$ genügen, wobei γ eine passend vorgeschriebene positive Zahl ist.) Dann liegen die Singularitäten in k Ecken eines regulären Polygons \mathfrak{P} . Nur folgende Fälle sind möglich. (α) \mathfrak{P} hat k Seiten. (β) \mathfrak{P} hat $k - u$ Seiten, wobei u ein Teiler von k ist und die Singularitäten in den Ecken von k/u regulären u -Ecken liegen. (γ) \mathfrak{P} hat $k + 2u'$ Seiten, wobei $k = 3u'$ ist und die Singularitäten in den Ecken von 3 regulären u' -Ecken liegen. (δ) \mathfrak{P} hat j/l Seiten, wobei $j > 3$ ist und die Singularitäten in den Ecken von 2 regulären l -Ecken liegen. (Ein 1-Eck wird von einem einzelnen Punkt, ein 2-Eck von zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten gebildet.) Einfache Beispiele zeigen, daß alle diese Fälle vorkommen. Die Aussage ist bestmöglich in folgendem Sinn: Bei der Funktion $\Phi(z) = (1 - \alpha z^l)^{-1} + (1 - \beta z^l)^{-1}$ ($|\alpha| = |\beta|$) haben die kleinen (d. h. verschwindenden) Koeffizienten die Dichte $1 - 1/l$, und ihre Singularitäten liegen in den Ecken zweier ganz unabhängig voneinander wählbaren Polygone.

W. Meyer-König.

Rudin, Walter: Analyticity, and the maximum modulus principle. *Duke math. J.* 20, 449—457 (1953).

Considering algebras of functions, the author investigates to what extent the maximum modulus principle characterizes the class of analytic functions. Let B be the boundary of a compact set K in the z -plane. An algebra \mathfrak{A} of complex-valued functions continuous on K is called a maximum modulus algebra on K if for every $f \in \mathfrak{A}$ there is a point $z_0 \in B$ such that $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ ($z \in K$). \mathfrak{A} is called a local maximum modulus algebra in a domain D if for every $z \in D$ there is a sequence of Jordan domains U_n whose diameter tends to zero as $n \rightarrow \infty$, such that $z \in U_n$, and such that \mathfrak{A} is a maximum modulus algebra on the closure of U_n . The author proves: Let \mathfrak{A} be a maximum modulus algebra on the closure \bar{K} of a Jordan domain D . If \mathfrak{A} contains a function η which is schlicht on K , then every member of \mathfrak{A} is an analytic function of η . If, in addition, \mathfrak{A} contains a non-constant function q which is analytic in D , then every member of \mathfrak{A} is analytic in D . Next he proves: If \mathfrak{A} is a local maximum modulus algebra in a domain D , and if \mathfrak{A} contains a function q which is analytic and non-constant in D , then every member of \mathfrak{A} is analytic in D . Finally, the author extends the first result to the case where D is bounded by a finite number of non-intersecting Jordan curves: If \mathfrak{A} is a maximum modulus algebra on the closure \bar{K} of a domain D , and if \mathfrak{A} contains all functions which are analytic and single-valued in D and continuous on K , then every member of \mathfrak{A} is analytic in D .

K. Noshiro.

Targonszky, G.: An always convergent iteration process. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 119–125 und russ. Zusammenfassg. 126 (1953).

Verf. beschreibt ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Gleichung $f(z) = 0$, welches stets konvergiert, von dem man dann aber natürlich nicht besonders gute Konvergenz im Einzelfalle erwarten kann. $f(z)$ besitze in einem Sektor $S: |z| \leq K$, $q_0 = \arg z = q_1$ den Stetigkeitsmodul $\omega(x) = \sup_{|z_1 - z_2| < x} |f(z_1) - f(z_2)|$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$. Es sei $g(x)$ eine stetige monoton wachsende Funktion mit der Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ und mit $g(0) = 0$, $g(x) \leq \omega(x)$ für $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ und $F(x)$ eine monoton fallende Funktion

mit $F(0) = 1$, $(1+x)F_1(x) \leq 1$ für $x > 0$, $\gamma > 0$ eine Zahl mit $\gamma K < 1$ und es werde $\vartheta(z) = zF_1[g^{-1}(|f(z)|)]$ gesetzt. Dann ist die Folge $\vartheta_n(z) = \vartheta(\vartheta_{n-1}(z))$ mit $\vartheta_0(z) = z$, für $n = 1, 2, \dots$ stets konvergent, und zwar strebt sie gegen 0, falls die Strecke von 0 bis z („der Radius 0“) frei von Nullstellen von $f(z)$ ist, andernfalls strebt sie radial nach innen gegen die nächste dort auf dem Radius 0 z gelegenen Nullstelle von $f(z)$. Ist S_0 ein in S enthaltener sterförmiger Bereich, und geht S_n aus S_{n-1} durch die Abbildungsfunktion $\vartheta(z)$ hervor, so enthält jedes S_n alle Nullstellen von $f(z)$, die in S_0 liegen und die Fläche von S_n geht gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Anwendungen auf Polynome $f(z)$.
L. Collatz.

Talanov, D. I.: Über gewisse Fragen der Iterationstheorie einer rationalen Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 413–416 (1953) [Russisch].

Die Iterierten $R_n(z)$ der rationalen Funktion $w = R(z)$ sind mit $R_0(z) = z$, $R_n(z) = R[R_{n-1}(z)]$ ($n = 1, 2, \dots$) definiert; $z_n = R_n(z_0)$ ist der „ n -te Nachfolger“ von z_0 , alle z_n mit $R_n(z_n) = z_0$ bezeichnet man als „ n -te Vorgänger“ von z_0 . Nach Fatou ist die stets existierende perfekte Menge $\tilde{\lambda}$ aller Punkte der Zahlenkugel, bei denen die Folge der $R_n(z)$ nicht normal ist, identisch mit der Ableitung der Menge aller Fixpunkte; ξ ist ein Fixpunkt, wenn es mindestens ein m gibt, für welches $R_m(\xi) = \xi$ gilt. Da die Menge aller Fixpunkte und deren Vorgänger abzählbar ist, gibt es in $\tilde{\lambda}$ eine Menge \mathfrak{M} von „beweglichen Punkten“, die weder selber Fixpunkte noch Vorgänger von Fixpunkten sind; \mathfrak{M} ist von der Mächtigkeit des Kontinuums. Mit funktionentheoretischen Methoden beweist Verf. im wesentlichen, daß die Ableitung der Menge aller Nachfolger jedes beweglichen Punktes von $\tilde{\lambda}$ identisch mit $\tilde{\lambda}$ ist. — Da man über die Konvergenz der Nachfolger der Punkte, die nicht zu $\tilde{\lambda}$ gehören, durch Cremer, Fatou, Julia, Siegel usw. im Bilde ist, hat mit dieser Arbeit das angeschnittene Problem für rationale Funktionen einen gewissen Abschluß erreicht.
H. Töpfer.

Pastidès, Nicolas: Sur les fonctions à centre. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 957–959 (1953).

Gegeben sei die bei $z = 0$ reguläre Funktion $f(z) = sz + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ($s = e^{i\alpha\pi}$, α reell irrational). Gesucht ist eine Potenzreihe $\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n$ mit $\beta_1 = 1$, so daß $f[\Phi(z)] = \Phi(sz)$.

Koeffizientenvergleich liefert eindeutig eine formale Lösung. Diese (möglicherweise divergente) Reihe sei jetzt mit $\Phi(z)$ bezeichnet. Hat $\Phi(z)$ einen nicht verschwindenden Konvergenzradius, so heißt nach G. Julia [J. Math. pur. appl., VIII. Sér. 1, 47–245 (1918)] $z = 0$ ein Zentrum für $f(z)$. Eine Zahl ρ ($0 < \rho < 1$) werde gewählt; m_p ($p = 1, 2, \dots$) sei die Menge der natürlichen Zahlen n , für die $|s^n - s| < \rho$ ist. Satz I: Existiert ein ρ , so daß $|\beta_{m_p}| < \rho^p$ für alle p ist, dann hat $\Phi(z)$ einen nicht verschwindenden Konvergenzradius.

Sei $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ die inverse Reihe zu $\Phi(z)$, $f^1(z) = f(z)$, $f^k(z) = f[f^{k-1}(z)]$, $q_n(z) =$

$n^{-1} \left(z + \sum_{i=1}^{n-1} s^{-i} f^i(z) \right) = z + \sum_{p=2}^{\infty} a_{n,p} z^p$. Satz II: $a_{n,p} \rightarrow b_p$ bei $n \rightarrow \infty$ für alle p . Darin ist speziell ein Resultat von Julia enthalten: Bildet die Funktionenfolge $f^n(z)$ in einem den Ursprung enthaltenden Gebiet eine normale Familie, dann ist $z = 0$ Zentrum für $f(z)$.
W. Meyer-König.

Russo, Salvatore: Sulle trascendenti intere di genere zero. Matematiche 8, 3–9 (1953).

Sei $f(x)$ eine ganze transzendente Funktion vom Geschlecht 0 mit $f(0) = 1$. a_v ($v = 1, 2, \dots$) seien Nullstellen, $s_k = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{a_v^k}$ ($k = 1, 2, \dots$) und $\sum_{v=1}^{\infty} c_v z^v$ ihre

Potenzreihenentwicklung, dann gilt die Beziehung $\sum_{x=1}^{k-1} c^x s_{k-x} + k c_k = 0$ ($k=1, 2, \dots$).

Daraus folgen speziell für geeignete Funktionen $f(z)$ Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen. Th. Schneider.

Buck, R. Creighton: Essentially admissible sequences. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 387—390 (1953).

X sei die Menge aller komplexen Zahlenfolgen $\alpha = \{\alpha_n\}$, für welche $\|\alpha\| = \sup_n |\alpha_n|^{1/(n+1)} < \infty$ ist. Die Entfernung zwischen zwei Folgen α und β aus X wird durch $\|\alpha - \beta\|$ definiert. α soll wesentlich zulässig heißen, wenn es eine ganze Funktion $f(z)$ vom Normaltypus erster Ordnung mit folgenden beiden Eigenschaften gibt: 1) Für ein $c < \pi$ ist $f(iy) = O(\exp(c|y|))$ und 2) $f(n) = a_n$ für alle hinreichend großen Werte von n . Verf. beweist, daß die wesentlich zulässigen α eine Menge A bilden, die eine Untermenge von X darstellt und in X nicht dicht ist. $K(a, c)$ bezeichne die Klasse derjenigen ganzen Funktionen $f(z)$, für welche $f(z) = O(\exp(a|x| + c|y|))$ gilt. Dabei sind a und c reelle Zahlen, die den Bedingungen $0 \leq a < \infty$ und $0 \leq c < \pi$ genügen. $A(a, c)$ sei die entsprechende Untermenge von A . Verf. beweist, daß $A(a, c)$ eine nicht dichte Menge ist. — Die Beweise stützen sich auf folgende Charakterisierung der Vereinigungsmenge A^* der abgeschlossenen Hüllen von $A(a, c)$: Dann und nur dann ist $\alpha \in A^*$, wenn $g(z) = \sum A^n a_0 z^n$ für $z = 0$ regulär ist und sich längs $-1 \leq r \leq 0$ analytisch fortsetzen läßt, mit eventueller Ausnahme von -1 , wo sich dann eine isolierte Singularität befindet. Vgl. R. C. Buck, dies. Zbl. **50**, 81. E. Lammel.

Redheffer, R. M.: On a theorem of Plancherel and Pólya. Pacific J. Math. **3**, 823—835 (1953).

Let $F(z)$ be an entire function of order 1, type α . If $F(x) \in L^2$ on $(-\infty, \infty)$ then $F(z)$ can be represented in the form $F(z) = \int_{-a}^a e^{izt} f(t) dt$, with $f(t) \in L^2$ on $[-a, a]$. This is a result of Plancherel and Pólya (this Zbl. **16**, 360; **18**, 152). The purpose of this paper is to show how the Plancherel-Pólya theorem can be used to give simple proofs of other results concerning the growth, complex roots and some other properties of $F(z)$. K. Noshiro.

Leont'ev, A. F.: Zur Frage der Darstellung ganzer Funktionen durch Folgen linearer Aggregate. Mat. Sbornik, n. Ser. **33** (75), 453—462 (1953) [Russisch].

La suite de fonctions entières $\{f_n(z)\}$ est dite d'ordre fini si l'on a une majoration: $|f_n(z)| < e^{|z|^\mu}$ pour $|z| > r_0$, où μ et r_0 sont indépendants de n : l'ordre de la suite est la borne inf. des μ . Cette notion permet à l'A. de préciser comme suit un résultat de A. O. Gel'fond (ce Zbl. **20**, 299) et de A. I. Markuševič [Mat. Sbornik, n. Ser. **17**, 211—252 (1945)]: soient données une fonction entière d'ordre ϱ , $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $a_n \neq 0$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et une suite $\{\lambda_n\}$, $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ d'exposant de convergence $\varrho_1 \leq \varrho$. Toute fonction entière d'ordre fini ν est la limite dans tout le plan d'une suite de combinaisons linéaires des $f(\lambda_n z)$, l'ordre ω de cette suite vérifiant $\omega \leq \max(r, \varrho, \varrho_1(\varrho - \varrho_1))$. De plus, si $f(z)$ vérifie $\frac{n \log n}{-\log |a_n|} \rightarrow \varrho$, et si $\nu < \varrho$, on a nécessairement $\omega = \frac{\varrho \varrho_1}{\varrho - \varrho_1}$. G. Bourion.

Combes, Jean: Sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. **16**, 212—230 (1953).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le voisinage de $z = 0$. Si $f^{(m)}(0) \rightarrow A \neq \infty$, alors $f(z)$ est une fonction entière d'ordre 1 au plus et, dans tout domaine borné, $f^{(m)}(z)$ tend uniformément vers $A z^m$. On peut, dans cet énoncé, remplacer $f^{(m)}$ par $c_m f^{(m)}$ si la suite numérique c_m est telle que $c_m/c_{m+1} \rightarrow \lambda \neq \infty$; la fonction limite est alors $A e^{\lambda z}$. On peut aussi remplacer $f^{(m)}$ par $\sum_0^m c_n f^{(n)}/q(n)$ si les suites numériques c_n et $q(n)$ satisfont à certaines conditions de régularité: la fonction limite est alors $A e^{\lambda z}$. L'A. démontre encore d'autres propriétés: Si $f^{(m)}(0) \rightarrow \infty$ et si $|f^{(m+1)}(0)/f^{(m)}(0)|$ est bornée, alors $f^{(m)}(z)$ tend uniformément vers ∞ dans un certain voisinage de $z = 0$: la condition imposée à $f^{(m+1)}(0)/f^{(m)}(0)$ est essentielle d'après un théorème de Radström-Martin dont l'A. indique une nouvelle démonstration. — Si $f^{(2n+1)}(0) \rightarrow A$ et $f^{(2n)}(1) \rightarrow B$, $f(z)$ est une fonction entière d'ordre 1 au plus et, dans tout domaine borné,

$f^{(2n+1)}(z)$ et $f^{(2n)}(z)$ tendent uniformément vers des fonctions simples. — Si dans un domaine, la suite partielle $f^{(n)}(z)$ tend uniformément vers $F(z)$ et si $\liminf(n_{i+1} - n_i) < \infty$, la fonction $F(z)$ est solution de $F^{(p)} = F$; si, de plus, $\limsup n_{i+1}/n_i = \rho < \infty$, alors $f(z)$ est une fonction entière d'ordre ρ au plus; si $\limsup(n_{i+1} - n_i) = \infty$, il y a convergence uniforme dans tout domaine borné.

J. Dufresnoy.

Schaeffer, A. C.: Entire functions and trigonometric polynomials. Duke math. J. 20, 77—88 (1953).

The author proves the following theorem: let E be a closed set on the real axis such that for some positive numbers A , α every interval of length A on the real axis contains a subset of E of measure greater than α . Then at almost all points $x \in E$ there is a number $= q(x)$ such that if $f(z)$ is an entire function of exponential type $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, $\gamma > 0$, and $|f(z)| \leq 1$ in E then $|f'(x)| \leq \gamma q$. The proof is based on two lemmas: 1° There exists a angle valued function $u(x, y)$ harmonic outside E having the limit 0 at almost all points of E such that $u(x, y) = y \cdot h(x, y)$, where $h(x, y)$ is a bounded and nonnegative function. Moreover $u_y(x, y) > 0$ for $y > 0$ and $u_y(x, y) < 0$ for $y < 0$. 2° Let $F(z) = \exp(u + iv)$ where v is the harmonic conjugate of u . Then for almost all $x \in E$ there is a number $= p(x)$ such that $|F(z)| \leq \exp(p|z - x|)$.

J. Gorski.

Stečkin, S. B.: Eine Abschätzung des Restes der Taylorsche Reihe für gewisse Klassen von analytischen Funktionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. nat. 17, 461—472 (1953) [Russisch].

Soit $B^{(r)}$ la classe des fonctions $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ régulières dans $|z| < 1$ et y vérifiant $|F^{(r)}(z)| \leq 1$. On pose $p_n(z, F) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, $r_n(z, F) = F(z) - p_n(z, F)$, $R_n(F) = \sup_{|z| \leq 1} |r_n(z, F)|$, $R_n[B^{(r)}] = \sup_{F \in B^{(r)}} R_n(F)$. L'A. obtient l'évaluation asymptotique

$$R_n[B^{(r)}] = \pi^{-1} (n+1)^{-r} \log(n+1) + O((n+1)^{-r})$$

et donne une extension à $B^{(r)}$ du théorème de Bohr-Neder. La démonstration repose sur l'approximation de $F(z)$ par les moyennes arithmétiques des sommes partielles de sa série de Taylor, et utilise des lemmes qui fixent la rapidité de convergence de $\sum u_k$ moyennant une hypothèse de limitabilité $(C, 1)$ pour $\sum k u_k$.

G. Bourion.

Spak, G. S.: Über gewisse Abschätzungen für das Argument einer analytischen Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 711—713 (1953) [Russisch].

On considère les fonctions analytiques dans $|z| < 1$, y vérifiant $f(z) \neq 0$, et pour lesquelles les deux premiers coefficients b_0 et b_1 du développement $f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ ont des valeurs données; soit $\text{Arg } b_0 = \alpha$ ($-\pi < \alpha \leq \pi$). L'A. exprime $\inf \sup_{|z| < 1} |\text{Arg } f(z)|$ en fonction de α et $|b_1/b_0|$. Supposant ensuite que l'on fixe seulement le rapport $|b_1/b_0|$, il obtient $\sup_{|z| < 1} |\text{Arg } f(z)| \geq \frac{\pi}{4} \left| \frac{b_1}{b_0} \right|$, inégalité exacte qui améliore une inégalité de G. Szegő [Math. Z. 6, 167—202 (1920)].

G. Bourion.

Bagemihl, F. and W. Seidel: Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analytic and meromorphic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1251—1258 (1953).

Im ersten Teil der Note wird eine Funktion konstruiert, die in einem von endlich vielen Kreisen oder Punkten begrenzten Bereich meromorph (in gewissen Fällen sogar regulär) ist, auf endlich vielen vorgegebenen, gegen den Rand strebenden Wegen vorgegebenen Zielwerten zustrebt und sich andererseits bei Annäherung an gewisse Randkomponenten auf allen gegen diese strebenden Wegen vollständig unbestimmt (weiterhin mit v. u. abgekürzt) verhält, d. h. jeden dieser Wege auf eine in der komplexen Ebene überall dicht liegende Menge abbildet. Damit wird eine weitgehende Verallgemeinerung des Grossschen Beispiels einer meromorphen Funktion, die sich auf jedem gegen ∞ strebenden Weg v. u. verhält, gewonnen. Als Folgerung ergibt sich insbesondere die Existenz regulärer Funktionen in $|z| = R$, ∞ . Als Folgerung ergibt sich insbesondere die Existenz regulärer Funktionen in $|z| = R$, ∞ . Als Folgerung ergibt sich insbesondere die Existenz regulärer Funktionen in $|z| = R$, ∞ . Als Folgerung ergibt sich insbesondere die Existenz regulärer Funktionen in $|z| = R$, ∞ . Als Folgerung ergibt sich insbesondere die Existenz regulärer Funktionen in $|z| = R$, ∞ .

gegen einen festen Grenzwert strebt, v. u. verhalten. Auf ein ähnliches Beispiel von Valiron sowie auf verwandte Untersuchungen von Kierst und Szpilrajn wird hingewiesen. — Weiter werden einige von den Verf. an früherer Stelle [Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 1068—1075 (1953)] angegebene hinreichende Bedingungen für v. u. Verhalten einer in $|z| < 1$ meromorphen Funktion bei radialer Annäherung an jeden Punkt eines Randbogens mit Ausnahme einer Menge der 1. Baireschen Kategorie durch eine weitere ergänzt, die sich auf die Nullstellenverteilung bezieht. — Schließlich werden verschiedene hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß sich eine in $|z| < 1$ meromorphe Funktion bei Annäherung an einen festen Peripheriepunkt auf allen in diesem endenden Strecken bis auf eine Menge der 1. Kategorie v. u. verhält.

P. Seibert.

Lehto, Olli: On meromorphic functions whose values lie in a given domain. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **1953**, Nr. 160, 15 p. (1953).

Let G be an arbitrary domain in the w -plane whose boundary I is of positive capacity. Let $w = f(z)$ be a meromorphic function in the unit circle whose values lie in G and whose radial boundary values $w = f(e^{i\varphi})$ belong to I for almost all φ (obviously, $f(z)$ is of bounded characteristic). The author gives the following definitions: A value $a (\neq f(0))$ in G is called normal for $f(z)$ if $N(1, a) = g(a, f(0), G)$; exceptional if $N(1, a) < g(a, f(0), G)$, where

$$N(1, a) = \int_0^1 \frac{n(r, a)}{r} dr \text{ and } g(a, f(0), G) \text{ denotes the Green's function of } G \text{ with singularity at } w = f(0).$$

The purpose of this paper is to investigate the interrelation between exceptional values and those boundary values of $f(z)$ which lie in G , as a continuation of his research (this Zbl. **50**, 83). A counterexample shows that a boundary value lying in G is not necessarily exceptional (Frostman, this Zbl. **13**, 63—64). The author proves the following theorems:

(1) If a in G is exceptional for $f(z)$, then a is a boundary value of $f(z)$; consequently, it follows that if $f(z)$ omits a value a in G , then a is a boundary value. (2) Suppose that $f(z)$ takes a value lying in G only a finite number of times. Then a is exceptional, and hence a boundary value, except in the sole case that G is simply connected and $f(z)$ is of the form $f(z) = \zeta(R(z))$, where $R(z)$ is rational, $|R(z)| \leq 1$, $R(e^{i\varphi}) = 1$ for every φ , and $w = \zeta(z)$ is the univalent function which maps the unit circle onto G . (3) If a value a in G is a boundary value of $f(z)$, $f(e^{i\varphi}) = a$, and if a is normal, then $z = e^{i\varphi}$ is an accumulation point of the a -points of $f(z)$. These theorems are extensions of results of Seidel (this Zbl. **8**, 363—364) and Frostman [loc. cit.; Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. **12**, 169—182 (1934)] and closely related to those of Lohwater (this Zbl. **46**, 390) and the reviewer (this Zbl. **45**, 186).

K. Noshiro.

Gaier, Dieter: Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **58**, 456—458 (1953).

Nach F. Herzog und G. Piranian (dies. Zbl. **50**, 78) gibt es ein in $|z| < 1$ reguläres, beschränktes und schlichtes Funktionselement $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, das auf $|z| = 1$ überall konvergiert, aber auf keinem Teilbogen von $|z| = 1$ gleichmäßig. Dafür gibt Verf. nach einem von ihm bei einer ähnlichen Fragestellung mit Erfolg angewandten Verfahren (vgl. Verf., dies. Zbl. **50**, 78) einen neuen Beweis. Insbesondere werden Untersuchungen von Carathéodory über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung schlichter, einfach zusammenhängender Gebiete herangezogen.

W. Meyer-König.

Pir, Li En: Zur Theorie der schlichten Funktionen im Kreisring. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **92**, 475—477 (1953) [Russisch].

Im Kreisring vom Radienverhältnis $q < 1$ wird die Klasse N aller regulären und schlichten Funktionen $w = f(z)$ betrachtet; sie seien an einer gemeinsamen Innenstelle zu $f(z_0) = 1$ normiert; der innere Kreis gehe über in den inneren Rand des zweifach zusammenhängenden Bildgebiets. — Zuerst wird eine Integraldarstellung für den Fall herangezogen, daß $f(z)$ bis auf beide Randkreise hin stetig ist; sie geht auf Achieser zurück und benutzt in beiden Randintegralen den Kern

$$K_r(\zeta) = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 + q^{2\nu} \zeta}{1 - q^{2\nu} \zeta} - \frac{1 + q^{2\nu} \bar{\zeta}^{-1}}{1 - q^{2\nu} \bar{\zeta}^{-1}} \right\}$$

neben den Randwerten von $\operatorname{Re} f(z)$. Der Beweis wird auf eine neuere Methode von Goluzin zur Lösung von Funktionalgleichungen gestützt. — Dann wird, wieder im Anschluß an Goluzin (dort im Fall einfachen Zusammenhangs), die Hauptbeziehung Löwners übertragen und aus ihr für die Funktionen $f(z) \in N$ im Ring ein Seitenstück zum Verzerrungssatz in der Form $|f_0(-r)| \leq |f(z)| \leq |f_\pi(-r)|$ (für $|z| = r$) abgeleitet. Die Schranken sind genau;

Die Funktionen f_0 und f_π lassen sich ebensowohl kennzeichnen durch die ausgezeichneten Abbildungen, die sie für den Ring leisten (die Bildgebiete bestehen aus der w -Ebene mit zwei Schnitten längs der reellen Achse), wie auch explizit darstellen mittels quadratischer Ausdrücke über $P_q(\zeta) = \prod_{v=0}^{\infty} (1 - q^{2v} \zeta) (1 - q^{2v+2} \bar{\zeta}^{-1})$. E. Ullrich.

Pir, Li En: Über typisch reelle Funktionen im Kreisring. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **92**, 699—702 (1953) [Russisch].

Eine in einem Gebiet G reguläre Funktion $f(z)$ heißt dort bekanntlich „typisch reell“, wenn sie auf dem Durchschnitt von G mit der reellen Achse nur reelle Werte zeigt und im übrigen in G aus $\operatorname{Im} z > 0$ die analoge Ungleichung $\operatorname{Im} f(z) > 0$ folgt. Hier wird als Gebiet ein Kreisring R_q , $q = e^{i\theta}$, $|q| < 1$, zugrunde gelegt und die Klasse T_q der dort typisch reellen Funktionen durch folgende Nebenbedingungen eingeengt: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ in R_q regulär, stetig auf $|z| = q$, $a_1 = 1 + a_{-1}$; $|z| = q$ liefere rein reelle Werte $f(z)$. — Ausgehend von einer ersten Darstellung durch ein Integral mit dem Kern $K_q(z)$ (vgl. das vorstehende Referat), werden reguläre Funktionen in R_q , aber mit konstantem $\operatorname{Im} f(q e^{i\theta})$, gewinnt Verf. auf Grund der Einschränkung zu typisch reellen Funktionen eine zweite Integraldarstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_q(z, \cos \theta) d\alpha(\theta), \quad \text{mit Kern } S_q(z, \cos \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{2n} z}{1 - 2q^{2n} z \cos \theta + q^{4n} z^2};$$

Die Randbelegung $\alpha(\theta)$ ist eine reelle, nichtabnehmende und beschränkte Funktion auf $-\pi \leq \theta \leq \pi$ mit $\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) = \pi$. Diese Darstellung ist für die Funktionen der Klasse T_q kennzeichnend: Jedes $f \in T_q$ gestattet eine solche Darstellung, und jedes $\alpha(\theta)$ liefert ein $f \in T_q$. — Auch dem Beweis hierfür werden einige (genaue) Abschätzungssätze für $|f|$, $|f^{(n)}|$ und $\arg f(z)$ gegeben; die Schranken lassen sich durch $S_q(z, \cos \theta_0)$, $S_q^{(n)}(z, \cos \theta_0)$, bzw. spezieller für $z = r, \cos \theta_0 = 1$ ausdrücken. — Eine noch allgemeinere Integraldarstellung durch zwei Integrale, die derjenigen in vorst. ref. Note noch mehr entspricht, wird weiter führen. E. Ullrich.

Schaeffer, A. C.: An extremal boundary value problem. Ann. Math. Studies Nr. **30**, 41—47 (1953).

Ist E eine abgeschlossene Punktmenge auf $|z| = 1$ von positivem Maß, so gibt es eine maßgleiche perfekte Teilmenge E' und eine Funktion $w = f(z)$, $f(0) = 0$, welche $z \mapsto 1$ konform auf $|w| < 1$ mit radialen Einschnitten abbildet, wobei E' auf $|w| = 1$ und die Komplementärmenge auf die Einschnitte abgebildet wird. Dies gibt dem Verf. Anlaß zu folgendem Extremalenproblem: Zu E gehört die Klasse S_E der in $|z| < 1$ schlichten Funktionen $q(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ mit $\lim_{r \rightarrow 1} |q(r e^{i\theta})| = 1$ für fast alle $e^{i\theta} \in E$. Es ist $|a_1|$ zu minimalisieren. Es wird gezeigt, daß obige Funktion $f(z)$ die Extremale ist. A. Pfluger.

Goodman, A. W.: The rotation theorem for starlike univalent functions. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 278—286 (1953).

Let $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ be regular, univalent in $|z| < 1$ and starlike with respect to the origin and put $\Phi(\zeta) = 1/F(z)$ where $z = 1/\zeta$. Let S denote the class of functions $F(z)$. The author finds a sharp upper bound for $\arg F'(z)$ by a method simpler than that of Stroganoff (this Zbl. **9**, 173). Furthermore, the author improves known upper bounds for $\arg \Phi'(\zeta)$ and $\arg \Phi(\zeta) - \arg \zeta$ [Birnbaum, Studia math. **1**, 159—190 (1929)]; the bound obtained for the latter is sharp. Finally he states a result without detail, applying his method to the subclass of S , of functions which are k -wise symmetric with respect to the origin. K. Noshiro.

Jenkins, James A.: Some results related to extremal length. Ann. Math. Studies Nr. **30**, 87—94 (1953).

Die einzige reguläre Funktion $f(z)$ im Rechteck $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$, welche den Bedingungen: (1) $|\Im f(z)| \leq b$ auf den horizontalen Seiten, (2) $\Re f(z) \leq -a$ auf einer vertikalen Seite, $\Re f(z) \geq a$ auf der andern, genügt, ist $f(z) = z$. An Hand dieses und einiger weiterer Beispiele (Abbildungen zwei-

und mehrfach zusammenhängender Gebiete) wird gezeigt, daß sich die Methoden der Extremallänge auch auf nicht-schlichte analytische Abbildungen mit Erfolg anwenden läßt. Die hier zur Geltung kommende Schlußweise reicht über die behandelten Spezialfälle hinaus [vgl. hierzu auch Hersch und Pfluger, C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1205—1207 (1953)]. Wie am Schluß der Arbeit kurz angedeutet wird, liefert sie ebenfalls einfachere Beweise für bekannte Sätze der Funktionentheorie.

J. Hersch.

Nehari, Zeev: Dirichlet's principle and some inequalities in the theory of conformal mapping. Ann. Math. Studies Nr. **30**, 167—175 (1953).

Verf. untersucht eine Reihe funktionentheoretischer Ungleichungen im Zusammenhang mit dem Dirichletschen Integral. Hierzu wird eine reelle Funktion $S(z)$ eingeführt, eindeutig auf einer bestimmten Riemannschen Fläche R . Auf einer endlichen Punktmenge weist $S(z)$ vorgegebene Singularitäten auf. Die beiden Gebiete D und D^* ($D \subset D^*$) sind Teilgebiete von R , so daß $D^* - D$ keine singulären Stellen von $S(z)$ enthält und von C und C^* berandet wird. Die Funktion $p(z)$ verschwindet auf C und bewirkt, daß $h(z) = p(z) + S(z)$ harmonisch und eindeutig in D wird. ($p^*(z)$ und $h^*(z)$ sind die entsprechenden Funktionen für D^*). Dann gilt

$$\int_C h(z) \frac{\partial p(z)}{\partial n} ds \geq \int_{C^*} h^*(z) \frac{\partial p^*(z)}{\partial n} ds. \quad (I)$$

Mit dieser Beziehung leitet Verf. entsprechende Ungleichungen zu einer bekannten Hadamardschen Variationsformel her. Weitere Anwendungen beziehen sich auf die Bergmansche Kernfunktion, woraus sich interessante Vergleiche mit Bergman-Schifferschen Variationsformeln ergeben. Anschließend beweist Verf. eine analoge Ungleichung zu I für den Fall, daß D mehrfachen Zusammenhang aufweist. Die Arbeit schließt mit einigen Beweismethoden für gewisse Extremalprobleme mit Hilfe des Dirichlet-Integrals.

H. P. Künzi.

Popova, N. V.: Über die Integrale einer gewissen Differentialgleichung, die die Halbebene auf ein Gebiet abbilden, dessen Rand aus geradlinigen Strecken besteht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 727—728 (1953) [Russisch].

Unter den Lösungen der Differentialgleichung $f_t'(z, t) + P(z, t) f_z'(z, t) = 0$,

wobei $P(z, t) = \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu}{z - \lambda_\nu(t)}$ und die Funktionen $\lambda_\nu(t)$ reell und stetig differenzierbar sind, befinden sich Schwarz-Christoffelsche Integrale der Form

$$w = c(t) \int \prod_{\mu=1}^m (z - a_\mu(t))^{\alpha_\mu - 1} dz,$$

wobei die Funktionen $a_k(t)$, von denen n ($< m$) mit den obigen $\lambda_\nu(t)$ zusammenfallen, einem gewissen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen. — Es werden einige Angaben über den vermöge $w(z)$ aus der oberen z -Halbebene erhaltenen Polygonbereich in Abhängigkeit vom Parameter t gemacht; z. B. ändern sich mit t nur die den Polen von $P(z, t)$ entsprechenden Ecken.

P. Seibert.

Epheser, Helmut und Friedemann Stallmann: Konforme Abbildung eines Rechtecks mit Halbkreisgerbe. Z. angew. Math. Mech. **33**, 268—269 (1953).

Vortragsauszug. Das elliptische Integral 3. Gattung

$$y(x) = \text{const} \cdot \int_0^x \frac{\xi^2 - c}{\xi^2 - a} \frac{d\xi}{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}$$

mit reellen Parametern a, c, k , $0 \leq k \leq 1$, bildet das Gebiet $\text{Im}(x) > 0$, $|x| > \varrho$, $\varrho < 1$, falls \sqrt{a} und $\sqrt{c} < \varrho$ sind, auf ein mit einer Kerbe versehenes Rechteck ab. Durch passende Wahl der Parameter kann man, wie Verff. angeben, die Kerbe näherungsweise kreisförmig machen. Mit welcher Genauigkeit die Annäherung erfolgen kann, bleibt offen.

J. Heinhold.

Schiffer, Menahem: Variational methods in the theory of Riemann surfaces. Ann. Math. Studies Nr. **30**, 15—30 (1953).

In seinen neuen grundlegenden Methoden über Variationsprobleme in der Theorie der

Riemannschen Fläche (vgl. hierzu auch die früher erschienenen Arbeiten von Schiffer u. Spencer) geht Verf. aus von der Konstruktion bestimmter Funktionale (Greensche und Neumannsche Funktionen) auf berandeten Riemannschen Flächen. Einleitend wird auf den Zusammenhang zwischen offenen und geschlossenen Riemannschen Flächen hingewiesen mit Hilfe der Verdoppelungsmethode. Anschließend beschreibt Verf. das Variationsproblem für geschlossene Riemannsche Flächen. Durch eine Abbildung $z^*(z)$ werden Punkte auf einer Kreisperipherie $z = \varrho$ identifiziert. Mit R^* wird die Riemannsche Fläche bezeichnet, die durch die Identifizierungsvorschrift auf R entsteht. Sei $W(p, p_0, q, q_0)$ ein bestimmt konstruiertes Integral dritter Gattung auf R und W^* das entsprechende der Fläche R^* , so gilt:

$$\delta W = W^*(p, p_0, q, q_0) - W(p, p_0, q, q_0) = e^{2i\varphi} \varrho^2 W''(t, t_0, p, p_0) W'(t, t_0, q, q_0) + O(\varrho^2)$$

W' = Ableitung nach t . Da es möglich ist, alle gewünschten Funktionale der Fläche R durch Integrale dritter Gattung auszudrücken, so enthält die obige Beziehung eine umfassende Variationstheorie für die Fläche R . Durch bestimmte Variationen ist es möglich, den topologischen Typus einer Fläche zu ändern, was an Hand von charakteristischen Beispielen erläutert wird. Besondere Bedeutung haben die Variationen, die den konformen Typus zwischen R und R^* erhalten und weiter zur Behandlung der reziproken Differentiale führen, die früher von O. Teichmüller in ähnlichen Betrachtungen untersucht wurden. Dann betrachtet Verf. mit Hilfe seiner Methode bestimmte Einbettungsverfahren einer Riemannschen Fläche M in eine andere R . Dazu finden die quadratischen Differentiale Verwendung, die auch für die weiteren Beispiele der Extremalprobleme benützt werden. In einem Beispiel im Zusammenhang mit schlechten Abbildungen weist Verf. noch auf das folgende Problem hin: Das Gebiet N sei m -fach zusammenhängend in der z -Ebene, $w = t(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ seien die Funktionen, die sich schlicht und regulär in N verhalten. Jede Funktion $f(z)$ dieser Klasse, welche bestimmte Extremaleigenschaften bezüglich der n ersten Koeffizienten aufweist, bildet N auf ein Schlitzgebiet M der w -Ebene ab, dessen Begrenzungsschlitz einer Differentialgleichung $P_n(w) \cdot dw \cdot dt^2 + 1 = 0$ genügen. [$P_n(w)$ ist ein Polynom vom Grade $n+1$.] Zum Schluß weist Verf. noch auf die abstrakte Darstellung Riemannscher Flächen im dreidimensionalen Raum hin. — Es wäre von großem Interesse zu untersuchen, wie weit die obige Variationsmethode im Teichmüllerschen Problemkreis der extremalen quasikonformen Abbildungen und der quadratischen Differentiale zur Lösung der noch hängenden Probleme herangezogen werden könnte.

H. P. Künzi.

Sario, Leo: Construction of functions with prescribed properties on Riemann surfaces. Ann. Math. Studies Nr. 30, 63—76 (1953).

In seiner Zusammenfassung gibt Verf. Resultate aus seinen in den letzten drei Jahren publizierten Arbeiten wieder. Einleitend wird auf die historische Entwicklung der Riemannschen Fläche seit dem Erscheinen der Riemannschen Inauguraldissertation hingewiesen. Einen Markstein in dieser Entwicklung stellt das alternierende Verfahren von H. A. Schwarz dar. Diese Methode zur Konstruktion von Funktionen auf geschlossenen Flächen läßt sich nicht ohne weiteres auf allgemeinere Riemannsche Flächen übertragen. Verf. stellt sich im Anschluß an diese Betrachtungen das Problem: „Gegeben sei eine beliebige Riemannsche Fläche. Gesucht wird eine Funktion, welche zu einer bestimmten Klasse gehört, mit einer vorgeschriebenen Minimumeigenschaft“. Mit Hilfe einer eingeführten Operatorenmethode und eines Iterationsverfahrens wird dieses Problem gelöst. (Vgl. Sario, dies. Zbl. 46, 308.) Als Extremalproblem betrachtet Verf. in einer Klasse $\{P\}$ diejenige eindeutige Funktion

$$P_\lambda = p_\lambda + i \bar{p}_\lambda = \frac{1}{2} - \sum_1^\infty a_{\lambda\nu} z^\nu,$$

welche den Ausdruck $m_\lambda(p) = 2\pi \int_\beta \lambda s \cdot \bar{p} d\bar{p}$ minimalisiert. ($\lambda = Re(a_1)$; β = idealer Rand der Fläche R .) (Vgl. Sario, dies. Zbl. 48, 319.) Die eingeführte Extremalmethode kann dazu benützt werden, um den Begriff der Kapazität der Randmenge bei abstrakten Riemannschen Flächen R zu bestimmen. Hierzu betrachtet Verf. die Funktionsklasse $\{S\}$

mit der Entwicklung $S = s + i\bar{s} = \log z + \sum_1^\infty a_\nu z^\nu$ in $|z| \leq 1$ mit eindeutigen Realteilen s auf R . Die Kapazität c_β der Randmenge β einer offenen Fläche ist dann $c_\beta = e^{-k\beta}$ mit $k\beta = \min \frac{1}{2\pi} \int_\beta s \cdot ds$. Anschließend weist Verf. noch auf verschiedene Hebbarkriterien

hin, die eine Klassifikation von offenen Flächen erlauben. (Vgl. Sario, dies. Zbl. 48, 318.) Weitere Kriterien dieser Art stammen von Ahlfors, Beurling, Behnke u. Stein, Florack, Lehto, Lokki, Parreau, Royden und Virtanen. Am Schlusse der Arbeit befindet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis zum Problemkreis der offenen Riemannschen Flächen für die Zeit von 1948—1951.

H. P. Künzi.

Kuroda, Tadashi: A property of some open Riemann surfaces and its application. Nagoya math. J. 6, 77—84 (1953).

G bezeichnet ein nichtkompaktes Gebiet einer offenen Riemannschen Fläche mit der relativen Berandung C . \hat{G} entsteht aus G durch Symmetrisation, wodurch eine indirekt konforme Selbstabbildung von \hat{G} erzeugt wird. Das Bild des Punktes $p \in \hat{G}$ wird mit \bar{p} bezeichnet. Wenn jede harmonische Funktion in G , welche beschränkt ist (HB) oder beschränktes Dirichletintegral aufweist (HD) und zudem auf C verschwindet, dann gleich identisch verschwindet, so gehört G zur Klasse SO_{HB} bzw. SO_{HD} . NO_{HB} (NO_{HD}) bezeichne die Gebietsklasse für die Funktionen HB (HD) mit verschwindenden Normalableitungen auf C . Ist G nichtkompaktes Gebiet einer Riemannschen Fläche mit Nullrand, so beweist Verf. daß $G \in SO_{HB}$, $\in SO_{HD}$, $\in NO_{HB}$ und $\in NO_{HD}$. Für $G \in SO_{HB}$ (oder $\in SO_{HD}$) und $U(p) \in HB$ (HD) bezüglich \hat{G} gilt $U(p) = U(\bar{p})$ für jedes $p \in \hat{G}$. Im Zusammenhang mit weiteren entsprechenden Relationen folgt u. a. das von Myrberg herrührende Problem, daß $U(z) = U(\bar{z})$ gilt, wenn $U(z)$ eine Funktion der Klasse HB darstellt, definiert im Komplementärg Gebiet Ω zu einer beschränkten und abgeschlossenen Menge E der reellen Achse der z -Ebene. Weitere Anwendungen zur Klassifizierung von G folgen unter der Annahme, daß die obige Punktmenge E von verschwindender logarithmischer Kapazität sei. Es ergeben sich daraus Sätze, die in Verbindung mit bekannten Theoremen von Tsuji und Mori stehen. H. Künzi.

Sario, Leo: Alternating method on arbitrary Riemann surfaces. Pacific J. Math. 3, 631—645 (1953).

Mit Hilfe einer dem Schwarzschen alternierenden Verfahren nachgebildeten Methode beweist Verf. den folgenden allgemeinen Existenzsatz: Auf einer beliebigen Riemannschen Fläche R sollen endlich viele geschlossene analytische Kurven ein Gebiet R_0 (kompakt oder nicht) beranden und von diesem m Gebiete G_i mit dem Relativrand α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) abtrennen. Die auf $G_i \div \alpha_i$ harmonischen und nicht-konstanten Funktionen u_i sollen auf α_i verschwinden und dürfen sonst beliebig sein. Dann existiert immer auf R eine harmonische und nicht-konstante Funktion f , so daß $f - u_i$ in G_i beschränkt ist und ein endliches Dirichletintegral hat, falls R_0 nichtkompakt ist, und falls R_0 kompakt ist, dann und nur dann, wenn $\sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i} \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = 0$ ist. Als Anwendungen ergeben sich

die Existenzsätze für Abelsche Integrale erster, zweiter und dritter Gattung, Kriterien für die Existenz von HB - und HD -Funktionen u. a. m. In Zusammenhang mit Corollarium 2 (p. 644) sind R. Nevanlinna und K. J. Virtanen in irreführender Weise zitiert worden. A. Pfluger.

Rosenbloom, Paul C.: Semigroups of transformations of a Riemann surface into itself. Ann. Math. Studies Nr. 30, 31—39 (1953).

Verf. stellt das allgemeine Problem, die analytischen einparametrischen Scharen von Abbildungen einer Riemannschen Fläche S_1 in sich zu bestimmen, die in bezug auf Zusammensetzung eine Halbgruppe bilden und wo der Parameterpunkt auf einer Riemannschen Fläche S_2 variiert; er löst das Problem in dem Fall, daß S_1 und S_2 die komplexe z -Ebene sind. Dies kommt darauf hinaus, die sämtlichen Paare ganzer Funktionen f und g zu bestimmen, die der Gleichung $f(f(z_1, z_2), z_3) = f(z_1, g(z_2, z_3))$ genügen. Zur Erledigung dieser Aufgabe werden sämtliche ganzen Funktionen f, g und F bestimmt, die den Gleichungen $f(f(z_1, z_2), z_3) = f(z_1, f(z_2, z_3))$ bzw. $f(g(z)) = f(z \div A)$, $A = \text{const}$, bzw. $F(f(z_1, z_2), z_3) = F(f(z_1, f(z_2, z_3)))$ genügen. A. Pfluger.

Mori, Akira: An imbedding theorem on finite covering surfaces of the Riemann sphere. J. math. Soc. Japan. 5, 263—268 (1953).

I sei kompakter Teil einer Überlagerung der Zahlenkugel Σ . Bekannt ist, daß A in eine geschlossene Überlagerung D von Σ — im allgemeinen jedoch von höherem Geschlecht — eingebettet werden kann (vgl. H. Behnke und K. Stein, dies. Zbl. 38, 235). Verf. gibt eine neue Konstruktion, nach der D dasselbe Geschlecht wie A besitzt. Die Wichtigkeit hiervon demonstriert Verf.

durch den einfachen Beweis eines Satzes aus der Theorie der offenen Riemannschen Flächen.

W. Rothstein.

Belinskij, P. P.: Das Verhalten der quasikonformen Abbildung in einem isolierten Punkt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 709—710 (1953) [Russisch].

Verf. beweist folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Teichmüller-Wittich (dies. Zbl. 30, 356): $w = f(z)$ bilde den Bereich $0 < |z| < 1$ quasikonform auf einen beschränkten Bereich ab, wobei für den Dilatationsquotienten $p(z)$

$$\iint_{0 < |z| < 1} \frac{p(z) - 1}{|z|^2} d\sigma_z < \infty \quad (d\sigma_z: \text{Flächenelement})$$

gelten möge. Dann existiert $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = w_0$, es ist $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w - w_0}{z} \neq 0, \infty$ und $f(z)$ ist bei $z = 0$ regulär. Der Beweis schließt sich an die Untersuchungen von Lavrent'eff (dies. Zbl. 14, 319) an.

P. Seibert.

Kudrjavec, L. D.: Über harmonische Abbildungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 469—471 (1953) [Russisch].

Verf. verallgemeinert das Dirichletsche Problem für bestimmte Klassen quasikonformer Abbildungen: Sei $f(\theta) = u(\theta) + i v(\theta)$ die eindeutige Abbildung der Kreisperipherie γ auf eine einfach geschlossene Linie, die das endliche Gebiet G berande, wobei $f'(\theta)$ eine Ableitung besitzt, die einer Hölderschen Bedingung genügt. Ferner sei $F(z) = u(z) + i v(z)$; dann ist für die Existenz der Abbildung von K auf \bar{G} , die eindeutig und harmonisch in K und stetig in \bar{K} ist, mit der vorgegebenen Randabbildung, und für die $\min_{\bar{K}} |\partial(u, v)/\partial(x, y)| > 0$, notwendig und hinreichend, daß $(d\bar{u}(\theta)/d\theta) dv(\theta)/d\theta - (du(\theta)/d\theta) d\bar{v}(\theta)/d\theta \neq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Für derartige Abbildungen werden für bestimmte Gebiete Eigenschaften hergeleitet, die denen analytischer Funktionen entsprechen, wie z. B. das Prinzip vom Maximum und Minimum und das Prinzip der Erhaltung des Gebietes, sowie gewisse Eindeigkeitskriterien.

H. Künzi.

Tajmanov, A. D.: Über eine Aufgabe von N. N. Luzin. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 169—171 (1953) [Russisch].

Es handelt sich um Aussagen über den Wertvorrat des Differenzenquotienten $[f(z+h) - f(z)]/h$ bei eindeutigen und stetigen $f(z)$ in einem Gebiet D der z -Ebene: Sei $\varepsilon > 0$, dann M_ε die Menge aller Werte des Differenzenquotienten für alle $z+h \in D$, $0 < h, \leq \varepsilon$; endlich sei M_ε der Durchschnitt aller M_ε für (kleine) $\varepsilon \rightarrow 0$ [„Monogenitätsmenge“]. Auf Luzin und Fedorov gehen die Fragen zurück: Wie ist M_ε beschaffen, wenn $f(z)$ allgemein, als eindeutig und stetig in D angenommen wird? Und besonders: 1) Kann M_ε ein Stück der Ebene enthalten? 2) Kann M_ε eine Cantorsche Kurve sein, die nicht schon Jordanbogen ist? 3) Kann M_ε positives ebenes Maß haben? 4) Von welcher Art ist die Menge aller Punkte z derart, daß M_ε kein einfacher Bogen ist? Es wird ein Beispiel aufgebaut, das einige dieser Fragen positiv beantwortet.

E. Ullrich.

Fréchet, Maurice: Bestimmung der allgemeinsten ebenen paraanalytischen Funktionen. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 255—268 und französ. Zusammenfassg. 255 (1953) [Esperanto].

Soient e, V deux vecteurs dans deux plans fixes, distincts ou non. On peut les représenter par les notations $v = x e_1 + y e_2$, $V = X e'_1 + Y e'_2$, et assujettir les vecteurs unitaires e_k, e'_k à la règle R de multiplication définie par $e'_k e_l = \sum_{h=1,2} u_{k,l,h} e_h$. Nous dirons que V est une fonction „para-analytique“ de v (à gauche et au sens large) relativement à la règle R pour $v = v_0$, si X et Y sont définis et différentiables pour $v = v_0$ et son voisinage, et si V a une dérivée par rapport à v pour $v = v_0$ et son voisinage, c'est à dire si dV/dv est indépendant de dv , ou plutôt s'il existe un vecteur $L e'_1 + M e'_2$ indépendant de dx et de dy , tel que $dX e'_1 + dY e'_2 = (L e'_1 + M e'_2) (dx e_1 + dy e_2)$ au sens de la règle R , pour $v = v_0$ et son voisinage. L'objet principale de ce premier Mémoire est de montrer que toute fonction paraanalytique peut être réduite par des transformations linéaires et biunivoques sur V et sur v à l'une ou l'autre des cinq formes canoniques réunies dans un tableau. Dans un deuxième mémoire nous montrerons que trois de ces formes (dont l'une est celle des fonctions analytiques classiques) ont des propriétés analogues. Dans un troisième mémoire nous généraliserons au cas de n dimensions.

Autoreferat.

Šmul'jan, Ju. L.: Über holomorphe beschränkte Matrixfunktionen mit identischer verschwindender Determinante. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 625—627 (1953) [Russisch].

Für die ξ im Bereiche G sei definiert die holomorphe Matrixfunktion $w(\xi)$, wobei $w(\xi)$ als Operator mit der Norm $\|w(\xi)\| \leq 1$ den euklidischen oder Hilbertschen Raum H auf einen endlichdimensionalen Unterraum L_ξ abbildet. Es bedeuten φ und ψ Vektoren von H mit dem inneren Produkt (φ, ψ) ; eine Vektorfunktion $\varphi(\xi)$ heißt antiholomorph in G , wenn für jedes feste φ die Funktion $(\varphi, \varphi(\xi))$ holomorph ist. Es gilt dann Satz 1: $\sup \dim(L_\xi) = r < \infty$; die ξ -Menge F mit $\dim(L_\xi) < r$ besitzt keine Häufungspunkte in G ; $w(\xi)$ gestattet die Darstellung

$$w(\xi) \varphi = \sum_{i=1}^r (\varphi, \varphi_i(\xi)) \psi_i(\xi) \text{ mit holomorphen } \psi_i(\xi), \text{ antiholomorphen } \varphi_i(\xi),$$

wobei die $\varphi_i(\xi)$ für jedes ξ aus G und die $\psi_i(\xi)$ für jedes ξ aus $G - F$ linear unabhängig sind. r heißt der Funktionalrang. — Ist G das Innere des Einheitskreises, so gilt Satz 2: Es ist $w(\xi)$ in der Gestalt $w_2(\xi) w_1(\xi)$ mit holomorphen $w_k(\xi)$ bei $\|w_k(\xi)\| \leq 1$ so schreibbar, daß $w_1(\xi)$ den Raum H auf einen ξ -unabhängigen r -dimensionalen Unterraum H_r abbildet. Sind speziell die $w(\xi)$ Matrizen der Ordnung m mit $\det w(\xi) \equiv 0$, also $r < m$, so sind die $w_k(\xi)$ Rechteckmatrizen (m, r) und (r, m) .

H. Richter.

Aruffo, Giulio: Forme differenziali esterne di classe 0 e funzioni di più variabili complesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 381—385 (1953).

Extensions des théorèmes de Cauchy et de Morera aux fonctions de plusieurs variables complexes. Soit B_{p+q} ($1 \leq p + q \leq 2n - 1$) un cycle à $p + q$ dimensions de R^{2n} ($x_r, y_r; z_r = x_r + i y_r, \bar{z}_r = x_r - i y_r; r = 1, 2, \dots, n$). Si $f(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ est continue et si $\int_{B_{p+q}} f dz_{z_1} \dots dz_{z_p} d\bar{z}_{z_1} \dots d\bar{z}_{z_q} = 0$ pour tout B_{p+q} et pour les deux combinaisons fixes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et β_1, \dots, β_q ($\alpha_i \neq \alpha_k, \beta_i \neq \beta_k$ pour $i \neq k$) des indices $1, 2, \dots, n$, la fonction f est analytique dans les variables z_β pour $\beta \neq \beta_1, \dots, \beta_q$ et anti-analytique dans les variables z_α pour $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p$ et inversement.

Th. Lepage.

Behnke, H.: Généralisation du théorème de Runge pour des fonctions multiformes de variables complexes. Centre Belge Rech. math., Colloque fonctions plusieurs variables, Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, 81—96 (1953).

Exposé synthétique des résultats connus sur le problème suivant: étant donné deux domaines (ensembles ouverts connexes) G et G' à n dimensions complexes, $G \subset G'$, toute fonction holomorphe sur G peut-elle être approchée, uniformément sur tout compact de G , par des fonctions holomorphes sur G' , holomorphe impliquant uniforme? Pour $n = 1$, Behnke-Stein (ce Zbl. 38, 235) ont montré que le problème admet une même condition nécessaire et suffisante de possibilité (de caractère topologique), que G et G' soient dans le plan complexe sans point à l'infini ou sur une surface de Riemann non fermée. Pour n quelconque, ils ont étudié (ce Zbl. 20, 36; 38, 54) le cas où G et G' sont deux domaines d'holomorphie ayant un nombre fini de feuilletés et sans point de ramification; ces restrictions sont abandonnées dans la Thèse de H. Will (Münster 1952).

M. Hervé.

Stein, Karl: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. Centre Belge Rech. math., Colloque fonctions plusieurs variables, Bruxelles du 11 au 14 mars 1953, 97—107 (1953).

Es sei f eine auf einer komplexen Mannigfaltigkeit nicht konstante meromorphe Funktion, die auf M^{2n} keine Unbestimmtheitsstelle besitzt. Durch $w = f(P)$ ($P \in M^{2n}$) wird eine Abbildung von M^{2n} in die Ebene E_w^2 der komplexen Veränderlichen w gegeben. Der Verf. zeigt, daß zu einer solchen Abbildung stets eine Riemannsche Fläche $R^2 = R^2(M^2; f)$ über E_w^2 und eine Abbildung Φ so erklärt werden kann, daß $f = W \Phi$, wobei W die kanonische Abbildung von R^2 in E_w^2 . Diese Abbildung ist im Falle $n = 1$ eindeutig, im Falle $n > 1$ trifft dies nicht mehr zu. Zur Bestimmung dieser Abbildung sucht der Verf. in M^{2n} gewisse Punkte, in denen f den gleichen Funktionswert annimmt. In der Menge dieser Klasse wird eine Topologie eingeführt und jeder Klasse der gemeinsame Funktionswert zugeordnet.

Ein Teil dieser Resultate ist schon in der Diss. von K. Koch „Die analytische Projektion“ (Münster 1948) enthalten. Nach Bestimmung einer solchen analytischen Projektion gibt der Verf. einige wichtige Eigenschaften, z. B. $R^2(M^{2n}, f)$ ist einfach zusammenhängend, wenn f für M^{2n} zutrifft. W. Sauer.

Hove, Léon van: L'ensemble des fonctions analytiques sur un compact en tant qu'algèbre topologique. Bull. Soc. math. Belgique 1952, 8—17 (1953).

K sei ein polyedraler kompakter Bereich im n -dimensionalen komplexen Raum. A_K sei die Algebra der auf K analytischen Funktionen von n Veränderlichen. Aus den Untersuchungen von H. Cartan (dies. Zbl. 38, 237) folgt, daß jedes maximale Ideal in A_K aus allen Funktionen von A_K besteht, die auf einem $z_0 \in K$ verschwinden. Verf. beweist, daß jeder lineare Ringautomorphismus von A_K die Form $f(z) \mapsto f(\gamma z)$ hat, γ eine umkehrbar eindeutige, in beiden Richtungen analytische Abbildung von K auf sich. Ferner gilt, daß jede lineare Abbildung T von A_K in sich, für die (*) $T(f_1 \cdot f_2) = f_1 T f_2 + f_2 T f_1$ für alle $f_1, f_2 \in A_K$ gilt, ein Differentialoperator der Form $g_1 \partial/\partial z_1 + \dots + g_l \partial/\partial z_l$, $g_i \in A_K$, ist. Wird auf A_K die natürliche Topologie t_K des induktiven Limes gewisser (B) -Räume eingeführt, so besagen diese Ergebnisse insbesondere, daß jeder lineare Automorphismus bzw. jede lineare (*) erfüllende Abbildung stetig bezüglich A_K ist. G. Köthe.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Rosen, S.: Modular transformation of certain series. Duke math. J. 20, 593—599 (1953).

Die Rademachersche Methode (dies. Zbl. 20, 220), aus der expliziten Gestalt der Fourierentwicklung spezieller Modulfunktionen die Invarianz dieser Funktionen gegenüber den Modulsstitutionen unmittelbar zu bestimmen, wird hier auf die Funktion $\eta(2\tau)/\eta(\tau)$, die bekanntlich gegenüber den Substitutionen der Gruppe $\Gamma_1(2)$ invariant ist, angewendet. Zugrunde gelegt wird eine von Hua (dies. Zbl. 28, 10) gefundene Fourierentwicklung. H. Maaß.

Pfotzer, Werner: Die Wirkung der Modulsstitutionen auf mehrfache Theta-Reihen zu quadratischen Formen ungerader Variablenzahl. Arch. der Math. 4, 448—454 (1953).

Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^n$ eine positive ganze gerade Matrix, $D = |\mathfrak{A}|$, K der größte gemeinsame Teiler aller $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminanten von \mathfrak{A} , $D = KN$, n eine ganze Spalte, die der Kongruenz $\mathfrak{A}h \equiv 0(N)$ genügt, und $P_k(n)$ eine Kugelfunktion bezüglich \mathfrak{A} vom Grad k . Es wird dann gezeigt, daß die Thetareihen

$$\vartheta(\tau; h, \mathfrak{A}, P_k) = \sum_{n \equiv h(N)} P_k(n) \exp\left(\pi i \tau \frac{n' \mathfrak{A} n}{N^2}\right),$$

die sich bei beliebigen Modulsstitutionen linear in sich transformieren, ganze Modulformen der Dimension $-(n/2 + k)$ zur Stufe $2N$ und zum Multiplikatorsystem $v\left(\frac{a \ b}{c \ d}\right) = 1$ bzw. $v\left(\frac{c \ d}{d \ d}\right) = (-1)^{-cnd-1, 2, \dots, -cnd-1, 2}$ darstellen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Im Falle $k \geq 0$ handelt es sich stets um Spitzenformen. Durch Bildung von Linearkombinationen gewinnt man in einfacher Weise Spitzenformen zu den bekannten Gruppen $\Gamma_1(2)$, Γ_0 . Da der Fall gerader n bereits von Schöneberg (dies. Zbl. 20, 202) behandelt worden ist, interessiert hier vorzugsweise der Fall ungerader n . Eine Unterscheidung der beiden Fälle ist aber nur dort erforderlich, wo es sich um die Berechnung Gaußscher Summen handelt. H. Maaß.

Petersson, Hans: Über einen einfachen Typus von Untergruppen der Modulgruppe. Arch. der Math. 4, 308—315 (1953).

It is generally believed that a subgroup Γ' of finite index $\mu = [\Gamma : \Gamma']$ of the modular group Γ is completely determined by μ and its fundamental region F . The main object of

this paper is to show that this is not the case; there exist several non isomorphic subgroups of finite index all having the same fundamental region F . Such subgroups exist also in the case when the genus p of F is 0. All these subgroups are of a special type which the author calls cycloidal subgroups. Z is cycloidal if its fundamental region F has only one cusp at infinity.

It is proved that a cycloidal subgroup Z is characterized by $\Gamma = \sum_{h \bmod \mu} Z U^h$ where $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A detailed study of cycloidal subgroups was given by Miss W. Rhode. The simplest of these groups are $Z_{2,0} = \Gamma(2)[I + TU + UT]$ and $Z_{3,0} = \Gamma(3)[I + T + UTU^2 + TUTU^2]$, where $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$ denote the principal congruence subgroups mod 2 and mod 3 and

$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. These can also be characterized by the congruence conditions

$ab + bc + cd \equiv 0 \pmod{2}$ and $ab + cd \equiv 0 \pmod{3}$, respectively. Starting from $Z_{2,0}$ and $Z_{3,0}$ one can construct two sequences of cycloidal subgroups; $Z_{2,h}$ ($h = 0, 1, \dots$) with $\mu = 2 \cdot 3^h$, $e_2 = 0$ (e_i denotes the number of elliptical fixed points of order i), $p = 0$ and the sequence $Z_{3,h}$ ($h = 0, 1, \dots$) with $\mu = 3 \cdot 2^h$, $e_3 = 0$, $p = 0$. In particular one obtains $Z_{2,3}$ with $\mu = 6$, $e_2 = 0$, $e_3 = 3$, $p = 0$ and $Z_{3,2}$ with $\mu = 6$, $e_2 = 4$, $e_3 = 0$, $p = 0$. A third cycloidal subgroup of index 6 is $N_6 = Z_{2,3} \cap Z_{3,2}$ which can be characterized by $ab + 3bc + cd \equiv 0 \pmod{6}$. (Here $e_2 = e_3 = 0$ and $p = 1$.) In general it is true that if Z_μ and $Z_{\mu'}$ are cycloidal and if $(\mu, \mu') = 1$ then $Z_\mu \cap Z_{\mu'}$ is also a cycloidal subgroup of index $\mu\mu'$. Starting from cycloidal subgroups of indices $\mu = 4, 5$ and genus 0 discovered also by Miss W. Rhode one can construct other infinite sequences of cycloidal subgroups; for instance the author exhibits among others $Z_{4,h}$ with $\mu = 12 \cdot 2^h$, $e_3 = 0$, $p = 0$ and $Z_{5,h}$ with $\mu = 10 \cdot 3^h$, $e_2 = 0$, $p = 0$.
I. S. Gál.

Kovaňko, A. S.: Über die Kompaktheit von Systemen verallgemeinerter Weylscher fastperiodischer Funktionen. Ukrain. mat. Žurn. 5, 185—195 (1953) [Russisch].

Es wird für zwei in jedem endlichen Intervall mit ω -ter Potenz ($\omega \geq 1$) integrierbare Funktionen $D_{\omega}^T(f, g) = \sup_{-\infty < a < \infty} \left\{ T \int_a^{a+T} |f - g|^{\omega} dx \right\}^{1/\omega}$ gesetzt. Eine Folge von Funktionen $f_n(x)$

($-\infty < x < \infty$) heißt D_{ω} -gleichmäßig konvergent, wenn eine Funktion $f(x)$ existiert, für welche bei jedem $\varepsilon > 0$ und hinreichend großem T die Ungleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\omega}^T(f, f_n) < \varepsilon$ besteht. Kraft eines früheren Satzes vom Verf. ist dazu notwendig und hinreichend, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ und $T \geq T_0(\varepsilon)$ die Ungleichung $\lim_{m, n \rightarrow \infty} D_{\omega}^T(f_n, f_m) < \varepsilon$ gelte. Es werden Bedingungen

dafür aufgestellt, daß eine Familie \mathfrak{M} von Funktionen kompakt im Sinne der D_{ω} -gleichmäßigen Konvergenz sei. Dazu genügt es (Satz A), daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches System $q_1(x), \dots, q_n(x)$ von (vielleicht nicht zu \mathfrak{M} gehörenden) Funktionen existiere, in welchem zu jeder Funktion ein q_i mit $D_{\omega}^T(f, q_i) < \varepsilon$ bei $T \geq T_0(\varepsilon)$ zu finden ist. Das wichtigste Ergebnis betrifft aber Familien von ω -fastperiodischen, d. h. nach Weyl fastperiodischen Funktionen. Ist \mathfrak{M} eine solche Familie, so sind für ihre Kompaktheit folgende Bedingungen

hinreichend (Satz B): 1) für jedes $\varepsilon_1 > 0$ und jedes $f \in \mathfrak{M}$ ist $\sup_{-\infty < a < \infty} \left\{ T \int_a^{a+T} |f|^{\omega} dx \right\}^{1/\omega} < \varepsilon_1$, wenn $T \geq T_1(\varepsilon_1)$ und wenn $\sup_{-\infty < a < \infty} \frac{1}{T} |E(a, a+T)| < \sigma(\varepsilon_1)$, 2) für jedes $\varepsilon_2 > 0$ und jedes $f \in \mathfrak{M}$ ist

$D_{\omega}^T(f(x+h), f(x)) < \varepsilon_2$, wenn $|h| \leq \eta(\varepsilon_2)$ und $T \geq T_2(\varepsilon_2)$, 3) für jedes $\varepsilon_3 > 0$ existiert eine relativ dichte Menge von Zahlen τ , welche die Ungleichung $D_{\omega}^T(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon_3$ für jedes $f \in \mathfrak{M}$ befriedigen, wenn $T \geq T_3(\varepsilon_3)$. Im Beweise wird eine geeignete Familie von Bohrschen Funktionen konstruiert, deren Kompaktheit aus bekannten Sätzen folgt und aus der man dank der Kompaktheit für ein gegebenes ε ein endliches, der Voraussetzung von Satz A genügendes System q_1, \dots, q_n herausgreifen kann. Verf. folgert aus Satz B, daß, wenn f ω -fast periodisch ist, das System der verschobenen Funktionen $f(x+t)$ kompakt ist im Sinne der D_{ω} -gleichmäßigen Konvergenz, und er stellt dieses Resultat mit seinem früheren umgekehrten Satz zusammen, was ihm erlaubt, die ω -fp. Funktionen als solche Funktionen zu charakterisieren, für welche die Menge $\{f(x+t)\}$ in obigem Sinne kompakt ist. Endlich wird auf Grund von Satz B bewiesen, daß für jede ω -fp. Funktion f eine Folge trigonometrischer Polynome existiert, die D_{ω} -gleichmäßig (und nicht nur nach dem Weylschen Entfernungsbegriff) gegen f konvergiert. Es sei bemerkt, daß Verf. nicht die übliche, sondern eine formell schwächere Definition von ω -fp. Funktionen annimmt, er verlangt nämlich, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Zahlen τ existiere, welche der Ungleichung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < a < \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x+\tau) - f(x)|^\omega dx \right\}^{1/\omega} < \varepsilon$$

genügen. Es wird ohne Beweis und Zitat behauptet, daß für eine solche Funktion bei jedem $\varepsilon > 0$ auch Zahlen τ mit $D_{\omega}^T(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon$ ($T > T_0$, T_0 nur von ε abhängig) relativ dicht liegen. Das ist ohne Einfluß auf Satz B, da seine Voraussetzung sowieso mehr fordert, scheint aber bei der Formulierung weiterer Sätze nicht belanglos. *St. Hartman.*

Doss, Raouf: Groupes compacts et fonctions presque périodiques généralisées. *Bull. Sci. math.*, II. Sér. **77**, 186—194 (1953).

The author gives a new structural characterization of the Besicovitch almost periodic (B-a. p.) functions. A complex-valued function $f(x)$ of a real variable is a B-a. p. function if and only if: 1° The set of translates is conditionally compact with respect to the norm $\|f\| = M\{\|f\|\}$. 2° To every real a there exists an integrable function $f^{(a)}(x)$ with period a such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{M} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+ka) - f^{(a)}(x) \right\} = 0.$$

In order to prove that such a function $f(x)$ can be B-approximated by a. p. functions (and hence by trigonometric polynomials) the corresponding approximation of the integrable functions on the Bohr compactified line by continuous functions is used, together with other theorems from the Lebesgue theory. A longer, but more elementary proof has been given by the author [*Ann. of Math.*, II. Ser. **59**, 477—489 (1954)] where also the B^p -a. p. functions for $p \geq 1$ are characterized in an analogous manner. Besides the original structural characterization by Besicovitch and Bohr (this Zbl. **3**, 157) which was simplified by Besicovitch (this Zbl. **4**, 109; **9**, 163) another characterization was given by the reviewer [*Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd.* **21**, no. 11 (1945)]. *E. Følner.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Urabe, Minoru: Iteration of certain finite transformation. I, II. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A **16**, 471—486, **17**, 43—65 (1953).

I. Soit $T: x^\nu = \varphi^\nu(x) = x^\nu + \delta^\nu x^{\nu-1} + a_{\lambda\mu}^\nu x^\lambda x^\mu + \dots$ ($\delta^\nu = 0$ ou 1) une transformation donnée. L'A. cherche les conditions pour l'existence d'un domaine tel que tous les itérés de ses points restent dans lui-même. Les conditions trouvées dépendent seulement de $a_{\lambda\mu}^\nu$ qui sont supposés non nuls. — II. L'A. traite le même problème que celui du premier mémoire, en supposant cette fois les coefficients $a_{\lambda\mu}^\nu$ tous nuls. Enfin il applique ses résultats à l'étude d'un point singulier d'un système d'équations différentielles ordinaires dans le cas où les valeurs caractéristiques sont situées sur une droite passant par l'origine. *M. Hukuhara.*

Kimura, Toshifusa: Sur une généralisation d'un théorème de Malmquist. *Commentarii math. Univ. Sancti Pauli* **2**, 23—28 (1953).

Es handelt sich um Differentialgleichungen der Form $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, wo P und Q Polynome in x und y sind. Malmquist [*Acta Math.* **36**, 297—343 (1913)] hatte bewiesen: Wenn der Nullpunkt ein wesentlich singulärer Punkt eines Integrals der Differentialgleichung ist, und wenn dieses Integral in der Umgebung des Nullpunktes nur endlich-vieldeutig ist und wenn in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes keine weiteren kritischen Punkte liegen, so haben wir eine Riccatische Differentialgleichung vor uns. Verf. zeigt: Jedes Integral einer Differentialgleichung der betrachteten Art nimmt in der Umgebung jedes seiner wesentlich singulären Punkte fast alle Werte an. *O.-H. Keller.*

Smith, R. A.: On the singularities in the complex plane of the solutions of $y'' + y'f(y) + g(y) = P(x)$. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **3**, 498—512 (1953).

Unter Verwendung von Methoden, die auf Malmquist [*Ark. Mat. Astr. Fys.* **15**, Nr. 3 u. 27 (1921)] und Painlevé (*Leçons sur la Théorie des Équations Différentielles*, Paris 1897) zurückgehen, beweist Verf. folgende Sätze: Sind f bzw. g Polynome vom Grad n bzw. m in y ($n > m$) und ist P eine reguläre Funktion von x in einem Bereich, der die Stelle x^* enthält, dann gilt: 1) Es existiert eine unendliche Schar von Lösungen der Differentialgleichung (*) $y'' + f(y)y' + g(y) = P(x)$, die in x^* eine algebraische Singularität besitzt. In der Umgebung

von x^* sind die Lösungen in der Form $y(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(x - x^*)^{r/n}$ mit $a_{-1} \neq 0$ darstellbar.

2) Ist x^* Endpunkt einer stückweise analytischen Kurve γ von endlicher Länge und ist $y(x)$ eine Lösung von (*), die sich analytisch längs γ bis x^* , aber nicht darüber hinaus, fortsetzen läßt, so hat y in x^* eine Singularität wie in 1). 3) Hat $P(x)$ nur isolierte Singularitäten, dann besitzt keine Lösung von (*) eine natürliche Grenze. 4) Ist x^* Endpunkt einer stetigen Kurve γ , ist ferner $y(x)$ analytisch längs γ bis x^* , aber nicht weiter, fortsetzbar und hat die Singularität nicht die Gestalt aus 1), so ist x^* Häufungspunkt solcher algebraischer Singularitäten. Daß dieser Fall tatsächlich eintreten kann, wird an einem Beispiel gezeigt.

H. Bilharz — R. Schwarzenberger.

● Bohnenblust, H. F., T. M. Apostol, A. Erdely, L. D. Berkovitz, M. Kennedy, J. L. McGregor: Asymptotic solutions of differential equations with turning points. Review of the literature. (Technical Report 1.) Pasadena: California Institute of Technology, Department of Mathematics 1953. 16 p.

Asymptotic solutions of ordinary linear differential equations show peculiarities in the neighborhood of certain exceptional points, called transition or turning points. In the case of a real independent variable, the typical behavior is a change from oscillatory to monotonic solutions as the independent variable passes through a turning point. The classical theory of asymptotic solutions breaks down in the neighborhood of such a point, and special investigations are required. In the present report, papers dealing with this situation are listed alphabetically, together with a brief description of their contribution to the subject of this survey. Basically, only mathematical papers have been listed. The early papers on the W. K. B. method have been included for historical reasons. Certain papers on physical problems were included because they contributed to the mathematical theory. Papers on special functions were included if their results were derived from the differential equation. There is a large number of papers in which the behavior of special functions in the neighborhood of a transition points is investigated by means of methods which are not based on the differential equation. Such papers have been excluded from the present survey. Most of the papers listed here deal with differential equations of the second order. Aus der Einleitung.

Latyševa, K. Ja.: Normale Lösungen linearer Differentialgleichungen mit Polynomen als Koeffizienten. (Autoreferat einer Dissertation.) Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 205—212 (1953) [Russisch].

Die Gleichung $\sum_{i=0}^n P_i(x) y^{(n-i)}(x) = 0$ habe die Stelle $x = \infty$ als wesentliche Singularität. Verf. knüpft an die Theorie der sog. „normalen“ Lösungen $y = e^{Q(x)} x^{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{-i}$ an, in denen $Q(x)$ ein durch die Gleichung bestimmtes Polynom und β eine Wurzel der charakteristischen Gleichung einer Hilfsdifferentialgleichung ist, die aus der ursprünglichen durch die Transformation $y = e^{Q(x)} u$ hervorgeht. Nach kurzer geschichtlicher Einleitung werden ohne Beweise sechs längere Sätze mitgeteilt, die über die folgenden Probleme etwas aussagen: 1) Auftreten „subnormaler“ Lösungen, deren Reihenbestandteil nach gebrochenen Potenzen $x^{-i,s}$ fortschreitet ($s \geq 2$ ganz). 2) Gestalt der Lösungen bei mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung sowie beim Verschwinden gewisser Koeffizienten der Hilfsdifferentialgleichung. 3) notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß der Reihenbestandteil der normalen Lösung eine rationale Funktion ist.

W. Hahn.

Karanicoloff, Christo: Sur une équation différentielle d'ordre n . Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 237—241 und russische Zusammenfassg. 242 (1953).

L'A. considera l'equazione $w^{(n)}(z) = f(z, z^p) w$, dove p è una costante positiva ed $f(z, u)$ una funzione analitica nell'insieme $|z| \leq R, |u| \leq R^p$, e cerca di soddisfarla mediante una serie della forma $\sum_{r=0}^{\infty} c_r(z) z^{pr}$, determina un insieme nel quale questa serie converge ed accenna alla possibilità di estendere questi risultati ad un'equazione del tipo $w^{(n)}(z) + \sum_{r=1}^n f_r(z, z^p) w^{(n-r)}(z) = 0$.

G. Scorza Dragoni.

Demidovič, B. P.: Über einen Fall der Fastperiodizität der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 6 (58), 103—106 (1953) [Russisch].

Consider the equation of first order $\dot{x} = f(x) + g(t)$ where f is monotonic and has a continuous derivative and g is almost periodic with a bounded integral; then every bounded solution is almost periodic. *J. L. Massera.*

Castro, A. De: Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 8, 26—29 (1953).

Consider the equation $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$ where f, g are continuous and satisfy Lipschitz condition in any bounded region, and assume $f(0, 0) < 0$, $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$, $|g(x)| + f(x, v)|v| > \varepsilon > 0$ for $|x| > x_0$. The author states that a limit cycle exists if at least one of the following complementary conditions is also satisfied: a) $f(x, v) + f(x, -v) \geq 0$ for $|x| + |v| \geq R > 0$; b) there are two numbers a, b , $0 < a < b$ such that $f(x, v) + f(x, -v) \geq 0$ for $|x| \geq a$ and $\int_{-a}^b f(x, v) dx \geq x > 0$ for any function $v(x)$, $v(x) > N$, N being a certain arbitrarily large number. In the opinion of the reviewer, the proofs are invalidated because certain so called „evident“ assertions are by no means so. Actually the theorem corresponding to assumption a) is false as may be shown by examples. On the contrary, the theorem based on assumption b) is true (if one replaces in this assumption $v(x) > N$ by $|v(x)| > N$, $v(x)$ continuous, which was apparently the intention of the author); however certain non-trivial additions to the proof are necessary in order to make it rigorous. *J. L. Massera.*

Hayashi, Chihiro: Stability investigation of the nonlinear periodic oscillations. *J. appl. Phys.* 24, 344—348 (1953).

Zur Prüfung der Stabilität der erzwungenen periodischen Lösung $x = \Phi(t)$ einer Schwingungsgleichung (1) $\ddot{x} + \dot{x}f(x) + q(x) = E(t)$ mit periodischem $E(t)$ wird die lineare Variationsgleichung für kleine $y = x - \Phi(t)$ aufgestellt. Nach Einsetzen von $\Phi(t)$ ergibt sich eine Hillsche Gleichung: (2) $\ddot{y} + \dot{y}F(t) + yG(t) = 0$, mit periodischem $F(t), G(t)$. Durch $y = z \exp[-\frac{1}{2} \int F(t) dt]$ nimmt sie die reduzierte Form (3) $\ddot{z} + zH(t) = 0$ an, und Verf. beschreibt nun das Verfahren von Whittaker, durch den Ansatz $q(t) = \sin(n t - \sigma)$ einen Näherungswert für den charakteristischen Exponenten μ der Floquetschen Lösung $z = \exp(\pm \mu t + q(t))$ (q periodisch) zu erhalten. Bedeutet F_0 den Mittelwert von $F(t)$, so ist $-F_0 \pm 2\mu < 0$ die Bedingung für Nullstrebigkeit von y und damit für Stabilität von $x = \Phi(t)$. μ hängt von den Fourierkoeffizienten Θ_n der Funktion $H(t) = \Theta_0 + 2 \sum \Theta_n \cos(2\pi n t - \sigma)$ ab; mit Θ_0 als veränderlichem Parameter der Gleichung (3) führt der obige Ansatz für $\varphi(t)$ in den n -ten stabilen Bereich, dessen Grenzen näherungsweise durch $\Theta_0 = n^2 \pm \Theta_n$ gegeben sind. (Im Anhang bringt Verf. genauere Formeln für μ .) Die Stabilitätsbedingung $-F_0 \pm 2\mu < 0$ muß für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ zutreffen. Im Vergleich mit der Stabilitätsbedingung von L. Mandelstam und N. Papalexi (dies. Zbl. 3, 225) zeigt Verf., daß dort nur die Stabilität der Grundschwingung ($n = 1$) geprüft wird, während Rechnung und Versuch gezeigt haben sollen, daß dann doch eine Oberschwingung instabil sein und zum Auslöschen einer periodischen Schwingung $\Phi(t)$ führen kann. *U. T. Bödewadt.*

Manaresi, Gabriella: Su alcuni teoremi di media nella meccanica non lineare. *Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena* 6 (1951/52), 78—86 (1953).

L'A. considera l'equazione di Liénard generalizzata (1) $\ddot{y} + F'(y) + q(y) = 0$ e dimostra che se questa equazione ammette una soluzione periodica di periodo T vale la relazione: (2) $\int_0^T F(y) q(y) dy = 0$ equivalente (nel caso $q(y) = n^2 y$) ad un teorema di media già esposto in altra forma, da Van der Pol. Dalla (2) deduce poi una condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni periodiche della (1) generalizzando un teorema di Sansone. La relazione (2) e le sue conseguenze sono estese ai sistemi di equazioni di Liénard generalizzate. Infine valendosi di un altro teorema di media dimostra che in due circuiti elettrici non lineari accoppiati induttivamente la media in un periodo dell'energia magnetica è, per valori non troppo elevati del periodo, inferiore all'analoga media dell'energia elettrica. *D. Graffi.*

Wolfson, Kenneth G.: On the separation of spectra. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 408—409 (1953).

In (1) $\lambda x - L(x) \equiv (p x')' + (q + \lambda) x = 0$ sei $p(t) > 0$, $q(t)$ reell für $-\infty < t < \infty$ und es liege für $t = -\infty$ und $+\infty$ der Grenzpunktfall vor. Es sei S das Spektrum von L , und S_1 bzw. S_2 das Spektrum von (1) bei $x(0) = 0$ in dem Hilbertraum $L^2(-\infty, 0)$ bzw. $L^2(0, \infty)$. Es seien λ', λ'' zwei Zahlen, die in einer der beiden Mengen S , $S_1 + S_2$ liegen; dann enthält die andere Menge mindestens einen Punkt im abgeschlossenen Intervall $\langle \lambda', \lambda'' \rangle$. *L. Collatz.*

Levitan, B. M.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion einer selbstadjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung und über die Entwicklung nach Eigenfunktionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **17**, 331—364 (1953) [Russisch].

Let $\Theta(x, y; \lambda)$ be the spectral function of the differential operator $Ly = -y'' + q(x)y$ in the interval $[0, \infty)$ ($q(x)$ is real and integrable over any finite interval) with the real boundary condition $y'(0) = h y(0)$ and, if necessary, a self-adjoint boundary condition at infinity. This means that $f(x) \rightarrow \int_0^\infty f(y) \Theta(x, y; \lambda) dy$ is the projection E_λ in $L^2(0, \infty)$ of the corresponding resolution of the identity. Denote by $\Theta^*(x, y; \lambda)$ the spectral function when $q(x) = 0$ and $h = 0$, and by $R(x, f; \lambda)$ the difference between the projections E_λ and E_λ^* of a function $f(x) \in L^2$, that is $R(x, f; \lambda) = \int_0^\infty f(y) (\Theta(x, y; \lambda) - \Theta^*(x, y; \lambda)) dy$. Suppose that $\int_0^\infty |q(x)| dx$ satisfies a Lipschitz condition in any finite interval and that L is a non-negative operator in L^2 . Then the difference $\Theta(x, y; \lambda) - \Theta^*(x, y; \lambda)$ is a uniformly bounded function of λ if x and y are bounded, and $R(x, f; \lambda) \rightarrow 0$ when $\lambda \rightarrow \infty$, uniformly in x if x is bounded (f is arbitrary in L^2). Analogous results hold for the interval $(-\infty, \infty)$. The methods are the same as in a previous paper by the author (this Zbl. **48**, 324), where the same result for $\Theta(0, 0; \lambda)$ was proved. *L. Hörmander.*

Levitan, B. M.: Über die Spektralfunktion der Gleichung $y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0$. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **17**, 473—484 (1953) [Russisch].

We keep the notations and assumptions of the above review and introduce the difference $\Phi(x, y; \mu) = \Theta(x, y; \mu^2) - \Theta^*(x, y; \mu^2)$ ($\mu \geq 0$). $\Phi(x, y; \mu) = 0$ ($\mu < 0$). Then for fixed μ_0 we have $\Phi(x, y; a + \mu_0) - \Phi(x, y; a) \rightarrow 0$ as $a \rightarrow \infty$ and the convergence is uniform in x and y if they are bounded. This result supplements that of the preceding review. The proof uses one of Wiener's tauberian theorems. *L. Hörmander.*

Kaufman, H. and R. L. Sternberg: A two-point boundary problem for ordinary self-adjoint differential equations of even order. Duke math. J. **20**, 527—531 (1953).

Bei der Randwertaufgabe $\sum_{r=0}^n (-1)^r [p_r(x) u^{(n-r)}(x)]^{(n-r)} = 0$, $u^{(j)}(x_1) = u^{(j)}(x_2) = 0$ für $j = 0, 1, \dots, n-1$ sei $n \geq 2$, $p_0(x) > 0$, $p_r(x)$ reellwertig und von der Klasse C^{n-r} in $\langle a, \infty \rangle$ mit $a < x_1 < x_2 < \infty$. Unter den Voraussetzungen 1) $a > 0$, 2) es gibt ein $k_0 > 0$ mit $p_0(x) \geq k_0 x^{2n-2}$ in $\langle a, \infty \rangle$, 3) jedes der un-eigentlichen Riemannschen Integrale $\int_a^\infty x^{2r-1} p_r(x) dx$ existiert ($r = 1, 2, \dots, n$), gibt es ein $a_0 \geq a$ derart, daß die Randwertaufgabe für $a_0 \leq x_1$ nur die triviale Lösung $u(x) \equiv 0$ in $\langle a, \infty \rangle$ besitzt. *L. Collatz.*

Minorsky, Nicolas: Sur quelques applications des équations différentielles aux différences. Rend. Sem. mat. fis. Milano **23**, 36—47 (1953).

L'A. considère tout d'abord l'équation linéaire à argument retardé (*) $\ddot{x} + a \dot{x} + \lambda x_h = 0$, où $x_h = x(t-h)$; il discute en fonction de λ l'existence de solutions périodiques, c'est-à-dire l'existence de solutions purement imaginaires de l'équation caractéristique $z^2 + az + \lambda e^{-hz} = 0$. — Il passe ensuite à une équation non-linéaire (**) $\ddot{x} + a \dot{x} + x_{h-1} + \varepsilon x_h^3 = 0$, a, h et ε étant considérés comme des

infiniment petits du premier ordre, il cherche les intégrales voisines de la solution (périodique) de (**) pour $a = h = \varepsilon = 0$; la méthode stroboscopique (voir le Zbl. 42, 100) permet de montrer l'existence de solutions périodiques stables de (**) lorsque $h > 0$ (argument retardé) et instables lorsque $h < 0$ (argument avancé); l'A. montre également que s'il existe une solution stable $\neq 0$, la solution $x \equiv 0$ est instable.

Ch. Blanc.

Sternberg, Robert L.: A theorem on Hermitian solutions for related matrix differential and integral equations. *Portugaliae Math.* 12, 135—139 (1953).

Considers equations of the form $dW/dx + E(x, W) = F = 0$, of importance for electrical line transmission. W, E, F are square Hermitian matrices, functions of a continuous variable x , and correspond to non-negative definite bilinear forms. The matrix E is a function of W and x . Conditions are found for formal integration of the equation between the limits x and $+\infty$ to be permissible.

W. W. Sawyer.

Tanturri, Giuseppe: Caratterizzazione geometrica di alcuni sistemi ∞^5 di curve sopra una V_3 . *Univ. Politec. Torino. Rend. Sem. mat.* 12, 177—194 (1953).

Differential systems of the form $y''' = c(x, y, z, y', z', y'')$, $z'' = K(x, y, z, y', z') y'' + H(x, y, z, x', y')$ have already been met by many authors and interpreted either in an Euclidean space or in a projective space of three dimensions. The author interprets now more generally the given system as defining a system of curves on a three-manifold imbedded in a projective space S_n . A large use is made of concepts of "differential topology" introduced by the reviewer. Algebraic examples of integral curves C^1 of such a system on a V_3 of S_4 with a double plane are given.

E. Bompiani.

Łojasiewicz, S.: Sur un théorème de Kneser. *Ann. Soc. Polon. Math.* 24, Nr. 2, 148—152 (1953).

In den Differentialgleichungen (1) $\dot{x} = f(t, x, y)$, $\dot{y} = g(t, x, y)$ seien f und g in einem genügend ausgedehnten Gebiet G stetig und so beschaffen, daß jede durch den Nullpunkt gehende Lösung für $0 \leq t \leq c$, $c > 0$, vorhanden ist. Der Lösungsrichter Z durch den Nullpunkt schneidet nach einem Ergebnis des Ref. [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. 1923, 171—174 (1923)] die Ebene $t = c$ in einem Kontinuum X . Der Verf. setzt ferner voraus, daß von jedem Randpunkt von Z nach links nur eine Lösung ausgeht, und beweist, daß dann X die Ebene nicht zerlegt. Ist umgekehrt in der Ebene $t = c$ ein sie nicht zerlegendes Kontinuum X gegeben, so konstruiert er Differentialgleichungen (1) mit überall stetigem f und g , bei denen jeder Punkt außer dem Nullpunkt Eindeutigkeitspunkt ist und der Lösungsrichter durch den Nullpunkt die Ebene $t = c$ genau in X schneidet. Der Beweis benutzt die konforme Abbildung des Restgebietes von X auf das Äußere des Einheitskreises. Wie der Verf. nachträglich bemerkt, wurde sein zweiter Satz schon von M. Boekstein [Učenyje Zapiski Moskov. gosud. Univ. 15, 3—72 (1939)] bewiesen.

H. Kneser.

Amerio, Luigi: Extension of the notion of „saddle point“ to systems of two differential equations in three variables. *Commun. pure appl. Math.* 6, 435—454 (1953).

L'A. poursuit l'étude de l'extension au système (1) $x' = f(t, x, y)$, $y' = g(t, x, y)$ des résultats relatifs aux singularités de l'équation (2) $dy/dx = f(x, y)$ (ce Zbl. 43, 89; 49, 72). Pour tout t réel, f et g sont analytiques dans un domaine borné fermé du plan réel (x, y) et vérifient, uniformément en t , des inégalités du type $|f|, |g| \leq M_1 + M_2 |x|^{m_1} + M_3 |y|^{m_2} + \dots + M_n |x|^{m_{n-1}} + M_{n+1} |y|^{m_n}$. D'autre part, f et g ainsi que leurs dérivées par rapport à x, y, x', y' sont des fonctions continues bornées de t . Si le système a une solution bornée, on se ramène au cas où cette solution est $x = y = 0$. L'A. montre alors que sous la condition nécessaire

$$\{(df/dy - \partial g/\partial x)^2 - 4D(f, g)/D(x, y)\}_{(0,0,0)} \geq r > 0$$

et sous une condition suffisante d'énoncé plus compliqué, il existe, pour l'équation aux dérivées partielles $\partial y/\partial t + (\partial y/\partial x)f = g$ deux surfaces intégrales se coupant suivant l'axe des t et découpant, dans un voisinage de cet axe, 4 régions dans chacune desquelles le comportement des courbes intégrales de (1) rappelle celui des solutions de (2) au voisinage d'un col.

A. Revuz.

Thomas, Johannes: Über gewisse lineare Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten. *Ber. Math.-Tagung, Berlin* 14. I. 18. I. 1953, 226—230 (1953).

Diese Arbeit stimmt mit einer früheren Veröffentlichung des Verf. (dies.

Zbl. 50, 91) wörtlich überein. Hinzugefügt sind zwei Beispiele: die Mathiesche Differentialgleichung, als Jacobisches System aufgefaßt, und ein System von zwei Mathieschen Differentialgleichungen.

M. J. De Schwarz.

Moser, Jürgen: Über periodische Lösungen kanonischer Differentialgleichungssysteme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1953, Nr. 3, 23—48 (1953).

Es werden die Lösungen eines kanonischen Differentialgleichungssystems $\dot{x}_k = H_{y_k}$, $\dot{y}_k = -H_{x_k}$ ($k = 1, 2$) mit zwei Freiheitsgraden in der Nähe einer periodischen Lösung untersucht. Falls noch ein von H unabhängiges definites Integral G existiert, im sog. „integrablen“ Fall, wird der Verlauf der Lösungen vollständig durch eine invariante Funktion $\lambda(t)$ beschrieben. In diesem Fall erweist sich die Funktion $\lambda(t)$ als die einzige Invariante gegen Variablentransformationen; sie kann ohne Integration des Differentialgleichungssystems berechnet werden. An einem Beispiel wird gezeigt, daß für diese Schlüsse nicht allein die Existenz von zwei unabhängigen Integralen H, G ausreicht, sondern auch der kanonische Charakter des Systems wesentlich ist. Für allgemeine kanonische Systeme, die sich nur wenig von integrablen Systemen unterscheiden, werden periodische Lösungen nachgewiesen, die sich nach vielen Umläufen schließen. Als Beispiel wird das restringierte Dreikörperproblem behandelt.

Autoreferat.

Šimanov, S. N.: Über die Stabilität der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 6 (58), 155—157 (1953) [Russisch].

Consider the system $\ddot{x} + f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \dot{x} + q(x) = 0$, $\ddot{y} + f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \dot{y} + p(y) = 0$. If $q(0) = p(0) = 0$, $q(x), x > 0$, $p(y), y > 0$, $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dx = +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi dy = +\infty$, then the solution $x = y = 0$ is asymptotically stable for arbitrary initial perturbations.

J. L. Massera.

Krasovskij, N. N.: Über die Stabilität der Lösungen eines Systems zweiter Ordnung in den kritischen Fällen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 965—967 (1953) [Russisch].

Consider $\dot{x} = X(x)$, $X(0) = 0$, where x is a two dimensional vector. Let $J(x)$ be the jacobian matrix of X with respect to x . The criteria of stability in the critical cases considered by Ljapunov when X is analytic are here extended (for $n = 2$) to the case where it is only assumed that J satisfies a Lipschitz condition. Theorem: if the characteristic roots of $J(0)$ are either $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 > 0$ or a pair of purely imaginary conjugate numbers, and if the characteristic roots of $J(x)$ have negative real parts for all $x \neq 0$, the solution $x = 0$ is asymptotically stable; if for each $x \neq 0$ $J(x)$ has at least one characteristic root with positive real part, $x = 0$ is unstable.

J. L. Massera.

Gorbunov, A. D.: Über die Bedingungen für die asymptotische Stabilität der verschwindenden Lösung eines Systems von gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6), 49—55 (1953) [Russisch].

Consider $\dot{x} = L(t)x$, x being an n -vector and L a real continuous matrix defined for $-\infty < t < +\infty$. The following theorem is proved: A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the solution $x = 0$ is that a positive definite quadratic form (in x) $G(x, t)$ exists having continuously differentiable coefficients, such that the form $g(x, t) = (\partial G / \partial t) + (\partial G / \partial x) \cdot Lx$ is negative definite for each t , $-\infty < t < +\infty$, and such that $\int_{t_0}^{+\infty} N_G(t) dt = -\infty$, where $N_G(t) = \sup_{G=1} g$.

J. L. Massera.

Whyburn, W. M.: Note on a non-self-adjoint differential system of the second order. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 69, 116—118 (1953).

Author has discovered fallacy in Lemma 5 of an earlier paper (Hinds and Whyburn, this Zbl. 48, 329). The conclusions of that paper are saved by means

of an additional hypothesis. The present note seems to contain a slight, remediable slip. On page 117, $\sin^2 v_b$ should have the value of $\cos^2 v_b$ in equation (7) of the earlier paper. The quantities α_b, β_b should be interchanged here, and, in consequence, also in the expression for $\Theta(\lambda)$ in the enunciation of the new hypothesis.

W. W. Sawyer.

Tanaka, Sen-ichiro: On asymptotic solutions of non-linear difference equations of the first order. I. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 7, 107—127 (1953).

Es handelt sich um die Differenzengleichung $y(x+1) - y(x) = f(x, y(x))$, wobei $f(x, y)$ im Bereich $|x| \geq R, |y| \leq r$ analytisch sein soll. Ist g_0 eine Zahl, für die $|g_0| < r$ und ist $f(\infty, g_0) = 0, |1 + f'_y(\infty, g_0)| > 1$, so wird gezeigt, daß es eine eindeutig bestimmte formale Lösung der Gestalt $y(x) = g_0 + g_1 x^{-1} + g_2 x^{-2} + \dots$ gibt. Dann entsteht die Frage, ob es eine wirkliche Lösung gibt, die dieser Reihe für $|x| \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich ist. Unter Zuhilfenahme eines Fixpunktheorems gelingt der Nachweis einer solchen Lösung, und zwar gilt die asymptotische Darstellung im Winkelraum $|\arg x| \leq \pi - \varepsilon$. Zudem wird gezeigt, daß es nur eine solche Lösung gibt. Weiterhin wird auch der Fall behandelt, daß unter sonst gleichen Voraussetzungen $|1 + f'_y(\infty, g_0)| = 1$ ist. Da ist das Ergebnis etwas abweichend: Es gibt wieder die eindeutig bestimmte formale Lösung, nun aber zwei Lösungen, die der Reihe asymptotisch gleich sind, und zwar je eine und nur eine in der rechten Halbebene $|\arg x| \leq \pi/2 - \varepsilon$ und in der linken Halbebene $|\arg x - \pi| \leq \pi/2 - \varepsilon$.

O. Perron.

Berezanskij, Ju. M.: Über Entwicklungen nach Eigenfunktionen von partiellen Differenzengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 5—8 (1953) [Russisch].

The author studies the partial difference operator

$(L u)_{j,k} = a_{j-1,k} u_{j-1,k} + a_{j,k} u_{j-1,k-1} + b_{j,k-1} u_{j,k-1} + b_{j,k} u_{j,k+1} + c_{j,k} u_{j,k}$ ($j = -1, -\infty < k < \infty$) with real coefficients and $a_{j,k} > 0$ and with the boundary condition $u_{-1,k} = 0$. A basis of the solutions of $L u = \lambda u$ is given by the solutions $P_{j,k}(\alpha, \lambda) = P_q(\alpha, \lambda)$, $\alpha = 0, \pm 1, \dots$, which satisfy the initial conditions $u_{j,k} = \delta_{j,k}$ (δ = Kronecker's symbol). $P_q(\alpha, \lambda)$ is a polynomial in λ . If $f_{j,k} = f_q$ vanishes except for a finite number of indices q , the „Fourier“ transform of f is defined as the sequence of functions $F_x(\lambda) = \sum_q f_q P_q(\alpha, \lambda)$. An infinite matrix $T(\lambda) =$

$(\tau_{\alpha\beta}(\lambda)), \alpha, \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ is called a distribution matrix if every $\tau_{\alpha\beta}$ is of bounded variation and $T(\xi, \xi) = \sum_{\alpha, \beta} \int \xi_{\alpha}(\lambda) \overline{\xi_{\beta}(\lambda)} d\tau_{\alpha\beta}(\lambda) \geq 0$ for any continuous vector function $\xi(\lambda)$ with

compact support and only a finite number of not identically vanishing components. It is stated that to the given difference equation there exists at least one spectral matrix, that is a distribution matrix such that $\sum_q f_q f_q = T(F, F)$. The spectral function in Carleman's

sense is given by $\Theta_{p,q}(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta} \int_{-\infty}^{\lambda} P_q(\alpha, \mu) P_p(\beta, \mu) d\tau_{\alpha\beta}(\mu)$. The operator L is uniquely determined by its spectral matrix. Necessary and sufficient conditions for a given distribution matrix to be a spectral matrix of a difference operator of the class considered are stated. There are hints of a proof with methods by M. G. Krein.

L. Hörmander.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Saltykow, M. N.: Intégrales de S. Lie des équations aux variables canoniques de seconde classe. Bull. Acad. Serbe Sci., Cl. Sci. math. natur., Sci. math. 10, Nr. 2, 9—16 (1953). — Serbische Fassung. Glas Srpske Akad. Nauka CCVI, Odel. prirod.-mat. Nauka, n. Ser. 5, 71—77 mit französ. Zusammenfassg. 77—78 (1953).

L'A. compare les différentes méthodes, pour la recherche des intégrales de S. Lie. E. Vessiot (ce Zbl. 28, 160) y avait introduit sa méthodes des faisceaux en indiquant dans quelles conditions que sa théorie pouvait être appliquée. Or, le point le plus délicat de la question sur l'existence des intégrales de S. Lie consiste dans l'étude des conditions nécessaires et suffisantes de leur existence (v. D. L. Bernstein, ce Zbl. 41, 424). L'A. démontre qu'une équation aux

variables canoniques de seconde classe, dont l'intégrale complète classique s'obtient par quadratures, pour avoir une intégrale complète de S. Lie de la classe q , doit être linéaire par rapport à $q + 1$ variables canoniques de la seconde classe, leur coefficients représentant des fonctions arbitraires des autres variables canoniques de la seconde classe. L'intégrale requise s'obtient alors au moyen d'une quadrature. Autoreferat.

Pini, Bruno: Sui cicli relativi ai sistemi ai differenziali totali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 38—63 (1953).

L'A. établit quelques propriétés globales des surfaces intégrales fermées, sans points singuliers, ou cycles, d'un système complètement intégrable

$dx = \alpha(x_1, x_2, x_3) du + \beta(x_1, x_2, x_3) dv$, $x = (x_1, x_2, x_3)$; $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, où la matrice (α, β) remplit certaines conditions introduites dans un travail antérieur (ce Zbl. 51, 326). Th. Lepage.

Torecoli, Emilia: Su la determinazione delle soluzioni omogenee di equazioni alle derivate parziali. Rivista Mat. Univ. Parma 4, 213—218 (1953).

Verf. untersucht die Möglichkeit der Existenz homogener Lösungen $z(x, y) = x^r \varphi(y/x)$ einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, z, z_x, \dots, z_{yy}) = 0$. Definiert man $y/x = t$ und setzt $y = xt$, $z = x^r \varphi(t)$, \dots , $z_{yy} = x^{r-2} \varphi''(t)$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $q(t)$ mit den Parametern r und x . Die allgemeine Lösung heißt $q(t) = \Phi(t, x, r, c_1, c_2)$. Für das vorliegende Problem kommen aber nur solche Lösungen in Frage, für die die Funktion $\Phi(y/x, x, r, c_1, c_2)$ in x und y vom nullten Grade homogen ist. Verf. unterscheidet drei Fälle: 1) Φ ist für jeden Wert von r von dieser Art; 2) Φ ist nur für diskrete Werte von r von dieser Art; 3) für keinen Wert von r ist Φ homogen vom nullten Grad. — Beispiele. Johannes Nitsche.

Pucci, Carlo: Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 35, 129—153 (1953).

Notations: $x = (x_1, \dots, x_r) \in R^r$, $t =$ variable de temps. On pose: $p = (p_1, \dots, p_r)$, p_i entiers ≥ 0 , $|p| = p_1 + \dots + p_r$, $D_x^p = \partial^{|p|} / \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_r^{p_r}$, $p! = |p|!$. On désigne par A un ouvert de R^n , par C_h le produit: $C_h = A \times [-h, h]$, $h > 0$, fini ou non, par Γ_σ l'espace des fonctions q continues dans C_h , à valeurs complexes, indéfiniment différentiables en x , avec: $|D_x^p q(x, t)| \leq M(q) (q(q))^{-|p|} p!$ pour tout p , $M(q)$ et $q(q)$ dépendent de q , $q(q) \cdot \sigma$; G_σ est le sous-espace de Γ_σ formé des q telles que $D_t^m q$ et $D_x^p D_t^s q$ soient continues dans C_h , p quelconque, $s \leq m - 1$, m entier donné. On donne des fonctions a_{ps} de t , $|p| + s \leq m$, indéfiniment (ou suffisamment) différentiables de $t \in [-h, h]$; on suppose que $a_{0,m}(t) = 1$; on donne alors l'opérateur différentiel: $D = \sum_{|p|+s \leq m} a_{ps}(t) D_x^p D_t^s$. A tout $h > 0$ on fait correspondre un nombre $\varepsilon(h)$ déterminé à partir des a_{ps} par une formule assez compliquée. Théorème 1: On donne $f \in G_{\varepsilon(h)}$, $u_s \in \Gamma_{\varepsilon(h)}$, $0 \leq s \leq m - 1$. Il existe dans $G_{\varepsilon(h)}$ une fonction u et une seule, solution de (1) $Du = f$, avec les conditions initiales (données de Cauchy). (2) $D_t^s u|_{t=0} = u_s$, $0 \leq s \leq m - 1$. — Plan de la démonstration: on fait passer les données de Cauchy au 2^e membre, par intégration en t et intégrations par parties. On voit alors que (1) entraîne: (3) $u = F + Bu$, où F est une fonction déterminée par f et u_s , et où B est un opérateur intégral en t , différentiel en x facile à expliciter. Des majorations délicates montrent ceci: F est dans $G_{\varepsilon(h)}$ et $B \in L(G_{\varepsilon(h)}; G_{\varepsilon(h)})$, de sorte que (3) est une équation linéaire dans $G_{\varepsilon(h)}$, résolue formellement par: (4) $u = \sum_{k=0}^{\infty} B^k F$ ($B^0 =$ identité). On peut montrer la convergence de cette série. On en déduit le théorème. Le théorème 1 entraîne: Théorème 2: Cas $h = \infty$: Γ (resp. G) est l'espace des q dont la restriction à C_h , h fini quelconque, est dans G_σ (resp. G_σ) quel que soit σ . On donne $f \in G$ et $u_s \in \Gamma$. Le problème (1), (2), admet une solution unique dans G . — Ces théorèmes sont dans un certain sens les meilleurs possible. Le cas le plus important est celui où $A = R^n$ (sinon il y a des conditions au contour et les espaces Γ , G ne sont pas adaptés à de telles conditions); on voit, sur un exemple, que la méthode est meilleure que la méthode des fonctions majorantes (Cauchy-Kowalewska). En outre la série (4) donne un procédé de calcul utile pour les applications. Signalons, avec l'A., que la théorie actuelle est liée à celle de Nagumo, Japanese J. Math. 18, 41—47 (1942). J. L. Lions.

Germain, Paul et Roger Bader: Sur le problème de Tricomi. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 2, 53—70 (1953).

A few problems of aerodynamics have recently stressed the importance of partial differential equations of the form $(1) \varepsilon (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) = 0$ which are of the elliptic type in a part of the plane and of the hyperbolic type in the other. (1) has been studied by Tricomi but the authors have considerably simplified his results by establishing the existence of the functional operation determining the solution of the usual boundary value problem. The domain in which they consider (1) is bounded by a curve lying in the upper part of the x, y -plane and butting on two points A and B of Ox , on the one side, and, on the other, of two characteristics AC and BC below Ox . The boundary values are naturally two functions given on the curve above Ox and on the characteristic AC . The authors are naturally led to write (1) in the system of coordinates (l, m) where $l = \text{const.}$ and $m = \text{const.}$ define the two systems of characteristics. It is with regard to this system that the three parameter group of (1) is most easily studied. This group is first defined in the complex domain and then its traces on the real plan are studied. The „real“ group consists of two distinct families of transformations which must be determined in the union of the two compactified half planes. Complete information about this group and consideration of solutions of (1) of the so-called Darboux type yield fundamental solutions — namely globally determined elementary solutions, with the usual singularities at a point M , and, if M is below Ox , the two characteristics passing through M . It is then easy to deduce the existence of a Green function with the classical properties of such a function: this however cannot be done without assuming existence and uniqueness theorems about solutions of the boundary value problem at stake. The last two sections of the paper establish such theorems by utilizing a skillful adaptation to the present problem of the Schwarz method, well known in the theory of the Dirichlet problem. *C. Racine.*

Ovejannikov, L. V.: Über die Aufgabe von Tricomi in einer Klasse von verallgemeinerten Lösungen der Euler-Darboux'schen Gleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 457—460 (1953) [Russisch].

Let S be a domain bounded by two characteristics AC and BC of $(E) y u_{xx} + u_{yy} = 0$ and a curve Γ in $y > 0$ ending at A and B . A solution u of (E) is said to be in P_S if u is continuous in \bar{S} , $u = 0$ on Γ , $u_y(x, y)$ has a weak limit $v(x) \in L^2$ when $y \rightarrow +0$ and $u(x, y)$ can be represented in the hyperbolic part of S as the solution by Riemann's method of the singular Cauchy problem with initial values $u(x, 0)$ and $v(x)$ on $y = 0$. The author supposes that $v(x)$ determines $u(x, y)$ uniquely and that the self-adjoint T defined by $Tv(x) = u(x, 0)$ has a kernel with certain regularity properties, which is the case for suitable curves Γ .

Then $|u(x, y)| \leq C \left(\int_A^B v(\xi)^2 d\xi \right)^{1/2}$ for $x, y \in S$. Let $v_k(x)$ be a complete orthonormal system of eigenfunctions of the operator T , which is completely continuous and $u_k(x, y)$ be the corresponding solutions of (E) . Then for any $u \in P_S$ the series $\sum (v, v_k) u_k(x, y)$ converges uniformly to $u(x, y)$, and any series $\sum c_k u_k(x, y)$ with $\sum |c_k|^2 < \infty$ converges uniformly to a function in P_S . The results are applied to Tricomi's problem (that is the problem to find a function in P_S with prescribed values on AC). No proofs. *L. Hörmander.*

Bicadze, A. V.: Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus. Trudy mat. Inst. Steklov Nr. 41, 59 S. (1953) [Russisch].

Le présent travail concerne certains problèmes aux limites, relatifs à l'équation de Lavrent'ev $(1) u'_{xx} + \operatorname{sgn} y u'_{yy} = 0$. Cette équation est du type elliptique pour $y > 0$, elle est du type hyperbolique pour $y < 0$. L'axe $y = 0$ est appelée la ligne de dégénération. Soit D le domaine (ouvert), limité par une courbe σ , joignant les points $A(0, 0)$ et $B(1, 0)$ et située dans le demi-plan $y > 0$, et les segments AC et BC des caractéristiques $y = -x$, $y = x - 1$, situés dans le demi-plan $y < 0$. Dans le chapitre I l'A. s'occupe du problème suivant, appelé le problème T : On cherche une fonction $u(x, y)$ qui 1) soit continue dans la fermeture \bar{D} du domaine D , 2) admette dans le domaine D les dérivées u'_x et u'_y continues et y satisfasse à (1) pour $y \neq 0$, 3) satisfasse aux conditions aux limites (2) $u(x, y) = q(x)$ sur σ , (3) $u(x, y) = \varphi(x)$ sur AC ($\varphi(0) = \varphi(0_+)$), $q(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions continues données. Le problème T est analogue à celui de Tricomi, relatif à l'équation $y u'_{xx} + u'_{yy} = 0$. L'unicité de la solution du problème T résulte du principe suivant: Une solution du problème T , s'annulant sur AC ($\varphi = 0$) ou sur BC , ne peut atteindre en aucun point du segment AB ouvert ni un maximum positif, ni un minimum négatif. L'A. expose ensuite deux démonstrations de l'existence d'une solution du problème T . Dans la première on applique la méthode du prolongement analytique, et dans la seconde on ramène le problème à la résolution d'une équation intégrale. Dans le chapitre II l'A. démontre l'existence et l'unicité des solutions de trois problèmes T_1 , T_2 et T_3 , relatifs à l'équation (1) qui constituent des modifications du problème T . Les conditions aux limites y sont posées sur certains arcs du demi-plan $y > 0$ et certains segments des caractéristiques $y = -x$ et $y = x - 1$, situés dans le demi-plan $y < 0$. Dans l'énoncé

du problème T_3 le domaine D est le même qu'au problème T ; la condition (2) est remplacée par la condition de Neumann $du/dn = \varphi(x)$ sur σ (sauf peut être aux points A et B). Les considérations du chapitre III concernent le problème, appelé M qui constitue une généralisation du problème T , en tant que la condition (3) est remplacée par la condition $u(x, y) = \varphi(x)$ sur L , où L est un arc monotone, joignant le point A à un point du segment BC .

M. Krzyżański.

Olevskij, M. N.: Über die Gleichung $A_p u(P, t) = (\partial^2/\partial t^2 + p(t) \partial/\partial t + q(t)) u(P, t)$ (A_p ein linearer Operator) und die Lösung des Cauchyschen Problems für eine verallgemeinerte Euler-Darbouxse Gleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 975—978 (1953) [Russisch].

Ist $v(P, t) \equiv v(x_1, \dots, x_m, t)$ Lösung des gleichen Cauchyschen Anfangswertproblems für die Gleichung $A_p v = (\partial_t^2 + \bar{p}(t) \partial_t + \bar{q}(t)) v$, so läßt sich die Lösung $u(P, t)$ des Anfangswertproblems der im Titel genannten Differentialgleichung durch

$$u(P, t) = r(t) v(P, t) + \int_0^t K(\xi, t) v(P, \xi) d\xi$$

darstellen. Dabei ist $r(t)$ durch Quadraturen bestimmbar, während $K(\xi, t)$ Lösung eines gemischten Problems einer hyperbolischen Gleichung (in 2 Variablen) ist. Im Falle $A_p \equiv \Delta$ und $p = 0, q = \text{konst.}$ wird die Lösung explizit angegeben. — Das Cauchysche Anfangswertproblem bei $p = a \int \bar{l} \text{ctg } \bar{l} dt, q = b$ (a, b, l konst.) wird untersucht. Durch Heranziehung hypergeometrischer Reihen gelingt eine symbolische Darstellung der Lösung.

Joachim Nitsche.

Kapilevič, M. B.: Über die Hauptlösungen einer Gleichung vom hyperbolischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 719—722 (1953) [Russisch].

Es werden die Resultate der Untersuchungen über „Hauptlösungen“ der folgenden Gleichung in dem Gebiet $y > x > 0$ angegeben.

$$\partial^2 z / \partial x \partial y = f(y - x) (\partial z / \partial y - \partial z / \partial x), \quad \text{wobei } f(y - x) = -(1/2 \sqrt{K}) \partial \sqrt{K} / \partial x;$$

$$\sqrt{K}(y - x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{2i-1} (y - x)^{(2i-1)/3}; \quad b_{2i-1} \text{ const.} \quad K. Maurin.$$

Bureau, Florent: Les séries de fonction fondamentales et les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Acta math. 89, 1—43 (1953).

Le problème est: trouver $u(x, t)$, solution de $\partial^2 u / \partial t^2 - L_x(u) = 0, x \in]0, l[, t \geq 0$, avec les conditions initiales: $u(x, 0) = u_0(x), \partial u / \partial t(x, 0) = u_1(x)$, et les conditions aux limites: $u(0, t) = u(l, t) = 0; L_x(u)$ est ramené à: $L_x(u) = \partial^2 u / \partial x^2 - a u$. Ce problème admet une solution unique dont il est donné plusieurs expressions: 1°) A l'aide de la fonction de Green-Riemann. 2°) A l'aide du système orthonormal complet $\{v_k\}$ dans $L^2(0, l)$ des fonctions propres de L , relativement aux conditions aux limites: $u(0) = u(l) = 0$; soit donc $L v_k =$

$\lambda_k v_k = 0$; le noyau de Green de L est alors: $G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} v_n(x) v_n(y)$. On pose: $G_r(x, y) = \sum_{n=1}^r \frac{1}{\lambda_n} v_n(x) v_n(y)$. 3°) A l'aide de la fonction $H_n(x, y, t)$, n entier > 0 quelconque, fonction construite par utilisation de la méthode des singularités, et d'expression:

$$H_n(x, y, t) = - \sum_{k=1}^n \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} + (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x, y).$$

On étudie le „support“ de $H_n(x, y, t)$. 4°) A l'aide de la fonction

$$K_s(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}},$$

$s = \sigma + i\tau$; fonction analytique pour $\sigma > 0$. On pose $\partial K_s(x, y, 0) / \partial t = \zeta_s(x, y)$ fonction déjà rencontrée par Minakshisundaram (ce Zbl. 34, 51). On part de la formule:

$$(1) \quad \int_0^1 u(x, t) \zeta_s(x, y) dy = \int_0^1 [u_1(y) K_s(x, y, t) + u_0(y) \frac{\partial}{\partial t} K_s(x, y, t)] dy$$

et on effectue le prolongement analytique pour $s = 0$; on utilise le théorème suivant: si $x \neq y, \zeta_s(x, y)$ est une fonction entière de s ; si $x = y, \zeta_s(x, y)$ est analytique régulière dans

le plan des s sauf pour $s = 1/2$, où elle a un pôle simple de résidu $1/2$; $\zeta_s(x, y)$ est nulle lorsque $\Gamma(s) = 0$. On peut alors déduire de (1) que:

$$u(x, t) = \text{prol. anal.} \int_{\varepsilon=0}^1 [u_1(y) K_s(x, y, t) + u_0(y) \frac{\partial}{\partial t} K_s(x, y, t)] dy,$$

grâce à l'unicité, toutes ces solutions coïncident, d'où d'intéressantes formules. — L'A. étudie pour finir la fonction représentée par $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n^2$; elle est analytique pour σ assez grand, peut être prolongée analytiquement pour $\sigma = 1/2$ et possède dans ce demi-plan un seul pôle simple $s = 1/2$, de résidu $1/2$. J. L. Lions.

Stellmacher, Karl L.: Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1953, (133—138 (1953)).

A total hyperbolic differential equation is called a Huygens' equation, if at any point $x = \xi$, the value of the solution, $u(\xi)$, is completely determined by the data on the intersection of the initial manifold with the characteristic cone, which has its vertex at $x = \xi$. The author considers equations of the following form: (*) $\square u + C(x)u = 0$, where $\square u =$

$\sum_{i=1}^n \delta_i u_{x_i x_i}$, with $n = 2m$, $\delta_n = 1$, $\delta_i = -1$ for $i = n$. The coefficient $C(x)$ is assumed to

be regular analytic in a domain of the x space. It is proved: I. For $n = 2m > 4$, there exist Huygens' equations of the form (*). They are: (1) $\square u - (2/(x_n + B)^2)u = 0$, (2) $\square u + (2/(x_1 - B)^2)u = 0$ where B is an arbitrary constant, and (3) the equations (*) which can be transformed into (1) or (2) by similarity transformations of the coordinates, and by the transformations of the "reciprocal radius": $x'_i = x_i/\Gamma(x)$, $u' = \Gamma^{m-2n/2}u$, with $\Gamma(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i x_i^2$.

II. For the special case of $n = 6$, there exist no other Huygens' equations than those listed above. The proof is based on a criterion of Hadamard, that the elementary solutions of Huygens' equations are free of $\log \Gamma(x - \xi)$, the dimension n being necessary even. Toward the end of the paper the elementary solutions of (1) and (2) are given in explicit form. The author also gives a direct verification of the Huygens' property for (1) with $n = 6$. Y. W. Chen.

Green, J. W.: An expansion method for parabolic partial differential equations. J. Res. nat. Bur. Standards 51, 127—132 (1953).

Im Anschluß an eine Arbeit von S. Faedo (vgl. dies. Zbl. 33, 275) über hyperbolische Gleichungen werden zur Lösung der Randwertaufgabe (*) $L(u) \equiv u_{xx} - u_t - g u = f$, $u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ (f und g stetig, $f(0, 0) = f(\pi, 0) = 0$) die Funktionen $u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n C_{n,k}(t) \sin kx$ betrachtet, die durch $\int_0^\pi (L(u_n) - f) \sin jx dx = 0$, $j = 1, \dots, n$; $C_{n,k}(0) = 0$ eindeutig definiert sind. Bewiesen wird: 1) Es gibt höchstens eine samt u_t , u_x , u_{xx} stetige Lösung u von (*). 2) Die Folgen u_n , u_{n_t} , u_{n_x} sind in $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq T$ gleichgradig stetig und somit gleichmäßig beschränkt. 3) Die Folge u_n konvergiert, und zwar gegen die Lösung von (*). 4) Die Folgen u_{n_t} und u_{n_x} konvergieren gleichmäßig, $u_{n_{xx}}$ im quadratischen Mittel gegen u_t , u_x bzw. u_{xx} . Zum Schluß wird eine Schranke für den Fehler $u_n(x, t) - u(x, t)$ angegeben. H. Witting.

Bureau, Florent: La théorie analytique de la chaleur de J. B. J. Fourier. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 1116—1127 (1953).

Delavault, Hugnette: Sur un problème de la théorie de la chaleur, et sa solution au moyen des transformations de Hankel. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2484—2486 (1953).

Verf. betrachtet die axialsymmetrische Wärmeleitungsaufgabe, in einer unendlichen ebenen Platte $0 \leq z \leq l$ die Temperaturverteilung in Raum und Zeit $f(t, r, z)$ zu finden, wenn der Anfangszustand $f(0, r, z)$ und die Randzustände $A(t, r) = f(t, r, 0)$, $B(t, r) = f(t, r, l)$ vorgegeben sind. Hierfür dient die Laplace-Bessel-Transformation $q(u, r, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(r\lambda) f(t, r, z) r dr dt$ (beide Integrationen von 0 bis ∞), deren Gesetze einleitend zusammengestellt

werden. Die Lösung wird im Unter- und auch im Oberbereich angegeben: daß sich für den so erhaltenen Reihen-Integral-Ausdruck die Lösungseigenschaften nachweisen ließen, wird ohne nähere Einzelheiten erwähnt. (Einige Satzfehler in der Schlußformel werden in der folgenden Mitteilung richtiggestellt.)

U. T. Bödewadt.

Delavault, Huguette: Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen des transformations de Fourier et de Laplace. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1067—1068 (1953).

Die Aufgabe der Temperaturverteilung in der unendlichen ebenen Platte bei gegebenen Anfangs- und Randwerten wird (vgl. vorstehend. Referat) hier in kartesischen Koordinaten behandelt, jetzt ohne die Bedingung der Axialsymmetrie. Die gesuchte Temperatur $f(t, x, y, z)$ wird in (x, y) einer zweidimensionalen Fouriertransformation und in t einer Laplacetransformation unterworfen. Die Umkehrung der Lösung im Unterbereich gibt einen Reihen-Integralausdruck mit zweifacher Faltung (in x, y). Für den Beweis der Lösungseigenschaften dieses Ausdrucks wird nur ein kurzer Hinweis ohne weitere Einzelheiten gegeben.

U. T. Bödewadt.

Fulks, W.: The Neumann problem for the heat equation. Pacific J. Math. **3**, 567—583 (1953).

Si consideri nel rettangolo $R: b < x < c; a < t < T$ la soluzione dell'equazione del calore (1) $u_{xx} - u_t = 0$ espressa per mezzo della funzione di Green relativa al problema di Neumann per la (1): (2) $u(P) = \int_{F_0 R} N(P, Q) f(Q) ds(Q)$. $F_0 R$ è la parte della frontiera di R costituita dai lati $x = b, x = c, t = a$. $N(P, Q)$ è esprimibile mediante la funzione ∂_3 di Jacobi. L'A. si propone di generalizzare la rappresentazione (2) e considera la funzione (3) $u(P) = \int_{F_0 R} N(P, Q) \cdot dF(Q)$ essendo $F(Q)$ a variazione limitata in $F_0 R$. Egli dà le condizioni necessarie e sufficienti perchè una soluzione di (1) ammetta la rappresentazione (3). L'analogia questione relativa al problema di Dirichlet era stata risolta da Wintner e Hartman (questo Zbl. **38**, 258).

G. Fichera.

Ėjdel'man, S. D.: Abschätzungen der Lösungen parabolischer Systeme und einige Anwendungen davon. Mat. Sbornik, n. Ser. **33**, 359—382 (1953) [Russisch].

L'A. considère le système de la forme

$$(1) \frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{(k_j)} A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_0+k_1+\dots+k_n} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (i=1, 2, \dots, N, k_1+k_2+\dots+k_n \leq M, k_0 < h_j)$$

et énonce la définition du système de la forme (1) du type parabolique. Au système (1) correspond un système de fonctions, constituant la solution fondamentale de (1). L'A. démontre que dans la classe de fonctions continues dans une couche $t_0 \leq t \leq T$ et y satisfaisant à une

condition qui restreint leur croissance pour $\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \infty$, la seule solution du système (1) du type parabolique, qui satisfait aux conditions initiales $\partial^k u_i / \partial t^k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, h_i - 1$; $i = 1, 2, \dots, N$) pour $t = t_0$ est $u_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) pour $t_0 \leq t \leq T$. Ce théorème constitue une généralisation de celui de Ladyženskaja, relatif à une seule équation du 1^{er} ordre en t (ce Zbl. **39**, 107); le th. analogue relatif à une équation du type parabolique du 1^{er} ordre par rapport à t , du 2^e ordre par rapport aux x_i , mais aux coefficients dépendant de t et des x_i , a été démontré par le ref. [Ann. Soc. Polonaise Math. **18**, 145—156 (1945); ce Zbl. **34**, 359]. L'A. énonce ensuite (sans donner la démonstration) des théorèmes d'existence. A la fin du travail l'A. démontre des théorèmes analogues à celui de Liouville et des théorèmes sur la convergence des suites de solutions de (1). Il semble au ref. qu'à l'énoncé du th. 1 (p. 372) manque l'hypothèse que $u_i = 0$ pour $t = t_0$ ($i = 1, 2, \dots, N$). L'énoncé des théorèmes 2 et 3 (p. 375) semble non clair au ref., car les conditions initiales n'y sont pas précisées.

M. Krzyżański.

Birman, M. Š.: Über minimale Funktionale für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **93**, 953—956 (1953) [Russisch].

Auf Grund der in früheren Arbeiten des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR,

1. Ser. 91, 189—191 (1953); 92, 205—208 (1953)] vervollständigten Theorie von Višik (dies. Zbl. 47, 95) wird eine Reihe von minimalen Funktionalen angegeben für die entsprechenden allgemeinen Randwertaufgaben für selbstadjungierte elliptische Differentialgleichungen. Es werden einige Beispiele angegeben, welche zeigen, daß diese Theorie die klassischen Methoden von Trefftz u. a. umfaßt.

K. Maurin.

Michlin, S. G.: Über die Anwendbarkeit der Variationsmethode auf gewisse ausgeartete elliptische Gleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 723—726 (1953) [Russisch].

Es wird mit der Technik des Hilbertschen Raumes die Lösbarkeit der folgenden Probleme untersucht: (1) $\Delta u = f(y)$, $\partial^2 u / \partial x^2 = \partial^2 u / \partial y^2 = q(x, y)$ mit den Randbedingungen (2) $u|_F = 0$, $u|_{F'} = 0$; resp. (2') $u|_F = 0$, $\partial u / \partial y|_{F'} = 0$ (sowie die homogene Gleichung $\Delta u = 0$, mit inhomogenen Randbedingungen); Gleichung (3) $-\Delta u + \alpha \sqrt{f(y)} \partial u / \partial x + b \partial u / \partial y = q(x, y)$ mit den Randbedingungen (2) resp. (2'). Dabei ist $(x, y) \in \Omega$, Ω ein Bereich der oberen Halbebene, F das Intervall $a \leq x \leq b$, F' ein Kurvenbogen der oberen Halbebene und $\partial \Omega = F \cup F'$, $f(y) \in C(0, Y)$, $f(0) = 0$, $f(y) > 0$ für $y > 0$; $Y > \sup_{(x,y) \in \Omega} y$. — Methode: Zu diesem Zweck wird bewiesen, daß der Operator A auf gewissen Mengen positivdefinit ist ($(Au, u) \geq x(u, u)$; $x > 0$) und darauf auf (1), (2) eine Variationsmethode angewandt. Der geschickte Beweis der Vollstetigkeit von A^{-1} ermöglicht die Anwendung der Galerkinschen Methode zur Lösung von (3), (2); resp. (3'), (2').

K. Maurin.

Michlin, S. G.: Integration der Poissonischen Gleichung in einem unendlichen Gebiet. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1015—1017 (1953) [Russisch].

Der Verf. behandelt mit den Methoden des Hilbertschen Raumes das Problem

(1) $-\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x)$; $f(x) \in L^2(\Omega)$, (2) $u|_S = 0$ (im Sinne von Friedrichs, Courant), S der Rand des unendlichen Bereiches Ω des n -dimensionalen Raumes. — Definitionen: Die verallgemeinerte Divergenz des Vektorfeldes $\vec{B}(x) = (B_1(x), \dots, B_n(x))$: $\text{Div } \vec{B}(x)$ wird definiert durch die Identität:

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \text{Div } \vec{B}(x) dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) B_i(x) dx,$$

$\varphi(x)$ eine stetig in Ω differenzierbare, in einem Randstreifen von S und außerhalb einer Kugel verschwindende Funktion. A sei ein positiver ($(Au, u) > 0$) Operator im Hilbertschen Raume H . Es wird eingeführt der neue, vollständige Hilbertsche Raum H_A mit dem neuen Skalarprodukt $(u, v)_A = (Au, v)$, $u, v \in H$; $H_A \subset H$. Das Funktional (3) $F(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$, $f \in H$, $u \in H \cap H_A$ (wobei $(u, f) = (u, u_0)_A$, $u_0 \in H_A$) wird durch die zweite Gleichung von (3) auf H_A fortgesetzt: $\vec{F} \supset F$. — Das minimale Element der Fortsetzung $\vec{F}(u) = u_0$ wird die „singuläre Lösung“ (s. L.) von (1) $Au = f$ genannt. — Ergebnisse: Es wird (ohne Beweis) die s. L. von (1), (2) durch die zwei folgenden Sätze charakterisiert:

1. Wenn $f(x) = \text{Div } \vec{B}(x)$, wobei $B(x) = \left(\sum_{i=1}^n B_i^2(x) \right)^{1/2} \in L^2(\Omega)$, dann existiert die s. L. von (1), (2), welche die zweiten verallgemeinerten (im Sobolev'schen Sinne) Ableitungen besitzt, die in jedem endlichen Unterbereiche von Ω quadratisch integrierbar sind. Die s. L. genügt f. u. in Ω der Gleichung (1). 2. Es gilt die Umkehrung des Satzes 1.; wenn außerdem die $B_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) die ersten verallgemeinerten, in Ω quadratisch summierbaren, Ableitungen haben, dann besitzt die s. L. von (1), (2) zweite verallgemeinerte Ableitungen, die in jedem (unendlichen) Unterbereiche von Ω quadratisch integrierbar sind. 1. und 2.

gelten auch für die elliptische Gl. $Au = - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(x)$. — Es sollen entsprechende Sätze gelten für die elliptischen Systeme der Elastizitätstheorie.

K. Maurin.

Zjužko, M. P.: Über die Spektraleigenschaften des Operators $Au + cu$ im unbeschränkten Raum von beliebiger Dimensionszahl. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 957—959 (1953) [Russisch].

Der Verf. überträgt die wichtigsten Ergebnisse von Poyzner (dies. Zbl. 50, 322) auf beliebige Dimensionen, und zwar: 1. Es sei B eine beliebige selbstadjungierte Fortsetzung des Operators B : $Bu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + r(x)u$. Die Resolvente R_λ von B ist ein Integraloperator.

dessen Kern $H(x, y; \lambda)$ die folgenden Eigenschaften besitzt: a) $\|x - y\|^{n-2} H(x, y; \lambda) = O(1)$; $x, y \in E_n$; b) bei fixiertem x und beliebigem $\varepsilon > 0$ ist $\int_{E_n - \omega_\varepsilon} |H(x, y; \lambda)|^2 dx < \infty$ (ω_ε Sphäre mit

dem Mittelpunkt in x , Radius ε); c) $H(x, y; \lambda) = H(x, y; \bar{\lambda})$; d) wenn $c(x) \in C^1(E_n)$, dann gilt: $-B_x H = \lambda H$. 2. Die Spektralschar \mathfrak{G}_λ von $\bar{B} \supset B$ wird erzeugt durch die Spektralfunktion $\vartheta(x, y; \lambda)$, d. h.: $(\mathfrak{G}_\beta - \mathfrak{G}_\alpha) f(x) = \int_{E_n} [\vartheta(x, y; \beta) - \vartheta(x, y; \alpha)] f(y) dy$. 3. $\vartheta(x, y; \beta) - \vartheta(x, y; \alpha) = \int_\alpha^\beta \Psi(x, y; \lambda) d\tau(\lambda)$, $\tau(x)$ eine nichtabnehmende Funktion; $\int_{D_1} \int_{D_2} \int_\alpha^\beta |\Psi(x, y; \lambda)| \cdot dx dy d\tau(\lambda) < \infty$ (D_1, D_2 beschränkte Bereiche). — In der Beweisführung soll die wesentliche Rolle das folgende Lemma spielen: Wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ beliebige Punkte der oberen (unteren) komplexen Halbebene sind, $k = [\frac{1}{2} n]$, dann ist $(R_{\lambda_1} \cdots R_{\lambda_{k+1}}) f(x) = \int_{E_n} K(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) f(y) dy$, wobei $K(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) = \int_{E_n} \int_{E_n} H(x, s_1; \lambda_1) \cdots H(s_k, y, \lambda_{k+1}) ds_1 \cdots ds_k$ eine stetige

Funktion von (x, y) ist; $H \in L^2(E_n)$ bei fixiertem y , resp. x . Anmerkung des Ref.: Inzwischen sind in der vortrefflichen Arbeit von F. Browder [Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 454—463 (1954)] die Hauptergebnisse von Povzner auf selbstadjungierte elliptische Systeme beliebiger Ordnung in beliebigen offenen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand übertragen, indem die entsprechenden Sätze auf äußerst einfache und schöne Weise bewiesen wurden.

K. Maurin.

Molčanov, A. M.: Über Bedingungen für die Diskretheit des Spektrums selbstadjungierter Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Trudy Moskovsk. mat. Obsč. 2, 169—199 (1953) [Russisch].

The author derives necessary and sufficient conditions for the discreteness of the spectrum of Dirichlet's problem for the elliptic equation $-\Delta p + p = \lambda p$ in the whole of L^N if $p(x)$ is continuous and bounded from below. Denote by $\lambda(D)$ and $\mu(D)$ the lowest eigenvalues of Dirichlet's and Neumann's problems in a bounded domain D . Then the spectrum is discrete if and only if $\mu(D_n) \rightarrow \infty$ (or $\lambda(D_n) \rightarrow \infty$) for every sequence of disjoint congruent cubes D_n . The proof depends on the interesting inequality $\lambda(D) \geq 2^{2N-7} (\mu(D) + 1/L^2)$, valid when D is a cube with side length L and $p(x)$ is any non negative function. If $N = 1$, and only then, this is equivalent to $\int_{D_n} p dx \rightarrow \infty$ for every sequence of disjoint congruent D_n . If $N \geq 2$ a neces-

sary and sufficient condition for discreteness is that $\int_{D_n - F_n} p dx \rightarrow \infty$ for every sequence of disjoint cubes D_n with side length L and subsets F_n of D_n such that $C(F_n) \leq \varepsilon_N L^{N-2}$, where ε_N is a constant depending on the dimension N , and $C(F)$ denotes the capacity. The proof of this and other statements is insufficient but can be supplemented. — Similar results hold for Dirichlet's problem in any infinite domain.

L. Hörmander.

Lopatinskiĭ, Ja. B.: Über ein Verfahren der Zurückführung von Randwertaufgaben für ein System von Differentialgleichungen vom elliptischen Typus auf reguläre Integralgleichungen. Ukrain. mat. žurn. 5, 123—151 (1953) [Russisch].

Definitionen: $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$; $A(x, \alpha) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = \alpha} a_{i_1, \dots, i_n}^{k, l}(x) \alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n}$ ($k, l = 1, \dots, p$);

$B \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ist eine $\frac{ps}{2} \times p$ -Operatorenmatrix; $s = \max_{k, l} s_{k, l}$. Die Elemente der j -ten Zeile $B_j(x, \beta)$ sind β -Formen des Grades s_j ($j = 1, 2, \dots, \frac{1}{2} ps$). $s_j < s$; $\bar{s} = \min_j s_j$; E ist die $p \times p$ -Einheitsmatrix. $A_0(x, \alpha \partial x)$, $B_0(x, \alpha \partial x)$ Matrizen der höchsten Ordnung in $A(x, \alpha \partial x)$ bzw. $B(x, \alpha \partial x)$. K^* ein geschlossener Weg in der komplexen λ -Halbebene, der alle Wurzeln der Gleichung: $\det(A_0(y, \tau + \lambda v(y))) = 0$ umschließt. V der beschränkte konvexe Bereich des n -dimensionalen Raumes mit dem Liapunoffschen Rande ∂V . Es wird der folgende Hauptsatz bewiesen: Voraussetzungen: 1) ∂V ist $(\bar{s} - s)$ -mal stetig differenzierbar; 2) die Koeffizienten bei den Ableitungen der j -ten Ordnung in $A(x, \alpha \partial x)$ sind $j + (\bar{s} - s)$ -mal stetig differenzierbar ($j = 0, \dots, s$); 3) die Koeffizienten der j -ten Ordnung in B_k gehören zu $C^{j+(s-\bar{s}-s_k)}$; 4)

Rang $\int_{K^*} B_0(y, \tau + \lambda v(y)) A_0^{-1}(y, \tau + \lambda v(y)) (E, \dots, \lambda^{s-1} E) d\lambda = \frac{1}{2} p s$;

$r(y)$ der normale Einheitsvektor in $y \in \partial V$; $\tau(r(y)) = 0$; $|\tau| \neq 0$; 5) $f_k(y) \in C^{\bar{s}-s}(\partial V)$. — Behauptung: Die Randwertaufgabe:

$$A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow y \in \partial V} B \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = f(y)$$

ist zurückführbar auf ein System von regulären Integralgleichungen (ähnliches Ergebnis für den Halbraum). — Methode: eine Verfeinerung der Methode von Levi-Sternberg, wobei die in einer früheren Abhandlung des Verf. konstruierte Fundamentalmatrix herangezogen wird [Ukrain. mat. Žurn. **3**, 3—38; 290—316 (1951)]. Anmerkung des Ref.: Da der Nachweis der Existenz der Fundamentalmatrix im Großen nicht erbracht wurde [vgl. Ukrain. mat. Žurn. **3**, 338 (1951)], muß man in dem „Hauptsatz“ noch die folgende Voraussetzung hinzufügen: $6^* V$ ist der Bereich, in dem die Fundamentalmatrix existiert. *K. Maurin.*

Morrey jr., Charles B.: Second order elliptic systems of differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 201—206 (1953).

The author considers the existence and regularity properties of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations in N dependent and r independent variables $x = (x^1, \dots, x^r)$ of the form

$$(1) \quad \int_{R^*} \sum_{\alpha, \beta} \left(a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} + b_{\alpha}^{\alpha} u^j + c_{\alpha}^{\alpha} \right) dx_{\alpha} - \int_{R^*} \left(\sum_{\alpha, j} c_{\alpha j}^{\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} + d_{\alpha} u^j + f_{\alpha} \right) dx$$

$i, j = 1, \dots, N$; $\alpha, \beta = 1, \dots, r$; $dx_{\alpha} = (\zeta_{\alpha} \cdot n) dS$; ζ_{α} — unit vector in the x^{α} direction and n — exterior normal; $a(x)$ — continuous on the closure \bar{G} of the bounded domain G ; $b(x), c(x), d(x)$ — bounded and measurable, $c(x), f(x)$ in L_2 on G . The solutions $u = (u^1, \dots, u^N)$ are required to be of class \mathfrak{P}_2 (For definition of \mathfrak{P}_2 see J. W. Calkin, this Zbl. **26**, 392) on domains interior to G and to satisfy (1) on „almost all cells“;

$$(2) \quad N \times N\text{-determinant} \left| \sum_{\alpha, \beta=1}^r a_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \right| \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \quad x \in G \quad (\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r, \text{real}).$$

There are also considered second order systems of the form

$$(3) \quad \sum_{i, \alpha, \beta} a_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = \sum_{\alpha, j} \left(c_{\alpha j}^{\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^{\alpha}} + d_{\alpha} u^j + f_{\alpha} \right)$$

in which the solutions u and their first generalized derivatives are of class \mathfrak{P}_2 on domains interior to G and u is required to satisfy (3) almost everywhere. — The results for (3) are as follows: 1. If a solution u of (3) is in L_2 on G and $\bar{G}_1 \subset G$, then

$$d_2(u, G_1) = \left\{ \int_{G_1} \sum_{i, \alpha, \beta} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leq K_1$$

where K_1 depends only on r, N , bounds for the coefficients c, d and bounds for the norms in L_2 of u and f , G_1 and its distance from G^* , the modulus of continuity of the tensor $a(x)$ on \bar{G} and a certain „ellipticity bound“ M for $a(x)$, M being ≥ 1 , the equality holding for Laplace's equation. — 2. If, in addition to the hypotheses above, there is assumed that f satisfies an integral growth condition of the form

$$(4) \quad L_2[f, C(P, r)] = \int_{C(P, r)} \left(\sum_{i=1}^N f_i^2 \right) dx \leq L \left(\frac{r}{\delta_P} \right)^{\nu-2+2\mu}, \quad 0 < \mu < 1, \quad 0 \leq r \leq \delta_P$$

on every sphere $C(P, r)$ with center at P and radius r , δ_P being the distance of P from the boundary G^* , then u is of class C_{μ}^{α} on G , i. e., is of class C^{α} on G and its derivatives satisfy uniform Hölder conditions with exponent μ on each $G_1 \subset G$ in which the Hölder coefficient depends only on the quantities in 1. and on μ and L . — 3. If, also, all the coefficients $a(x), c(x), d(x), f(x)$ are of class $C_{\mu}^{(n+2)}$ on G , $0 < \mu < 1$, $n \geq 0$, then u is of class $C_{\mu}^{(n+2)}$ on G , the bounds and Hölder coefficients for the derivatives of u on a $\bar{G}_1 \subset G$ depending only on the quantities in 1. and 2. and bounds and Hölder coefficients for $a(x)$ to $f(x)$ on \bar{G} . — For (1) the following results are obtained: — 4. If a solution u of (1) is in L_2 on G and $\bar{G}_1 \subset G$, then

$$d_1(u, G_1) = \left\{ \int_{G_1} \sum_{i, \alpha} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^{\alpha}} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leq K_2$$

where K_2 depends on the quantities in 1. and bounds for $b(x)$ and the norm of e in L_2 on G . — 5. If, also, f and e satisfy the integral growth condition (4), then the first derivatives of u satisfy similar growth conditions and u is of class $C_{\mu}^{(1)}$ on G , the Hölder coefficient for u on any $\bar{G}_1 \subset G$ depending only on the quantities in 4. and on u and L . — 6. If, also, $a(x), b(x), c(x)$ are of class $C_{\mu}^{(0)}$, $0 < \mu < 1$ on G , then u is of class C_{μ}^{α} on G , the Hölder coefficients for the first derivatives of u on any $\bar{G}_1 \subset G$ depending only on those for $a(x), b(x), c(x)$ on G and the quantities in 5. — 7. If, also, $a(x), b(x), c(x)$ are of class $C_{\mu}^{(n-1)}$ and $c(x), d(x)$ and $f(x)$

are of class $C_\mu^{(n)}$ on \bar{G} , $n \geq 0$, $0 < \mu < 1$, then u is of class $C_\mu^{(n+2)}$ on G , the bounds and Hölder coefficients for u and its derivatives on any $\bar{G}_1 \subset G$ depending only on these bounds for $a(x) - f(x)$ and on the other quantities in 6. — For strongly elliptic systems: $\sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \lambda_\alpha \lambda_\beta \xi^i \xi^j > 0$.

$x \in G$, $\lambda \neq 0$, $\xi \neq 0$ the results stated in 4.—7. hold for domains G_1 which intersect the boundary G^* of G provided that the part of G^* in G_1 is sufficiently regular, u vanishes on that part of G^* , and e and f satisfy their previous hypotheses on G_1 ; in 4. and 5. the given part of G^* is required to be only of class $C^{(1)}$, in 6. it is required to be of class C'_μ and in 7. to be of class $C_\mu^{(n+2)}$.

— For the strong elliptic system (1) with d_{ij} replaced by $d_{ij} + \lambda \delta_{ij}$ it is shown that if G is an arbitrary bounded domain, the λ -system (1) (with the most general coefficients allowed) has a unique solution u which coincides (in \mathbb{R}_2) on G^* with any given function u^* in \mathbb{R}_2 on G , provided λ is not in an isolated set of characteristic values which is bounded above; if λ is characteristic, the homogeneous system ($e = f = 0$) has a finite dimensional manifold of non-zero solutions which vanish on G^* . — If z is of class C'' and is the solution on G of a general elliptic second order system $\varphi_i(x, z, \partial z / \partial x^\alpha, \partial^2 z / \partial x^\alpha \partial x^\beta) = 0$ in which the φ_i are of class C' , then z is of class C''_μ on G for any μ , $0 < \mu < 1$ and its second derivatives are of class \mathbb{R}_2 on any interior domain; if, also, the φ_i are of class $C_\mu^{(n)}$, $n \geq 1$, $0 < \mu < 1$ then z is of class $C_\mu^{(n+2)}$ on G . — If z is of class C' and is the solution of a regular variational problem, i. e. is the solution of Haar's equations $\int_{R^*} \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} dx_\alpha = \int_R \frac{\partial f}{\partial z^i} dx$ in which f and its derivatives

with respect to the p_α are of class C' , then z is of class $C_\mu^{(1)}$ on G for any μ , $0 < \mu < 1$, and the first derivatives of z are of class \mathbb{R}_2 on any interior domain. If, also, f and the $\partial f / \partial p_\alpha$ are of class $C_\mu^{(n)}$, $n \geq 1$, then z is of class $C_\mu^{(n+1)}$ on G . Boundary value results analogous to those for systems (1) also hold. — The method of proof is but slightly sketched in Morrey's uncommonly keen and ingenious investigations. K. Maurin.

Tsuji, Masatsugu: On the exceptional set of a certain harmonic function in a unit sphere. J. math. Soc. Japan 5, 307—320 (1953).

Ein früheres Resultat über analytische Funktionen im Einheitskreis (dies. Zbl. 41, 406, vgl. auch A. Beurling, dies. Zbl. 23, 142) wird auf harmonische Funktionen in der Einheitskugel K ($x^2 + y^2 + z^2 < 1$) übertragen: Ist u in K harmonisch und $\int_K |\text{grad } u|^2 \frac{dx dy dz}{\sqrt{1-r^2}} < \infty$, so existieren für u überall auf $x^2 + y^2$

$z^2 = 1$ bis auf eine Menge von der Kapazität 0 endliche Winkelgrenzwerte. Kapazität ist hier die Newtonsche Kapazität im Sinne von de la Vallée-Poussin. Dies ist ein Spezialfall eines sehr allgemeinen Satzes von J. Deny (dies. Zbl. 34, 362) über Funktionen der Klasse (BL). A. Pfluger.

Tsuji, Masatsugu: On criteria for the regularity of Dirichlet problem. J. math. Soc. Japan 5, 321—344 (1953).

Verf. leitet zunächst im R^3 aus dem Wiener'schen Regularitätskriterium $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\lambda^n} < \infty \right)$ weitere hinreichende Kriterien ab, wobei er sich auf folgende Abschätzungen stützt: $v \leq (9\pi/2) \gamma^3$, $\omega \leq 4\pi \gamma^2$, γ ist Kapazität einer beschränkten abgeschlossenen Menge E , v ihr Volumen und ω der Inhalt ihrer Projektion in eine Ebene. Dann sind $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{\lambda^n} < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n}{\lambda^n} = \infty$, bzw. in Integralform $\int_0^1 \frac{v(r)}{r^4} dr = \infty$, $\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r^3} dr = \infty$ hinreichende Kriterien für die Regularität eines Randpunktes P_0 von D . Wie bei Wiener ist $0 < \lambda < 1$, γ_n , bzw. v_n die Kapazität bzw. das Volumen der nicht zu D gehörigen Punkte der Kugelschale $\lambda^{n+1} \leq \overline{P P_0} < \lambda^n$, $\omega(r)$ das Volumen der nicht zu D gehörigen Punkte der Kugel $P_0 P < r$. Hieraus folgt z. B. das Kriterium von Raynor. Weiterhin wird folgendes notwendige und hinreichende Kriterium für die Regularität der Spitze eines einspringenden Dornes bewiesen. Achse des Dornes sei die z -Achse, $y = e^{-\varphi(x)}$ ($\varphi(x) > 0$, stetig, abnehmend, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \infty$) die Erzeugende. Dann ist $\int_0^1 \frac{dx}{x \varphi(x)} = \infty$ notwendig und hinreichend für die Regularität der Spitze des Dornes. Daraus folgen die beiden Lebesgueschen Kriterien. In der Ebene gibt es für die analogen Sätze

bekanntlich einige Abweichungen, wegen des Vorzeichenwechsels und des asymptotischen Verhaltens des Logarithmus. Die Kapazität γ ist so normiert, daß der Wert des Gleichgewichtspotentials der Einheitsmasse auf der Menge den Wert $\log(1/\gamma)$ besitzt. Das Wiener'sche Kriterium $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{\lambda^n} = \infty$ bzw. die ihm gleichwertige Formulierung $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\log 1/\gamma^n} = \infty$ wird ausführlich bewiesen. (Bemerkung: Ein Beweis des Ref. für die letztere Formel findet sich in der Arbeit dies. Zbl. 10, 356, insbesondere S. 541.) Im übrigen gilt sonst Analoges wie im Raum, abgesehen vom Dorn, der hier stets eine reguläre Spitze hat. *G. Tautz.*

Beckert, Herbert: Eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktionen erster und zweiter Art. *Math. Nachr.* 10, 55—61 (1953).

This note is the result of a further study of integral representation (Kerndarstellung) of a function by its partial derivatives of the first order (this Zbl. 43, 96). Considering a two dimensional domain D with boundary S , D being simply connected and of class B in the sense of Lichtenstein, denoting by G^I and G^{II} the usual Green functions of the classical Dirichlet and Neumann problems, it is easily established that the following relations hold

$$w(\xi, \eta) = \iint_D \left\{ \frac{\partial G^{II}}{\partial y}(x, y; \xi, \eta) q(x, y) + \frac{\partial G^{II}}{\partial x}(x, y; \xi, \eta) p(x, y) + \frac{2\pi}{F} w(x, y) \right\} dx dy,$$

$$0 = \iint_D \left\{ -\frac{\partial G^I}{\partial x}(x, y; \xi, \eta) q(x, y) + \frac{\partial G^I}{\partial y}(x, y; \xi, \eta) p(x, y) \right\} dx dy,$$

where $p = \partial w / \partial x$, $q = \partial w / \partial y$, $F = \iint_D dx dy$. The main results are: (1) that these integral relations are valid provided w satisfies in $D + S$ a Lipschitz condition; (2) that, conversely, if p and q are measurable, bounded and satisfy the second equation, then the first one determines a continuous function w which satisfies in $D + S$ a Lipschitz condition and such that $\partial w / \partial x = p$, $\partial w / \partial y = q$ hold everywhere. The author concludes with some indications about a generalization of his results to the case of derivatives of higher order. A remark is made about an a priori characterization of the polar singularities of the kernels involved in the integrals. *C. Racine.*

Zitarosa, Antonio: Su un problema misto di Dirichlet-Neumann. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 257—260 (1953).

Viene trattato il problema della determinazione di una funzione armonica in un angolo diedro essendo assegnati su un semipiano i valori assunti dalla funzione e sull'altro semipiano i valori assunti dalla derivata normale. Il problema analogo nel piano è stato studiato da A. Ghizzetti [*Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 5, 131—168 (1946)]. L'A. ottiene, col metodo delle trasformate, un teorema di unicità, ed un'espressione integrale della soluzione supposta esistente. Dà inoltre un teorema di esistenza nel caso che l'angolo diedro sia un semispazio. *C. Pucci.*

Fichera, Gaetano: A proposito delle mie note „Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme“. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 8, 109—114 (1953).

This paper is devoted to the polemical remarks of G. Fichera on the review of his work (this Zbl. 43, 101) by Z. Nehari in *Math. Rev.* 13, 931 (1952). *J. Gorski.*

● **Gjunter, N. M.:** Potentialtheorie und ihre Anwendung auf die fundamentalen Probleme der mathematischen Physik. Unter Redaktion von V. I. Smirnov und Ch. L. Smolickij. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 416 S. R. 13,15 [Russisch].

Translation of the author's french book with the same title (this Zbl. 9, 113) with some corrections and new material contributed by Ch. L. Smolickij, a biography of him by V. I. Smirnov and S. L. Sobolev, and a list of his papers. *L. Hörmander.*

Nocilla, Silvio: Sul problema della piastra a contorno epiceloidale incastrata. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* 87, 79—89 (1953).

La caratterizzazione degli autovalori e delle autofunzioni relativi al problema delle vibrazioni di una piastra a contorno epiceloidale incastrato comporta la

ricerca di soluzioni dell'equazione differenziale (1) $\Delta_4 w - \lambda^4 w = 0$, con le condizioni al contorno $w = 0$ e $\partial w / \partial n = 0$. Se u e v sono rispettivamente soluzioni delle equazioni $\Delta_2 u + \lambda^2 u = 0$ e $\Delta_2 v - \lambda^2 v = 0$, della (1) è soluzione $w = u + v$. L'A. definisce delle opportune serie uniformemente convergenti che rappresentano soluzioni dell'equazione differenziale $\Delta_2 v - \lambda^2 v = 0$ del problema in questione. La ricerca porta alla considerazione di un certo numero di determinanti di ordine infinito, di cui si dimostra la convergenza. Per quanto riguarda l'equazione $\Delta_2 u + \lambda^2 u = 0$ si tengono presenti le „funzioni epicyclodali“ introdotte da Agostinelli e che ad essa soddisfano. Si caratterizzano con gli autovalori e le autofunzioni voluti.

A. Pignedoli.

Zgenti, V. S.: Eine Anwendung der Funktionalanalysis in der Theorie der dünnen elastischen Schalen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 217—219 (1953) [Russisch].

Let the middle surface of the bent shell be the surface $z = f(x, y)$, where f has continuous second partial derivatives in a domain G_0 with boundary L_0 and write, in symbolic form, the equations of equilibrium of the shell in the form $AU = q$ which is a system of three second-order partial differential equations for the displacement vector $U = (u, v, w)$ of the shell. The boundary-value problem considered consists of this system of partial differential equations in G_0 plus the boundary conditions $u = v = w = \partial w / \partial r = 0$ on L_0 . The existence of a solution is shown by proving that, in a suitable Hilbert space whose elements are „displacement vectors“ satisfying the boundary conditions, the operator A is positive definite. An imbedding theorem of S. L. Sobolev [Some applications of functional analysis in mathematical physics, Izdat. Leningrad. Gos. Univ., Leningrad 1950 (in Russian)] guarantees the uniform convergence, in $G_0 + L_0$, of a minimizing sequence of the equivalent variational problem to the solution of the differential problem.

J. B. Diaz (R.).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Mendes, Marcel: Systèmes d'équations intégrales et figures dérivées des ellipsoïdes hétérogènes en rotation. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 32, 335—386 (1953).

In Teil I wird ohne den üblichen Rückgang auf eine einzige Integralgleichung die Theorie der Systeme linearer Integralgleichungen

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{p=1}^r \int_a^b K_{ip}(x, s) \varphi_p(s) ds + f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

im Anschluß an E. Schmidt ausführlich entwickelt, sowohl für unsymmetrische Kerne als auch unter der Symmetriebedingung $K_{ij}(x, y) = K_{ji}(y, x)$, wobei besonderer Nachdruck auf die Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionsgruppen der einzelnen Kerne gelegt wird. — Teil II behandelt als Einleitung zu den beiden Schlußteilen kurz die Gleichgewichtsfiguren einer Flüssigkeit in der Nachbarschaft eines Rotationsellipsoids, das mit konstanter Geschwindigkeit um seine Achse rotiert, und bestätigt das bekannte Ergebnis von Poincaré. — Teil III liefert eine Anwendung auf den Fall von n konfokalen Rotationsellipsoiden mit von außen nach innen wachsender Schichtdicke und erhält die schon in einer früheren Arbeit des Verf. [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 24, 51—72 (1945)] nach der Poincaréschen Methode gefundenen Resultate. — Teil IV endlich erweitert die Ergebnisse auf den Fall, daß die n Rotationsellipsoide homothetisch und konzentrisch sind, also das i -te Ellipsoid die Gleichung $x^2/\lambda_i^2 a^2 + (y^2 + z^2)/\lambda_i^2 b^2 - 1 = 0$ besitzt. Umfangreiche Zwischenrechnungen sind hier z. T. unterdrückt. — Ein Anhang bringt einige Druckfehlerberichtigungen zu der oben erwähnten früheren Arbeit.

R. Iglish.

Schmeidler, Werner: Algebraische Integralgleichungen. II. Math. Nachr. 10, 247—255 (1953).

§ 1: Zu dem in Teil I (dies. Zbl. 47, 101) abgeleiteten Existenzsatz (vgl. III des o. a. Referats) wird eine Zusatzvoraussetzung für dessen Gültigkeit formuliert, die die damalige Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes erlaubt; durch ein von U. Pirl angegebenes Gegenbeispiel war eine Lücke im Beweis aufgedeckt worden. Diese Zusatzvoraussetzung schließt den sog. Verzweigungsfall aus. — In Ausdehnung des Satzes von Jentzsch über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern wird in § 2 die Integralgleichung $(1) \mu y^n(s) = \mathfrak{L}[y] + f(s) \ (f(s) > 0)$ betrachtet mit

$$\mathfrak{L}[y] = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p \leq n} \int_0^1 \dots \int_0^1 L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(s; t_1, \dots, t_p) y^{\alpha_1}(t_1) \dots y^{\alpha_p}(t_p) dt_1 \dots dt_p = \sum_{m=1}^n \mathfrak{L}_m[y]$$

unter der Bedingung $L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} > 0$; dabei bedeutet also $\mathfrak{L}_m[y]$ die Zusammenfassung aller Glieder genau m -ten Grades in $\mathfrak{L}[y]$. Unter Heranziehung eines Satzes von D. Morgens tern (Diss. Berlin 1952) wird gezeigt: Die Integralgleichung $(2) \mu y^n(s) = \mathfrak{L}_n[y]$ besitzt einen positiven Eigenwert μ_0 und eine positive Eigenfunktion. Mit den Methoden der Arbeit I folgt weiter: Für $\mu > \mu_0$ und $f(s) > 0$ besitzt (1) eine positive Lösung. Für $|\mu| = \mu_0$, $\mu \neq \mu_0$ hat (2) keine von Null verschiedene Lösung. — Es folgt eine weitergehende Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf eine etwas erweiterte Klasse algebraischer Integralgleichungen, die eine interessante Fassung des Begriffes „Eigenwert“ für algebraische Integralgleichungen gestattet. Im Rahmen dieses Referates könnte dies kaum kürzer geschildert werden als in der Arbeit selbst.

R. Iglisch.

Sato, Tokui: Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Compositio math. 11, 271—290 (1953).

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung bekannte Sätze werden übertragen auf die nichtlineare Volterrasche Integralgleichung $u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t)) dt$, und zwar der Existenzsatz (unter Verwendung des Fixpunktsatzes), Fortsetzbarkeit der Lösungen im vorgegebenen Grundgebiet, Vergleich mit Lösungen anderer Integralgleichungen (Einschließungssätze), Maximallösung, Zusatzbedingungen zur Sicherung der Eindeutigkeit der Lösung, Stetigkeit und Differenzierbarkeit nach einem in $f(x, \lambda)$, $a(\lambda)$ und $K(x, t, u(t), \lambda)$ auftretenden Parameter λ . — Auf ein System von n derartigen Integralgleichungen wird der Satz von H. Kneser über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das keiner Lipschitzbedingung genügt [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, phys.-math. Kl. 1923, 171—174 (1923)], verallgemeinert.

R. Iglisch.

Satō, Tokui: Sur l'équation intégrale $xu(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t)) dt$. J. math. Soc. Japan 5, 145—153 (1953).

In der Volterraschen Integralgleichung $(1) xu(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t)) dt$ sei $f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v$, $K(x, t, u) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} b_{ijk} x^i t^j u^k$ mit von Null verschiedenen Konvergenzradien. Der formale Ansatz $(2) u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ führt auf den Koeffizientenvergleich $c_0 = a_1 + K(0, 0, c_0)$, $(3) (m+1 - \lambda) c_m = P_m(c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$ für $m \geq 1$, wo P_m ein Polynom in c_0, c_1, \dots, c_{m-1} ist. Dabei ist $\lambda = K_u(0, 0, c_0)$. Setzt man noch $n = 1 + [\lambda]$, so gilt das Theorem 1: Ist (2) eine formale Lösung von (1), so hat sie einen positiven Konvergenzradius und ist wirklich eine Lösung von (1), und zwar mit der Eigenschaft $u(x) = (c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}) + O(x^n)$. — Der Koeffizientenvergleich (3) läßt sich nur durchführen, wenn $\lambda - 1 \neq m$ ist. Daraus entnimmt man das Theorem 2: Ist λ keine positive ganze Zahl, so gibt es eine eindeutige formale Lösung von (1); im Falle eines positiven ganzen λ gibt es entweder überhaupt keine formale Lösung von (1) oder unendlich viele. —

Nun wird die homogene Gleichung $(4) xu(x) = \int_0^x K(x, t, u(t)) dt$ mit $K(x, t, 0) = 0$, $K_u(0, 0, 0) = \lambda$ betrachtet; letztere Bedingungen bedeuten keine Einschränkung, wenn man evtl. $u(x) = w(x) + q(x)$ setzt, wo $q(x)$ eine Lösung von (1) ist. Theorem 3: Ist $\lambda - 1$ nicht 0 oder eine positive ganze Zahl oder eine negative rationale Zahl, so besitzt (4) eine einzige formale Lösung der Gestalt, $(5) u(x) = \sum_{j,k} p_{jk} x^j (C x^{2-k})^{k-1}$, $p_{00} = 1$ mit einer willkürlichen Konstanten C . — Unter dem Integrationsweg Γ_x werde der den Nullpunkt mit

dem Punkt $x = s e^{i\theta}$ verbindende Weg (Spirale) verstanden, dessen laufender Punkt $\xi = \sigma e^{i\omega}$ durch $0 < \sigma \leq s$, $\omega = \theta + \alpha \log(\sigma/s)$ gegeben ist. Ist $\lambda - 1 = \mu + i\nu$, so geht $\xi^{\lambda-1} \rightarrow 0$, wenn $\mu - \nu \alpha > 0$ ist, was durch Wahl von α erreicht werden kann. Theorem 4: Wenn $\lambda - 1$ weder negativ noch 0 ist und (4) eine formale Lösung (5) zuläßt, so ist (5) für genügend kleine $|x|$ konvergent und löst (4), wenn man I_r als Integrationsweg nimmt.

R. Iglisch.

Obrechhoff (Obreškov), N.: Über die Lösungen gewisser singulärer Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 1117—1120 (1953) [Russisch].

L'équation intégrale (1) $f(x) = \int_0^\infty g(xt) q(t) dt$, avec $g(x) = (2x)^\delta W_{0,m}(2x)$.

$W_{0,m}(x) = \frac{e^{-x/2} x^{-\delta}}{\Gamma(m + \frac{1}{2})} \int_0^\infty t^\delta (x+t)^\delta e^{-t} dt$ (fonction de Whittaker). est résolue par

l'A. en montrant que, si $q(x)$ est intégrable dans $[0, x]$, $x > 0$, et (1) convergente pour $x = c > 0$, il existe une suite de fonctions $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., déterminée par la formule de récurrence $f_n(x) = f'_{n-1}(x) - (2\delta/x) f'_{n-1}(x)$, $n \geq 1$.

Dans ces conditions, pour tout $x = \alpha > 0$ tel que $\int_x^\infty |q(t) - q(\alpha)| dt = o(x - \alpha)$,

$x \rightarrow \alpha$ on a $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{4^\delta \sqrt{\pi} n^{\delta-1} \alpha^{2n+1}} f_n(2n/\alpha)$. S. Vasilache.

● **McLachlan, N. W.:** Complex variable theory and transform calculus. 2. rev. ed. Cambridge: Cambridge University Press 1953. XI + 388 p. 55 s net.

Während in der ersten Auflage dieses 1939 unter dem Titel „Complex Variable and Operational Calculus with Technical Applications“ erschienenen Buches (Cambridge, dies. Zbl. 21, 229) der Ansatz der Lösung einer (gewöhnlichen oder partiellen) Differentialgleichung als komplexes Integral im Vordergrund stand, wird jetzt nach der heute allgemein üblich gewordenen Methode die Differentialgleichung zunächst der Laplace-Transformation unterworfen und dann aus der Lösung der so erhaltenen „Bildgleichung“ die Lösung des ursprünglichen Problems durch das komplexe Umkehrintegral gewonnen. Das Hauptanliegen des Buches besteht darin, den Techniker mit den funktionentheoretischen Methoden bekannt zu machen, die eine Auswertung dieses Integrals, meist in Form einer konvergenten oder asymptotischen Reihe, gestatten. Zu diesem Zweck ist eine ausführliche Darstellung (131 Seiten) derjenigen Teile der komplexen Funktionentheorie vorangestellt, die hierfür benötigt werden. Gegenüber der ersten Auflage hat das Buch erheblich an mathematischer Strenge gewonnen. Es enthält eine Fülle von interessanten Beispielen aus technischen Gebieten wie: elektrische Schwingungskreise, Aerodynamik, Elastizitätstheorie, Rundfunk- und Fernsehempfang, elektrische Kabel, Wellenfilter, Mikrophone, Lautsprecher, Wärmeleitung. G. Doetsch.

Doetsch, Gustav: Asymptotische Entwicklungen und Laplace-Transformation. Revista mat. Hisp.-Amer. 93, 5—60 (1953) [Spanisch].

Nach den Angaben des Verf. sei wegen des Inhaltes der §§ 11—13 vorliegender Arbeit auf seine früheren Abhh. verwiesen (dies. Zbl. 43, 107); der folgende Bericht gilt den §§ 4, 7—10, deren Inhalt noch nicht anderswo veröffentlicht war. Unter Abelscher Asymptotik (A. As.) versteht Verf. (§ 4) jedes Verfahren as. Entwicklung, das sich auf einen A. Satz über eine funktionale Abbildung gründet. Er beschreibt den Musterfall der A. As., in dem sich die as. Entw. des Urbildes $F(t)$ gliedweise in diejenige des Bildes $f(s)$ übertragen läßt. Er verwirklicht sich an as. Entw. nach Potenzen, die $F(t)$ für $t \rightarrow 0$ im Reellen oder in einem Winkelraum analytischen Verhaltens zuläßt. Beispiele: Zylinderfunktion $K_\alpha(s)$, unvollständige Gammafunktion $\gamma(x, s)$, Besselsche Funktion $J_\alpha(z)$ für nicht-reelle $z = is$. Um statt reiner Potenzen allgemeinere Entwicklungsbestandteile einzubeziehen, stellt Verf. in § 7 einen weiteren A. Satz auf: Das Laplacesche Bild $\mathfrak{L}\{F\} = f(s)$ von $F(t)$ sei vorhanden und $F(t) \sim c t^\lambda L(t)$ für $t \rightarrow 0$ ($\text{Re } \lambda > -1$), worin $L(t) = \log(t^{-1})$, $\log \log(t^{-1})$, ... oder gleich Produkten dieser Ausdrücke; dann ist $f(s) \sim c \Gamma(\lambda + 1) s^{-\lambda-1} L(s^{-1})$ für s (reell)

$\rightarrow \infty$. — A. As.: Ist $F(t) \approx -\log t \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu t^{\lambda_\nu} (-1 < \text{Re } \lambda_0 < \dots)$ für $t \rightarrow 0$, dann gilt $f(s) \approx \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu \Gamma(\lambda_\nu + 1) s^{-\lambda_\nu-1} [\log s - \Psi(\lambda_\nu + 1)]$ für s (reell) $\rightarrow \infty$ mit $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. —

Aufstellung weitergehender A. As. en zunächst noch durch Unkenntnis der \mathfrak{L} -Bilder von $t^\lambda \log \log t$, $t^\lambda \log^2 t$ usw. erschwert. — Bei einem anderen Verhalten von $F(t)$, nämlich $F(t) \sim c e^{-1/t} t^\lambda$ für $t \rightarrow 0$, gewinnt Verf. einen neuen A. Satz, aus dem er eine As. herleitet, die nach

Produkten von Potenzen und K-Funktionen (s. o.) fortschreitet. — § 8. Laplaces „Funktionen großer Zahlen“, Verallgemeinerung $A = \int_a^b e^{h(x)} g(x) dx$ des \mathfrak{L} -Integrals. Einfacher als A. Haar in Math. Ann. **96**, 98–104 (1926), kommt Verf. bei A zu folgender As.: $g(x)$, $h(x)$ seien in $x = a$ ganz. In $a \leq x \leq b$ sei $h(a) - h(x)$ reell und ≥ 0 , ferner $h'(a) = \dots = h^{(m-1)}(a) = 0$, $h^{(m)}(a) \neq 0$ ($m \geq 1$). Wenn man dann in A die Veränderliche $t = [h(a) - h(x)]^{1/m} = (x - a) \cdot [cm + cm+1(x - a) + \dots]^{1/m}$ einführen kann, dann gilt für $s \rightarrow \infty$ in $|\arg s| \leq \psi < \pi/2$ die as. Entw.

$$A \approx \frac{1}{m} e^{h(a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{m}\right) s^{-(\nu+1)/m} \text{ mit } a_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left[g(x) \left(\frac{x-a}{(h(a)-h(x))^{1/m}} \right)^{\nu+1} \right]_{x=a}.$$

Erfüllt $h(a) - h(x)$ die obige Bedingung nicht, so läßt sich A doch manchmal dem vorigen Satze durch das Sattelpunktsverfahren anpassen; nach kritischen Bemerkungen über seinen Gebrauch im angewandten Schrifttum gibt Verf. das Beispiel der Fresnelschen Integrale,

die dem einen $k(z) = \int_0^z \exp(i x^2) dx$ entstammen. Ergebnis:

$$k(z) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{\pi i/4} - \frac{1}{2} i \exp(i z^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} (2\nu)!}{\nu! 4^{\nu}} i^{\nu} z^{-2\nu-1} \text{ für } z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi/4.$$

War bisher der Weg der Integration \mathfrak{L} die reelle Achse oder ein Strahl in einem Winkelraum, so wendet sich Verf. in § 9 Linienzügen zu, und zwar im einfachsten Falle einer Strecke $t_{\alpha} t_{\beta}$ der komplexen Ebene. Die ihr zugehörige as. Entw. besitzt zwei kennzeichnende Gebilde, die Halbebene ihrer Gültigkeit mit der inneren Normale $\bar{t}_{\alpha} t_{\beta}$ und das „Wertigkeitsbild“, den Inbegriff zweier Kreise durch O mit dem Durchmesser $|t_{\alpha}|$, deren Mitten in den Richtungen $-\arg t_{\alpha}$ und $-\arg t_{\alpha} + \pi$ liegen. Übergang zu zwei nicht in eine Gerade fallenden Strecken, schließlich zu einem Vieleck oder zu einer nach Cauchys Satze durch ein Vieleck ersetzbaren Kurve. Anwendung (§ 10): Abwandlung eines reellen Weges zur Vergrößerung des Gültigkeitsgebietes einer asymptotischen Entwicklung durch Überlagerung zweier solcher. Beispiel:

$$q(z) = \int_0^z \exp(i z x^2) q(x) dx \quad (q > 0), \quad z \text{ reell. Zusammenhang mit einem weniger allgemeinen}$$

Ergebnisse von A. Wintner (dies. Zbl. **9**, 158).

L. Koschmieder.

Mikusinski, J. G.: On the Paley-Wiener theorem. Studia math. **13**, 287—295 (1953).

Secondo un noto teorema di Paley e Wiener (Fourier transforms in the complex domain, New York 1934, questo Zbl. **11**, 16), ogni funzione intera di tipo esponenziale, di classe L_2 su un asse coordinato, può esser rappresentata mediante un integrale di Fourier; nello stesso ordine di idee, l'A. dimostra quanto segue. Se: (1) $F(z)$ è analitica nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x + i y) = F(i y)$ per quasi ogni y reale, (3) $\exp(-k z) \cdot F(z)$ è limitata nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$, (4) $F(i y) \in L_p(-\infty, +\infty)$, k reale, $1 \leq p \leq 2$; allora: (a) se $p = 1$, $f(t) =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i y t) \cdot F(i y) dy \text{ è continua e limitata per } -k \leq t, \text{ nulla per } t < -k, \text{ (b) se } 1 < p \leq 2,$$

$$f(t) = \text{l.i.m.}_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{+\omega} \exp(i y t) \cdot F(i y) dy \text{ (d'ordine } q, 1/p + 1/q = 1) \text{ è di classe } L_q(-\infty, +\infty)$$

e quasi ovunque nulla per $t \leq -k$. (c) $F(z) = \int_{-k}^{+\infty} \exp(-z t) \cdot f(t) dt$ per $\operatorname{Re} z > 0$, l'integrale convergendo assolutamente. — Da questo teorema si deduce facilmente quello citato di Paley-Wiener, come caso particolare; inoltre di esso vengono indicati alcuni perfezionamenti, ottenuti per mezzo di due lemmi di Pione e di Levinson.

F. Bertolini.

Fox, Charles: The inversion of convolution transforms by differential operators. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 880—887 (1953).

Die von I. I. Hirschman jr. und D. V. Widder (dies. Zbl. **32**, 26) angegebene Umkehrung der Faltungstransformation

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) q(t) dt \quad \text{mit} \quad G(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st}}{E(s)} ds, \quad E(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s^2 a_n^{-2}),$$

$\sum a_n^{-2} < \infty$ durch einen Differentialoperator: $\varphi(x) = E(D) f(x)$ wird verallgemeinert auf den Fall, daß der Faktor e^{st} in dem Integral für $G(t)$ durch einen „Fourier-Kern“, insbesondere durch einen aus Besselfunktionen gebildeten

Kern ersetzt wird. Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{H}^{1/2} J_v(u x)$ der Differentialgleichung $\{D^2 + [u^2 - (v^2 - 1/4)/x^2]\} y = 0$ genügt, ergibt sich, daß die Transformation

$$f(x) = \int_0^\infty K(x, v) (x v)^{1/2} \varphi(v) dv \quad \text{mit} \quad K(x, v) = \int_0^\infty \frac{u J_v(x u) J_v(u v)}{E(u)} du$$

Operator $\varphi(x) = \prod_1^\infty \left\{ 1 - \frac{1}{a_n^2} \left(D^2 - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) \right\} f(x)$ umgekehrt wird. *G. Doetsch.*

Bose, N. N.: On certain formulae in operational calculus. *Bull. Calcutta math. Soc.* **45**, 95—100 (1953).

Starting from a formula of Goldstein, the author derives extension by application to several special functions, including Bessel functions. These equations lead up to several new relations in operational calculus, of which known ones are shown to be special cases. Finally a number of contour integrals is considered and evaluated by application of the above relations. *M. J. O. Strutt.*

Bhatnagar, K. P.: On certain theorems on self-reciprocal functions. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **39**, 42—69 (1953).

The author starts from a kernel, expressed by a doubly infinite integral containing the product of three Bessel functions. This kernel is then shown to play the role of a transform for certain self-reciprocal functions. Sixteen theorems concerning these functions are derived and simple examples for their applications are given. *M. J. O. Strutt.*

Włodarski, L.: Une remarque sur une classe de fonctions exponentielles du calcul opérationnel. *Studia math.* **13**, 188—189 (1953).

Servendosi di un teorema di E. L. Post [*Trans. Amer. math. Soc.* **32**, 723—781 (1930)], l'A. dimostra che la funzione

$$f(t, \lambda; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(zt - z^\alpha \lambda) dz \quad (\lambda, t > 0; 0 < \alpha < 1)$$

è non negativa; J. G. Mikusiński aveva già dimostrato che essa è reale e continua (questo *Zbl.* **44**, 126). *F. Bertolini.*

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Kaplansky, Irving: Infinite-dimensional quadratic forms admitting composition. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 956—960 (1953).

Es sei $g(x)$ eine quadratische Form in endlich oder unendlich vielen Variablen mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper k , welche folgende drei Eigenschaften hat: 1) Aus $g(x) = 0$ und $g(x + y) = g(x) + g(y) = 0$ für einen Vektor x und alle Vektoren y folgt $x = 0$. 2) Es gibt eine Komposition $g(x)g(y) = g(z)$, wobei die Komponenten von z Bilinearformen in den Komponenten von x und y sind. 3) Es gibt einen Vektor y_0 , so daß $z(x, y_0) = z(y_0, x) = x$ für alle x ist. Durch die Komposition wird eine i. a. nicht assoziative Algebra A/k mit Einselement definiert, für welche das Folgende gilt: 1) A ist eine alternative Algebra. 2) A hat einen der Ränge 1, 2, 4, 8 über k , oder k hat die Charakteristik 2 und A ist eine rein inseparable Körpererweiterung von k . 3) A ist einfach oder die direkte Summe zweier einfacher Algebren. 4) A besitzt eine Involution $x \rightarrow x^*$, und es gilt $g(x) = x^* x$. Es gibt demnach auch bei Zulassung von unendlich vielen Variablen keine anderen Kompositionen quadratischer Formen als die bereits von A. Hurwitz entdeckten. *M. Eichler.*

Halperin, Israel: Convex sets in linear topological spaces. *Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser.* **47**, 1—6 (1953).

The following separation and support properties of convex sets in a real linear topological space are proved (assuming that, in the space, $x + y$ is conti-

uous in x for fixed y , and that $c \cdot x$ is continuous in the pair (c, x) : Any two non-empty disjoint subsets of which one is open can be separated by a hyperplane; at any boundary point of a convex set with inner points there exists a supporting hyperplane (Th. 1 and Cor. 2). A non-empty linear set, containing no inner points of a convex set having inner points, is contained in a hyperplane on one side of which lies the convex set (Th. 2). When the space is locally convex, a non-empty closed convex set can be separated by a hyperplane from some open neighbourhood of any point not in the convex set; hence the closed convex set is the intersection of half spaces which contain it. (Th. 3 and Cor.). As the author notes at the conclusion, the main result (Th. 1) has been proved under even weaker hypothesis regarding the linear space [namely continuity of $c \cdot x$ being assumed only in each of the factors c, x] by V. L. Klee (this Zbl. 42, 302).

V. S. Krishnan.

Sz.-Nagy (S.-Nad'), Bela: Über konjugierte Kegel im Hilbertschen Raum. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 167—168 (1953) [Russisch].

Für den folgenden von Ja. A. Taganlićkić kürzlich veröffentlichten Satz (dies. Zbl. 46, 333) hatte Verf. bereits früher (dies. Zbl. 37, 205) einen einfachen Beweis gegeben, der hier ausführlich wiedergegeben wird: Ist K ein stark abgeschlossener konvexer Kegel im reellen Hilbertschen Raum H mit der Spitze in O , ist R die Menge der $r \in H$ mit $(r, k) \geq 0$ für $r \in R$ und $k \in K$, so gehört jedes Element a mit $(r, a) \geq 0$ für alle $r \in R$ dem Kegel K an.

G. Köthe.

Kostjućenko, A. und A. Skoroehod: Über einen Satz von N. K. Bari. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 5 (57), 165—166 (1953) [Russisch].

Beweis des folgenden Satzes von N. K. Bari, Mat. Sbornik, n. Ser. 14, 51—108 (1944). Sind $\{q_n\}$ und $\{p_n\}$ Orthonormalsysteme im Hilbertraum und gilt $\sum \|q_k - p_k\|^2 < \infty$, so sind beide Systeme gleichzeitig vollständig.

K. Zeller.

Mazur, S. et W. Orlicz: Sur les espaces métriques linéaires. II. Studia math. 43, 137—179 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 36, 78.) Es sei X ein B^* -Raum mit der Norm $\|x\|$. Jedes bezüglich der Norm stetige lineare Funktional $\xi(x)$ ist stetig bezüglich einer Halbnorm $\|x\|_i = \sup_{i=1, \dots, m} |x_i|$.

x_1, x_2, \dots eine erzeugende Folge von Halbnormen für X . Für eine Anzahl von Beispielen werden konkrete Darstellungen der $\xi(x)$ gegeben. Die für B -Räume bekannten Sätze über trennende Hyperebenen konvexer Teilmengen usw. werden auf die B^* -Räume übertragen. Es sei bemerkt, daß diese Sätze inzwischen eine zum Teil noch allgemeinere Formulierung in dem Buche von N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* (Paris 1953, dies. Zbl. 50, 107) gefunden haben. In der vorliegenden Arbeit werden sie hergeleitet aus folgendem Satz (*): Es sei X ein linearer Raum, $\omega(x)$ ein Funktional auf X mit $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$, $\omega(t x) = t \omega(x)$ für $t \geq 0$, es sei ferner $a(\tau)$ eine Abbildung einer Menge T in den Raum X und $c(\tau)$ eine endliche reelle Funktion auf T . Damit eine additive und homogene Funktion $\xi(x)$ auf X existiert mit $\xi(x) \leq \omega(x)$ für $x \in X$, ferner $c(\tau) \leq \xi(a(\tau))$ für $\tau \in T$, ist notwendig und hinreichend, daß $\sum_{k=1}^n t_k c(\tau_k) \leq \omega\left(\sum_{k=1}^n t_k a(\tau_k)\right)$ gilt für alle $\tau_1, \dots, \tau_n \in T$ und beliebige

nichtnegative t_1, \dots, t_n . Auch verschiedene Sätze über die Fortsetzung positiver linearer Funktionale werden mit (*) bewiesen, auch für den Fall, daß der die Ordnung in X definierende Kegel S keinen inneren Punkt besitzt. So gilt: Sei X ein B^* -Raum; ist $\xi_0(x)$ in einem linearen Teilraum $R \subset X$ erklärt, so hat $\xi_0(x)$ dann und nur dann eine positive lineare Fortsetzung $\xi(x)$ auf ganz X , wenn aus $x_n \rightarrow x_0 \rightarrow 0$ für $x_n \in R$ und $x_n \geq 0$ stets $\lim \xi_0(x_n) \geq 0$ folgt. Notwendig und hinreichend für die Darstellbarkeit eines linearen Funktionals auf X als Differenz zweier positiver Funktionale ist, daß aus $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ und $a_n \geq x_n \geq b_n$ stets $\xi(x_n) \rightarrow 0$ folgt. Im konjugierten Raum Ξ zum B^* -Raum X wird abweichend vom Üblichen die Konvergenz $\xi_n \rightarrow \xi_0$ als gleichmäßige Konvergenz auf einer geeigneten Nullumgebung von X erklärt. Ist X nicht normiert, so ist Ξ von I. Kategorie. Die in diesem Sinn stetigen Abbildungen $\Phi(\xi)$ von Ξ in $H = Y'$ sind diejenigen, die beschränkte Mengen in ebensolche überführen. Ist Ξ der konjugierte Raum eines B^* -Raumes, Y ein F -Raum und Φ_n eine Folge linearer Abbildungen von Ξ in Y , die in jedem Punkt $\xi \in \Xi$ beschränkt sind und in einer in Ξ dichten Menge konvergieren, so konvergiert Φ_n in ganz Ξ gegen eine lineare Abbildung.

Es folgen Resultate über die Lösbarkeit von Ungleichungen. X, Y seien normierte Räume, $y = F(x)$ sei eine stetige Abbildung von X in Y , $\xi = \Phi(\eta)$ die adjungierte Abbildung von H in E . In Y sei ein Kegel T gegeben. Ist $y_0 \in Y$ mit $|y_0| \leq 1$ gegeben, so gibt es dann und nur dann $y_n \in Y$ mit $|y_n| \leq 1$, $y_n \rightarrow y_0$, so daß die Ungleichungen $F(x) \geq y_n$ Lösungen in der Kugel $|x| \leq N$ haben, wenn aus $\eta \geq 0$ stets $\eta(y_0) \leq N \cdot \Phi(\eta)$ für alle $\eta \in H$ gilt. Ist überdies T abgeschlossen und sind X und Y beide vollständig, so hat $F(x) \geq y$ für jedes y dann und nur dann eine Lösung, wenn es ein N gibt, so daß aus $\eta \geq 0$ stets $\eta \leq N \cdot \Phi(\eta)$ folgt. Entsprechende Sätze gelten für die Lösbarkeit von $\Phi(\eta) \geq \xi$. Sind X und Y B_0^* -Räume und ist der Kegel T in Y abgeschlossen, so folgt aus der Lösbarkeit von $F(x) \geq y$ für jedes y , daß aus $\eta_n \geq 0$ und $\Phi(\eta_n) \rightarrow 0$ stets $\eta_n \rightarrow 0$ folgt; ist diese Bedingung umgekehrt erfüllt, so bilden die y , für die $F(x) \geq y$ Lösungen mit $|x| \leq r$ haben, eine Kugel um 0. Ein analoger Satz gilt für die konjugierten Räume. G. Köthe.

Sikorski, R.: On a theorem of Mazur and Orlicz. *Studia math.* **13**, 180—182 (1953).

Für den Satz (*) von Mazur und Orlicz (vgl. vorst. Referat) wird ein wesentlich vereinfachter Beweis gegeben, der ihn durch eine geometrische Überlegung auf den Satz von Hahn-Banach zurückführt. G. Köthe.

Amemiya, Ichiro: A generalization of Riesz-Fischer's theorem. *J. math. Soc. Japan* **5**, 353—354 (1953).

L. Kantorovič (dies. Zbl. **16**, 405) und H. Nakano (dies. Zbl. **41**, 234) haben den Satz von Riesz-Fischer zu Vollständigkeitskriterien für normierte halbgeordnete lineare Räume verallgemeinert. Verf. verschärft diese Ergebnisse zu dem Satz: Ein solcher Raum ist vollständig, wenn die Norm „monoton vollständig“ ist; d. h. wenn jede Folge $\{a_r\}$ mit $a_r \leq a_{r+1}$ und $\|a_r\| \leq M$ ($r = 1, 2, \dots$) eine obere Grenze besitzt. Die von den ersten genannten Autoren an die Norm gestellten zusätzlichen Stetigkeits- bzw. Halb-Stetigkeitsforderungen sind also überflüssig. H. König.

Gurevič, L. A.: Über die Basis der unbedingten Konvergenz. *Uspechi mat. Nauk* **8**, Nr. 5 (57), 153—156 (1953) [Russisch].

Eine Basis $\{e_i\}$ in einem Banachraum B heißt eine Basis mit unbedingter Konvergenz, wenn für jedes $x \in B$ (mit Koeffizienten ξ_i) und jedes $f \in B$ (konjugierter Raum) die Reihe $\sum \xi_i f(e_i)$ absolut konvergiert. Eine Basis $\{e_i\}$ besitzt diese Eigenschaft genau dann, wenn $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \xi_i e_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\|$ gilt (ε_i beliebig $= \pm 1$, ξ_i und n beliebig, K fest). Literatur: Grinbl'um, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **31**, 431 (1941); Karlin, dies. Zbl. **32**, 31. K. Zeller.

Alexiewicz, A.: On the two-norm convergence. *Studia math.* **14**, 49—56 (1953).

Sei $\|x\|$ die F -Norm eines (F) -Raumes X . Ist $\|x\|^*$ eine zweite, schwächere (F) -Norm auf X (bezüglich deren X nicht vollständig zu sein braucht), so heißt eine Folge $x_n \in X$ γ -konvergent gegen x_0 , wenn sie bezüglich der Norm $\|x\|$ beschränkt ist und $\lim \|x_n - x_0\|^* = 0$ gilt. Eine solche Konvergenz heißt Zweinormenkonvergenz. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die γ -Konvergenz ebenfalls eine Normkonvergenz ist. Es werden mehrere Beispiele für Zweinormenkonvergenz gegeben, und in diesen Beispielen wird die allgemeine Form eines γ -linearen Funktional angegeben. Ebenso werden lineare Abbildungen, die γ -konvergente Folgen in ebensolche überführen, untersucht und Bedingungen angegeben, unter denen der γ -Limes einer Folge solcher γ -linearen Abbildungen wieder eine γ -lineare Abbildung ist. G. Köthe.

Alexiewicz, A.: On a theorem of Ważewski. *Ann. Soc. Polon. Math.* **24**, Nr. 2, 129—131 (1953).

Es sei γ eine schwach stetige Abbildung des reellen Intervalles $[a, b]$ in einen Banach-Raum B und q eine wachsende reelle Funktion auf $[a, b]$. Gibt es mit Ausnahme einer abzählbaren Menge zu jedem $t \in (a, b)$ eine positive Nullfolge τ_1, τ_2, \dots und eine Folge y_1, y_2, \dots aus einer abgeschlossenen konvexen

Teilmenge K von B , so daß $[x(t + \tau_n) - x(t)][q(t + \tau_n) - q(t)] - y_n$ schwach nach 0 konvergiert mit $n \rightarrow \infty$, so ist für verschiedene $t', t'' \in [a, b]$ stets $[x(t') - x(t'')][q(t') - q(t'')] \in K$. Der Beweis beruht auf einer Anwendung eines Monotoniekriteriums für stetige reelle Funktionen mit einer nicht negativen vorderen oberen Derivierten bzgl. φ .

G. Aumann.

Orlicz, W.: On functions of finite variation, depending on a parameter. *Studia math.* 13, 218—232 (1953).

Let $x(v)$ denote a function from the closed interval $E = [a, b]$ to a Banach space X . If $A \subset E$, the variation $V_A x(v)$ is the supremum of sums $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \|x(v_{i+1}) - x(v_i)\|$ for all possible choices of $\varepsilon_i = \pm 1$ and $v_i \in A$ with $v_1 < v_2 < \dots < v_n$. The essential variation $V^* x(v)$, $\text{var}^* x(v)$, is the infimum of $V_A x(v)$ taken over all subsets A of E which have measure $b - a$. The strong variation $W_A x(v)$ and the essential strong variation $W^* x(v)$ are similarly defined starting from sums $\sum_{i=1}^{n-1} \|x(v_{i+1}) - x(v_i)\|$. It is proved that if $x(v)$ is weakly continuous in a certain sense, then $V^* x(v) = V_E x(v)$ and $W^* x(v) = W_E x(v)$. Continuity properties of a function of finite strong variation are obtained. Taking $X = M$, the Banach space of essentially bounded functions with $\|x\| = \sup^* |x(t)| = \text{ess. sup} |x(t)|$, results are obtained concerning functions $D(t, v)$ measurable in the square $E \times E$ and with $x(v) = \int_a^v D(t, v) dt$ for each v . In particular, $V^* x(v) = \sup_v [\text{var}^* D(t, v)]$, and if $\int_a^u D(t, v) dt = \int_a^v D(t, u) dt$ for all $u, v \in E$, then $V_E x(v) = V^* x(v)$. Under the same conditions, $V_E x(v) < \infty$ is equivalent to a Lipschitz condition, $\int_a^b |D(t, v+h) - D(t, v)| dt \leq K|h|$. Applications include a characterization of multipliers of the class (M, M) in the theory of orthogonal systems.

F. F. Bonsall.

Wazewski, T.: Une généralisation des théorèmes sur les accroissements finis au cas des espaces de Banach et application à la généralisation du théorème de L'Hôpital. *Ann. Soc. Polon. Math.* 24, Nr. 2, 132—147 (1953).

It is well-known that the Cauchy's mean-value theorem is not true for vector-valued functions. The author proves its analogue for vector-valued functions in various forms the most general of which is the following. Let X be a (real) Banach space, — $\Phi(t)$ a (strongly) continuous function from $J = [a, b]$ to X , — V a closed convex set in X , — $f(t)$ a continuous and strictly monotone real-valued function on J , set further $I(p, q) = [\Phi(q) - \Phi(p)][f(q) - f(p)]^{-1}$; then $I(p, q) \in V$ for every $p, q \in J$ if (*) $\lim_{h \rightarrow 0+} \text{dist}(I(t, t+h), V) = 0$ for every $t \in J$, except

a denumerable set. To state the condition in a „differential“ form the author introduces the notion of the differential end analogous to the prime end of Carathéodory. Let F_n and G_n be two sequences of closed sets in X ; these sequences are called equivalent if every F_n contains almost all G_n 's and vice versa. The class B of all sequences equivalent to F_n is called the closed end. Let Q be a closed set in X , — $Q(\varepsilon)$ its ε -neighbourhood, then $QB \neq 0$ will mean that for every $\varepsilon > 0$, $Q(\varepsilon) \cap F_n \neq \emptyset$ for almost every n . Let now $h_n \rightarrow 0$, $t + h_n \in J$ and denote by U_n the range of the function $[\Phi(s) - \Phi(t)][f(s) - f(t)]^{-1}$ as s varies in $(t, t + h_n)$, and by F_n the closure of U_n ; the sequence F_n defines a closed end, $(d\Phi(t)/df(t))^{**}$, called the differential end. The condition (*) is equivalent to $V(d\Phi(t)/df(t))^{**} \neq \emptyset$. Let x_n be a sequence in X ; $x_n \xrightarrow{\Phi} V$ will mean that every neighbourhood $V(\varepsilon)$ of V contains almost all elements of the sequence, then the rule of l'Hôpital may be stated in the following „non differential“ form. Suppose that (1) either $\lim_{t \rightarrow k} \|\Phi(t)\| = 0$ or $\lim_{t \rightarrow k} |f(t)| = \infty$, (2) V is a closed convex and bounded set in X , (3) $p_n, q_n \in J$, $p_n \neq q_n$, $p_n \rightarrow k$, $q_n \rightarrow k$ implies $I(p_n, q_n) \xrightarrow{\Phi} V$; then $\Phi(t_n)/f(t_n) \xrightarrow{\Phi} V$ as $t_n \rightarrow k$. The hypothesis (3) may be stated in various „differential“ forms e.g.: (3') for every $\varepsilon > 0$ there is a neighbourhood R of k such that $V(\varepsilon) \cap (d\Phi(t)/df(t))^{**} \neq \emptyset$ for $t \in R$ — (a denumerable set).

A. Alexiewicz.

Halperin, Israel: Function spaces. *Canadian J. Math.* 5, 273—288 (1953).

Soient S un espace mesuré, γ la mesure, $w(P)$ une fonction ≥ 0 mesurable sur S . Si $f(P)$ est une fonction numérique mesurable sur S , on pose $|f|_p = \sup_x \left(\int |f(P)|^p w_x(P) d\gamma(P) \right)^{1/p}$ ($1 \leq p < +\infty$), $\|f\|_\infty = \sup_x (w_x \cdot \sup |f(P)|)$, où w_x parcourt l'ensemble des fonctions équi-mesurables à w ($\gamma\{w_x(P) > k\} =$

$\gamma\{w(P) > k\}$ pour tout $k \geq 0$). D'où un espace de Banach $L^p_{(w)}$ qui généralise certains espaces de G. G. Lorentz (ce Zbl. 35, 356). Sauf dans le cas où $\gamma(S) = +\infty$, $\int w(P) d\gamma(P) < +\infty$, l'A. détermine explicitement le dual de $L^p_{(w)}$, et obtient des propriétés analogues à celles des espaces L^p classiques (par exemple, $L^p_{(w)}$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$). Pour cela, il établit une inégalité de Hölder d'un nouveau type (où certaines fonctions sont assujetties à être non décroissantes).

J. Dixmier.

Leader, Solomon: The theory of L^p -spaces for finitely additive set functions. Ann. of Math., II. Ser. 58, 528—543 (1953).

Usually the elements of a function space L^p are equivalence classes of functions. The author following S. Bochner (this Zbl. 24, 42) considers their integrals and manipulates them as finitely additive set functions without resorting to the integral representation. The setting is a Boolean algebra \mathfrak{A} with unit I , provided with a positive Jordan measure J such that $J(I) = 1$. $\mathcal{A} = \{E_r\}$: any finite \mathfrak{A} -partition of I . V^1 : space of the real, finitely additive J -continuous functions F , with $\|F\|_1 = \lim_{\mathcal{A}} \sum F(E_r)$, which is proved to be finite. For $E \in \mathfrak{A}$, $F_{\mathcal{A}}(E) = \sum_{\mathcal{A}} (F(E_r)/J(E_r)) J(E \cdot E_r)$. For $1 \leq p < \infty$, $F_{\mathcal{A}}|_p = (\sum (F(E_r)/J(E_r))^p J(E_r))^{1/p}$; $V^p(V^\infty)$ is the space of the functions F in V^1 with $\|F\|_p = \sup_{\mathcal{A}} \|F_{\mathcal{A}}\|_p < \infty$ ($\|F\|_\infty = \sup_{E \in \mathfrak{A}} |F(E)/J(E)| < \infty$). The classical theory of L^p -spaces (step functions, linear functionals, weak and strong convergence, orthogonal systems) is reconstructed using the new direct approach. We quote as novel or characteristic: (Th. 2) For each fixed F and p ($1 < p < \infty$) $\|F_{\mathcal{A}}\|_p$ is a nondecreasing function of \mathcal{A} . (Th. 9) $F \in V^p$ implies $\lim_{\mathcal{A}} \|F - F_{\mathcal{A}}\|_p = 0$. (Th. 13) The general form for a bounded linear functional h on V^p is $(F, H) - \lim_{\mathcal{A}} \sum (F(E_r) H(E_r)/J(E_r))$, where $H \in V^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. In fact $H(E) = h(J_E)$, where $J_E(\mathcal{A}) = J(E \cdot \mathcal{A})$ for $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. (Th. 16) A sequence $\{F_n\}$ in V^1 is weakly convergent if, and only if, $F_n(E)$ converges for each E in \mathfrak{A} and the functions F_n are uniformly absolutely continuous with respect to J . (Th. 18) A sequence $\{F_n\}$ converges strongly in V^1 if, and only if, $F_n(E)$ converges uniformly for all E in \mathfrak{A} . By requiring from the set functions F only finite additivity in place of the usual complete additivity and by avoiding integrals the intervention of limiting processes is reduced. For instance in the proof of the completeness of V^p , from the convergence of $F_n(E)$ to $F(E)$ for each $E \in \mathfrak{A}$ follows obviously the additivity of F . Remarks by the reviewer: To pass from the present theory to the older one it suffices to use Stone's representation for the elements (somas) of \mathfrak{A} . Denoting the transfer by $*$, the Jordan measure J^* defined on compacts can be extended to a Radon measure M^* and the function F^* can be interpreted as an M^* -integral. The directed system of partitions \mathcal{A} is a special case of the filter of partitions used by the reviewer (this Zbl. 50, 60) in his theory of differentiation of cell functions (or „generalized interval“ functions). By means of Burkill integration L^p -norm and scalar product can be assigned directly to J -continuous additive cell functions and the theory of the reviewed paper can be carried over to the more general setting. The M^* -integral of F^* , is the reviewer's J^* -derivative (which by the way can be strictly regarded as „projection“ of the M^* -integral of F^* only for $p = 2$). Th. 9 asserts the existence of the L^p -derivative of $F^* \in V^{**p}$ (cf. loc. cit. for $p = 1$, and Pauc, this Zbl. 42, 58 for $p = 2$).

Chr. Pauc.

Gomes, Ruy Luís: Der Lebesguesche Raum. Ein Beispiel eines regulären Rieszschen Raumes. Gaz. Mat., Lisboa 14, Nr. 56, 5—6 (1953) [Portugiesisch].

Führt man im System F der beschränkten reellen Funktionen f einer Veränderlichen über dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ die „Intervalle“ $[g, h]$, erklärt als die Menge aller f mit $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für $a \leq x \leq b$, wobei g eine nach oben und h eine nach unten halbstetige Funktion bezeichnet, als Umgebungsbasis ein, so wird F zum Lebesgueschen Raum. Verf. untersucht die Eigenschaften dieser „Lebesgueschen Topologie“.

G. Aumann.

Alexiewicz, A.: A theorem on the structure of linear operations. Studia math. 13, 1—12 (1953).

T espace sur lequel est défini une σ -mesure séparable μ ; e : ensemble mesurable- μ . Y : espace de Banach d'applications y de T dans un espace vectoriel L . Pour $y \in Y$, on définit y_e par $y_e(t) = y(t)$ si $t \in e$, $y_e(t) = 0$ si $t \notin e$. On suppose que $y \in Y \Rightarrow y_e \in Y$ pour tout e , avec $\|y_e\| \leq \|y\|$, et que $\mu(e_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \|y_{e_n}\| \rightarrow 0$.

B est un sous-espace vectoriel et un sous-ensemble analytique de Y tel que $y \in B \Rightarrow y_e \in B$ pour tout e . $U(x)$ est une application linéaire d'un espace de Banach séparable dans Y . On a, dans ces conditions le théorème: Il existe une décomposition $T = e \cup g$, $e \cap h = \emptyset$, et un résiduel de X tels que (i) pour tout x et tout $\varepsilon > 0$, il existe e' tel que $\mu(e - e') < \varepsilon$ et $U(x)_{e'} \in B$; (ii) pour tout $x \in R$ et tout $h' \subset h$ de mesure positive $U(x)_{h'} \notin B$. Applications à des espaces de suites de fonctions mesurables où l'ensemble B est constitué de suites a) ant un comportement particulier (par exemple: asymptotiquement bornées, asymptotiquement convergentes, bornées presque partout, etc.) *A. Revuz.*

Albrycht, J.: On a theorem of Saks for abstract polynomials. *Studia math.* 14, 79—81 (1953).

Généralisation d'un théorème de A. Alexiewicz (ce Zbl. 50, 109). Comparer aussi A. Alexiewicz, rapport précédent. X, Y : espaces de Banach. T : espace pourvu d'une σ -mesure μ avec $\mu(T) < \infty$. $U(x, t)$: application de $X \times T$ dans Y qui soit (1) mesurable Bochner pour x fixe, (2) polynôme de degré m en x pour t fixe, (3) tel que $x \rightarrow x_0 \Rightarrow U(x, t)$ tend asymptotiquement vers $U(x_0, t)$. L'A. démontre: Si K est un sous-espace vectoriel mesurable (B) de Y , il existe une décomposition $T = A \cup B$ en deux ensembles mesurables disjoints, et un résiduel R de X tels que (i) $U(x, t) \in K$ pour tout $x \in X$ et presque partout en A , (ii) $U(x, t) \notin K$ pour tout $x \in R$ et presque partout en B . *A. Revuz.*

Michael, Ernest: Some extension theorems for continuous functions. *Pacific J. Math.* 3, 789—806 (1953).

Der metrisierbare Raum Y besitze die Eigenschaft, daß jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Teilmenge A eines metrischen Raumes X in Y einer Erweiterung auf X (auf eine Umgebung von A in X , fähig ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Y werden gefunden, damit der metrische X durch allgemeinere Räume ersetzt werden kann; z. B. gilt das obige für normale X dann und nur dann, wenn Y separabel und topologisch vollständig ist. — Ist nun X ein metrischer Raum, A eine abgeschlossene Teilmenge von X , E ein linearer, lokal konvexer topologischer Raum, sind noch $C(X, E)$ und $C(A, E)$ die linearen Räume aller stetigen Abbildungen von X , bzw. A , in E , so gibt es eine Abbildung $\Phi: C(A, E) \rightarrow C(X, E)$ mit folgenden Eigenschaften: a) für jedes $f \in C(A, E)$ ist $\Phi(f)$ eine Erweiterung von f ; b) der Wertevorrat von $\Phi(f)$ ist in der konvexen Hülle des Wertevorrates von f enthalten; c) Φ ist eine lineare topologische Abbildung von $C(A, E)$ in $C(X, E)$, falls diese beiden Mengen mit derselben der folgenden drei topologischen Zuordnungen versehen sind: die Topologie der einfachen Konvergenz, die der kompakten Konvergenz, die der gleichmäßigen Konvergenz. *T. Ganea.*

Aruffo, Giulio e Dionisio Gallarati: Sulla struttura delle regioni dello spazio di Fantappiè. *Rend. Mat. e Appl.* 12, 1—34 (1953).

Si considera lo spazio S (di Fantappiè) delle funzioni analitiche localmente e biregolari, e si studiano le proprietà delle regioni (non lineari) costituite da riunioni di regioni lineari. Inoltre viene affrontato il problema della ricerca degli interni massimali, vale a dire, se P è una qualunque regione funzionale di S , (y_0, M_0) è una sua qualunque funzione, ed \mathfrak{A} è la famiglia degli interni di (y_0, M_0) che appartengono a P , vengono cercati quegli elementi di \mathfrak{A} che non sono contenuti in alcun altro elemento di \mathfrak{A} . *S. Cinquini.*

Calabi, Lorenzo: Cammini e linee analitiche in alcuni spazi funzionali. *Rend. Mat. e Appl.* 12, 62—75 (1953).

L'A. dà un procedimento per costruire una linea analitica congiungente due elementi dello spazio delle funzioni analitiche localmente e biregolari e di altri spazi che intervengono nella teoria dei funzionali analitici. *S. Cinquini.*

Pasqua, Dario del e Franco Pellegrino: Sugli operatori lineari dotati di operatore associato. *Rend. Mat. e Appl.* 12, 35—61 (1953).

Dati due operatori lineari L e \bar{L} con $\bar{L}L y = y$, e tali che $L\bar{L}$ non sia l'identità, l'operatore $Z = 1 - L\bar{L}$ si chiama associato a L . Mediante Z vengono ottenute

generalizzazioni di relazioni che intercedono tra l'integrazione e la derivazione. Segue l'applicazione alla risoluzione di equazioni funzionali lineari. *S. Cinquini.*

Pellegrino, Franco e Francesco Succì: Fondamenti della teoria dei funzionali misti complessi. *Rend. Mat. e Appl.* **12**, 105—162 (1953).

Vengono date le seguenti definizioni: Funzionale puro complesso è ogni rappresentazione uniforme $f = F[y]$ di una regione P dello spazio funzionale S_F di Fantappiè in un insieme della sfera complessa S , soddisfacente alla proprietà che, se y_0 appartiene a P , per ogni suo prolungamento y_1 sia $F[y_1] = F[y_0]$. Funzionale misto complesso è ogni funzionale misto $f = F[y; z]$ tale che: 1°) è definito in un insieme H di coppie $[y; z]$, per il quale i $P(z)$ sono regioni di S_F e gli $R(y)$ sono regioni di S ; 2°) è una rappresentazione uniforme di H in un insieme di S ; 3°) se z_0 appartiene a R , il funzionale $F_{z_0}[y] = F[y; z_0]$ è un funzionale puro complesso. Rilevato che la classe dei funzionali misti complessi comprende quella dei funzionali misti analitici, gli AA. studiano la struttura dei campi di definizione H , e alcune proprietà dei funzionali misti complessi, tra cui la loro continuità e le relazioni che intercedono tra i funzionali in questione e gli operatori che essi generano. È da far presente che i funzionali (analitici) lineari di Fantappiè vengono chiamati quasi lineari, mentre viene detto lineare ogni funzionale misto complesso, il cui corrispondente operatore sia lineare. *S. Cinquini.*

Pasqua, Dario del e Franco Pellegrino: Linee quasi analitiche dello spazio di Fantappiè e indicatrici dei funzionali misti analitici quasi lineari. *Rend. Mat. e Appl.* **12**, 188—228 (1953).

Chiamata linea quasi analitica ogni funzione analitica locale di due variabili, gli AA. caratterizzano le indicatrici antisimmetriche dei funzionali misti analitici quasi lineari (vedi la recens. preced.), dimostrando la corrispondenza biunivoca che sussiste tra i funzionali misti analitici quasi-lineari e le funzioni analitiche locali di due variabili, biregolari rispetto a una di esse. Infine vengono rilevate alcune proprietà dei funzionali iperanalitici, i quali vengono definiti come i funzionali che conservano l'analiticità su linee quasi analitiche. *S. Cinquini.*

Tashiro, Shizuko and Akira Ono: On the regularity of distributions defined by some differential equations. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A* **8**, 93—107 (1953).

In der Theorie der Distributionen über R^n gilt der Satz [siehe L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. II, S. 36 flg. (Paris 1951, dies. Zbl. **42**, 114)]: Wenn $\Delta T \equiv \partial^2 T / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 T / \partial x_n^2$ eine Funktion aus L^p ($p \geq 1$) auf jeder kompakten Menge ist, so gehört T zu L^q auf jeder kompakten Menge, wo $1/q \geq \max(1/p - 2/n, 0)$. Verff. erweitern dies dahin, daß T die Lipschitz-Bedingung der Ordnung s ($0 \leq s \leq 1$) in L^q auf jeder kompakten Menge erfüllt, wo $1/q \geq \max(1/p - 2/n + s/n, 0)$. Ferner werden analoge Sätze bewiesen, in denen Δ durch den Operator $\nabla \equiv \partial^2 / \partial x_n^2 - \partial^2 / \partial x_1^2 - \dots - \partial^2 / \partial x_{n-1}^2$ und seine Iterationen bzw. $D \equiv \partial / \partial x_n - \partial^2 / \partial x_1^2 - \dots - \partial^2 / \partial x_{n-1}^2$ ersetzt ist. *G. Doetsch.*

Edwards, R. E.: The exchange formula for distributions and spans of translates. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 888—894 (1953).

Es sei J die im Sinn von L. Schwartz verallgemeinerte Fouriertransformation, a und b seien zwei Distributionen, für die die Faltung $a * b$ eine beschränkte Funktion ist. Es wird untersucht, wann noch $J(a * b) = J(a) J(b)$ gilt. Eines der Resultate ist: Ist $2 \leq p \leq \infty$, so gilt $J(f * \Phi) = J(f) J(\Phi)$ für jedes $\Phi \in L^p(R^m)$, wenn $f \in L^p(R^m)$ und $J(f)$ eine lokal zu $L^p(R^m)$ gehörende Funktion ist. Diese Resultate werden angewendet auf das Problem der Bestimmung des von den Translationen einer festen Funktion aufgespannten abgeschlossenen linearen Teilraumes. Das dem obigen Resultat entsprechende lautet: Sei $2 < p < \infty$, $f \in L^p(R^m)$ und $F = J(f)$ lokal zu $L^p(R^m)$ gehörig. Sei E_f die Menge der Nullstellen von f . Dann enthält der von den Translationen von f in $L^p(R^m)$ aufgespannte abgeschlossene lineare Teilraum alle $g \in L^p(R^m)$, deren $J(g)$ lokal zu $L^p(R^m)$ gehört und fast überall auf E_f verschwindet. *G. Köthe.*

Gelfand, I. M. und G. E. Šilov: Fouriertransformationen schnell wachsender Funktionen und Eindeutigkeitsfragen des Cauchyschen Problems. *Uspechi mat. Nauk* **8**, Nr. 6 (58), 3—54 (1953) [Russisch].

Let S be the space of all infinitely differentiable rapidly decreasing functions in R^n , introduced by Schwartz (this Zbl. **30**, 126). In order to extend the definition of the Fourier transform to a greater class of functionals than the dual of S , the authors study linear sub-

sets Φ of S , which are closed for differentiation and multiplication with polynomials and have a (pseudo-)topology, for which these operations are continuous. The space $\hat{\Phi}$ of Fourier transforms of functions in Φ with the topology carried over from Φ has the same properties. If $T(\Phi)$ and $T(\hat{\Phi})$ are the duals of Φ and $\hat{\Phi}$, a Fourier transform which maps $T(\hat{\Phi})$ and $T(\Phi)$ onto each other is defined by duality. Differentiation and multiplication with polynomials are defined and continuous in $T(\Phi)$. Examples of spaces Φ are: K_p ($p > 1$), the set of functions $q(x) \in S$ which with every derivative satisfy an inequality of the form $|\varphi(x)| \leq C_1 e^{-c|x|^p}$ ($C > 0$); K , the set of functions in S with compact support (denoted \mathcal{Q} by Schwartz z); Z^p ($p \geq 1$), the set of functions $q(x) \in S$ which can be continued as entire functions such that for every polynomial $P(z)$ there are C, C_1 so that $\int |P(x + iy) q(x + iy)|^2 dx \leq C_1 e^{C|y|^p}$; Z_p^p ($p > 1$), the set of entire functions satisfying an inequality

$$|\varphi(z_1, z_2, \dots, z_N)| < K \exp(\varepsilon_1 C_1 |z_1|^p + \dots + \varepsilon_N C_N |z_N|^p)$$

where $\varepsilon_k = 1$ if z_k is complex and -1 if z_k is real. In all these spaces pseudo-topologies are defined and it is proved that $K_p = Z^p$, $K = Z^1$ (the theorem of Paley-Wiener), $Z_p^p = Z^{p'}$ ($1/p + 1/p' = 1$). [There is a mistake on p. 18 where in proving that $K_p = Z^{p'}$ an estimate of $|\varphi(x)|$ is deduced from an estimate of $\int |\varphi(x)|^2 dx$ and $\int |\partial \varphi / \partial x_i|^2 dx$ ($i = 1, \dots, N$). The result is correct since there are analogous inequalities for the higher derivatives.] Any entire function belongs to $T(K)$ ($= \mathcal{Q}$) and hence the Fourier transform belongs to $T(Z^1)$. For functions in one variable of exponential type the Fourier transform is closely related to the Borel transform. — The results are applied to Cauchy's problem for the linear system of equations $\partial u(x, t) / \partial t = P(\partial^2 x / \partial x^2) u(x, t)$ where $u = (u_1, \dots, u_m)$ is a vector and P is a square matrix of linear differential operators depending only on t . A sufficient condition is proved for the uniqueness and existence of a solution such that $u(x, t) \in T(\Phi)$ for every $t \geq 0$ and $u(x, 0) = u_0(x)$ where $u_0(x)$ is a given element in $T(\Phi)$. The result contains among others that of Tychonoff (this Zbl. 12, 355). A similar study by Schwartz (this Zbl. 42, 331) for $\Phi = S$ is lacking in the bibliography.

L. Hörmander.

● Loomis, Lynn H.: An introduction to abstract harmonic analysis. Toronto-New York-London: D. Van Nostrand Company, Inc. 1953. X, 190 p. \$ 5.—

Titres des chapitres: I. Topology. II. Banach spaces. III. Integration. IV. Banach algebras. V. Some special Banach algebras. VI. The Haar integral. VII. Locally compact abelian groups. VIII. Compact groups and almost periodic functions. IX. Some further developments. — Dans les 3 premiers chapitres, de quart du livre), qui sont préparatoires, l'A. démontre les résultats non strictement élémentaires qui lui sont nécessaires pour la suite (par exemple, les théorèmes de Stone-Weierstrass, du graphe fermé, de Lebesgue-Nikodym) par les méthodes classiques. Le chap. VI suit la méthode de Weil pour l'existence de la mesure de Haar; l'unicité est établie par une méthode nouvelle, un peu apparentée à celle de Kakutani. Chapitre IX: indications, sans démonstrations, sur la Reduction theory de von Neumann, le théorème de Plancherel non commutatif, la transformation de Laplace abstraite, les idéaux primaires. . . . il s'agit de donner au lecteur l'envie d'en savoir davantage. Les chapitres IV, V, VII, VIII sont les parties centrales du livre, les deux premiers formant la partie abstraite, les deux derniers exposant les applications. — Chapitre IV: Définition des algèbres de Banach. Espace localement compact des homomorphismes continus sur le corps complexe. Analyse et synthèse harmoniques dans le cas de l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact. Idéaux maximaux réguliers dans les algèbres quelconques; adjonction d'un élément unité; cas de l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur un espace localement compact; topologie „hull-kernel“ sur l'ensemble des idéaux bilatères maximaux réguliers, avec le théorème suivant: soient R une algèbre semi-simple, I un idéal bilatère régulier, U un ensemble ouvert d'idéaux bilatères maximaux réguliers tels que $h(I) \subset U$ ($h = \text{„hull“}$) et tel que $k(\mathbb{C} U)$ soit régulier ($k = \text{„kernel“}$); alors $k(I) \subset I$. Spectre et adverse d'un élément dans une algèbre quelconque. Cas d'une algèbre de Banach. Théorème de Gelfand-Mazur. Cas des algèbres de Banach commutatives; radical, continuité des homomorphismes, fonctions analytiques d'un élément; notion de frontière selon Šolov. — Chapitre V: Algèbres de Banach commutatives régulières (i.e. la topologie faible est identique à la hull-kernel topologie). L'A. appelle condition D pour une telle algèbre A la condition suivante: pour tout idéal maximal régulier M et tout $x \in M$, il existe une suite $x_n \in A$ telle que \hat{x}_n (transformée de Gelfand) $= 0$ sur un voisinage de M , et $x_n \rightarrow x$. Théorème: soit A une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple satisfaisant à la condition D . Soit I un idéal fermé de A . Alors I contient tout $x \in k(h(I))$ tel que l'intersection de la frontière de $h(x)$ avec $h(I)$ ne contienne aucun ensemble parfait non vide. — Algèbres de Banach à involution. Théorème de Gelfand-Neumark dans le cas commutatif. Continuité de l'involution, des représentations. Application: théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints continus. Correspondance entre formes linéaires positives et mesures positives sur l'espace \mathfrak{M} des caractères (théorème de Bochner abstrait). Etant donnée une forme linéaire positive sur un idéal partout dense, l'A. définit

une mesure positive μ sur \mathfrak{M} et énonce un théorème de Plancherel abstrait. — Espaces hilbertiens munis d'une structure d'*-algèbre avec les axiomes d'Ambrose (H^* -algèbres). Décomposition en idéaux bilatères minimaux, et structure de ces idéaux. — Chapitre VII: Soit G un groupe abélien localement compact. L'A. montre qu'on peut identifier l'espace des caractères de $L^1(G)$ et l'ensemble des caractères de G muni de la topologie de la convergence compacte; d'où le groupe dual \hat{G} . Cas de la droite numérique et du tore. En 4 pages, l'A. obtient le théorème de Bochner, la formule d'inversion de Fourier pour les fonctions intégrables de type positif, les théorèmes de Plancherel et de Stone. Moins de 4 pages donnent le théorème taubérien de Wiener, la synthèse harmonique (dans la mesure où elle est valable), la dualité de Pontrjagin. Indications sur la formule de Poisson. Cas des groupes abéliens compacts — Chapitre VIII: Si G est un groupe compact, $L^2(G)$ est une H^* -algèbre. L'A. obtient donc aussitôt la plupart des résultats classiques, puis l'équation fonctionnelle des caractères, l'approximation des fonctions continues par des fonctions presque-invariantes (f est presque-invariante si ses translatées bilatères engendrent un espace de dimension finie). Représentations unitaires. L'A. expose de façon nouvelle la théorie des fonctions presque-périodiques: soit G un groupe topologique; une fonction continue bornée sur G est dite presque-périodique à gauche si ses translatées à gauche forment un ensemble précompact. On montre aussitôt que les fonctions presque-périodiques à gauche forment naturellement une C^* -algèbre. Soit \mathfrak{M} l'espace de ses idéaux maximaux; il y a une application continue naturelle α de G sur une partie partout dense de \mathfrak{M} . Un lemme, établi directement, prouve qu'une fonction presque-périodique à gauche est presque-périodique à droite. Alors, on montre que la multiplication de G définit par continuité une structure de groupe sur \mathfrak{M} , et que α est une représentation. Le reste est alors facile (définition directe de la moyenne d'une fonction, théorème d'approximation). Cas de la droite numérique. — La bibliographie (49 citations) va jusqu'en 1951. — Le livre n'est pas du tout une encyclopédie des sujets traités, même si on se limite à la théorie commutative. Naturellement, le rapporteur aurait des objections à faire sur quelques points. Mais il semble plus juste d'insister sur les qualités: le livre forme un tout; les démonstrations (généralement classiques) sont complètes, concises et bien choisies; l'A. explique la marche générale des idées, et donne des exemples tirés des mathématiques classiques: des parties importantes sont, pour la première fois (à la connaissance du rapporteur), exposées ici dans un traité systématique.

J. Dixmier.

Hewitt, Edwin: Remarks on the inversion of Fourier-Stieltjes transforms. Ann. of Math., II. Ser. 57, 458—471 (1953).

L'A. se propose d'étendre la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier-Stieltjes, due à Paul Lévy pour le cas de la droite, à des cas plus généraux, et si possible à celui d'un groupe abélien localement compact quelconque G . Associant aux fonctionnelles linéaires continues complexes F définies sur l'espace des fonctions continues f telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K(f, \varepsilon)$ tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour $x \notin K(f, \varepsilon)$, espace normé par $\|f\| = \max |f(x)|$, les mesures φ telles que $F(f) = \int_G f(x) d\varphi(x)$, la formule à obtenir serait du type

$$\varphi(A) = \lim_{F \downarrow \hat{B}} \int_G \left(\int u, \hat{x} \right) d\varphi(u) \int_G (v, \hat{x}) \chi_A(v) dv) d\hat{x}$$

avec A sous-ensemble mesurable- φ de G , χ_A fonction caractéristique de A , \hat{B} sous-ensemble de \hat{G} décrivant le filtre F . L'A. donne de telles formules pour: 1) R^n en prenant pour \hat{B} des rectangles ou des cercles, 2) les groupes T^m , 3) les groupes finis, 4) les groupes discrets, 5) un groupe particulier constitué du produit direct de m groupes à 2 éléments (m nombre cardinal quelconque) et termine par un exemple pour lequel l'existence d'une formule du type cherché paraît très douteuse.

A. Revuz.

Helson, Henry: Isomorphisms of Abelian group algebras. Ark. Mat. 2, 475—487 (1953).

Es seien G und H im folgenden lokalkompakte abelsche Gruppen mit Elementen x, y, \dots und \hat{G}, \hat{H} ihre dualen Gruppen mit Elementen \hat{x}, \hat{y}, \dots . Die summierbaren Funktionen auf G bilden bezüglich Addition und Faltung die Banachalgebra $L(G)$. Ist $f(x) \in L(G)$, so ist $\hat{f}(\hat{x}) = \int f(x) \overline{(x, \hat{x})} dx$ seine Fouriertransformierte. Diese bilden bezüglich Addition und der üblichen Multiplikation eine zu $L(G)$ isomorphe Algebra $F(\hat{G})$. Die Fouriertransformierten $\hat{\mu}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})} d\mu(x)$ der Radonschen Maße μ auf G bilden eine normierte Algebra $B(\hat{G})$.

wenn $\|\hat{f}\| = \|\mu\| = \sup \int q(x) d\mu(x)$ gesetzt wird, wobei $q(x)$ die meßbaren Funktionen mit der wesentlichen oberen Schranke 1 durchläuft. $F(\hat{G})$ ist ein Ideal in $B(\hat{G})$. Eine Funktion \hat{q} auf \hat{G} ist dann und nur dann die Fouriertransformierte eines Radonschen Maßes auf G , wenn $\hat{f}\hat{q} \in F(\hat{G})$ für jedes $\hat{f} \in F(\hat{G})$ gilt. Der Beweis beruht auf einem Satz von S. Bochner und I. Schoenberg. Es sei nun T ein Isomorphismus der Algebra $L(G)$ auf $L(H)$. Dann sind G und H homöomorph, und durch diese Homöomorphie werden Isomorphismen von $F(\hat{G})$ bzw. $B(\hat{G})$ auf $F(H)$ bzw. $B(\hat{H})$ erzeugt. Ein Radonsches Maß μ auf G hat die Form $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(p_i) + \nu$, a_i komplex, $\mu(p_i)$ das diskrete Maß der Masse 1 im Punkt p_i , ν ein auf allen Punkten verschwindendes Maß. In Verallgemeinerung eines Resultates von A. Beurling für die Gerade wird gezeigt, daß $\sum a_i^2 = 1$ ist, wenn die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ in jedem Punkt den Absolutbetrag 1 hat. Die beiden Hauptresultate sind: Ist T ein bezüglich der Norm abnehmender Isomorphismus von $L(G)$ auf $L(H)$, so sind G und H isomorph, T ist isometrisch, und es gilt $Tf = k\hat{y}\hat{f}$ für jedes $f \in L(G)$, wobei γ ein Isomorphismus von G auf H ist, $\hat{f}(\gamma^{-1}x) = \gamma(x)$, \hat{y} ein fester Charakter von H , k eine von der Wahl des Haarschen Maßes auf H abhängige Konstante. Wird nur vorausgesetzt, daß die Norm von T kleiner als zwei ist, so gilt dieselbe Aussage unter der Voraussetzung, daß G oder H zusammenhängend ist. G. Köthe.

Reiter, H. J.: On a certain class of ideals in the L^1 -algebra of a locally compact Abelian group. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 505—509 (1953).

Suite d'un article précédent (H. J. Reiter, ce Zbl. **48**, 92). I est un idéal fermé de L^1 (algèbre des fonctions sommables sur un groupe abélien localement compact G). Z_I est le co-spectre de I (ensemble des zéros communs aux transformées de Fourier des fonctions appartenant à I). $C(Z_I)$ est l'ensemble des fonctions continues complexes, nulles hors d'un compact, sur Z_I muni de la topologie induite par celle du groupe dual de G . L'A. démontre: Si Z_I est dénombrable et si ses éléments sont indépendants (aucune relation du type $x^i y^j \cdots z^k = e$ sauf si tous les entiers i, j, \dots, k sont nuls), alors L^1/I et $C(Z_I)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Banach. A. Revuz.

Matsushita, Shin-ichi: Über einen Satz von K. Iwasawa. J. Inst. Polytechn. Osaka, Ser. A **4**, 59—61 (1953).

G groupe localement compact, $L^{1,p}(G) = L^1(G) \cap L^p(G)$ est un anneau normé pour le produit de composition ($x * y$ avec la norme $\|x\| = \max(\|x\|_1, \|x\|_p)$). L'A. propose une démonstration du théorème suivant dû à K. Iwasawa [Proc. Imp. Acad. Tokyo **20**, 67—70 (1944); qu'il enonce dans japonais dans Zenkoku Shijō Sūgaku Danwakai, **246**, Ser. 1, Osaka (1942)] qu'il énonce: „Die Gesamtheit aller stetigen Darstellungen $T(x)$ von $L^{1,p}(G)$ kann auf eine isomorphe Weise in die Gesamtheit aller beschränkten Darstellungen $D(g)$ von G eingebettet werden. Dabei gibt es für jede $T(x)$ eine einzige $D(g)$ mit der Relation $T(x) = \int x(g) D(g) dg$.“ La démonstration dont plusieurs erreurs typographiques malencontreuses rendent la lecture difficile repose sur le résultat suivant faussement attribué à A. Weil et qui ne paraît pas exact: „Il existe dans $L^p(G)$, $p > 1$, une suite e^{λ_j} possédant les propriétés suivantes: 1) $\|e^{\lambda_j}\|_p = 1$, 2) $\|x * e^{\lambda_j} - x\|_p \rightarrow 0$. De telles suites existent avec $\|e^{\lambda_j}\|_1 = 1$, mais pas avec $\|e^{\lambda_j}\|_p = 1$ pour $p > 1$. A. Revuz.

Calderon, A. P.: A general ergodic theorem. Ann. of Math., II. Ser. **58**, 182—191 (1953).

Definitions and Notations: A locally compact group \mathfrak{G} is ergodic if there exists a family (called „ergodic family“) of compact open symmetric neighbourhoods of the identity N_t depending on the real positive parameter t , such that $N_t N_s \subset N_{t+s}$ and $N_{2t} \subset \alpha N_t$, N_t denoting the left invariant (Haar) measure of N_t and α being a constant independent of t . \mathfrak{E} : measure space of finite total measure. $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$: ergodic groups of measure preserving transformations g, h of \mathfrak{E} , such that if $F(x)$ is a measurable function in \mathfrak{E} , then $F(gx)$ and $F(hx)$ are measurable in $\mathfrak{G} \times \mathfrak{E}$ and $\mathfrak{H} \times \mathfrak{E}$ respectively. N_t, M_t : ergodic families in \mathfrak{G} and \mathfrak{H} respectively. A set S of positive numbers is of density 1 if the mean density of S on the interval $(0, t)$ tends to 1 when $t \rightarrow +\infty$. Theorems: There exists a set S of positive numbers of density 1 such that the average $(1) \frac{1}{|N_t|} \int_{N_t} F(gx) dg$ tends to a limit for almost every $x \in \mathfrak{E}$ as t tends to infinity

through S . (2) The dominated ergodic theorem holds under the same conditions on \mathfrak{G} but without restrictions on the values of t . (3) (Cf. N. Dunford, this Zbl. 44, 125; A. Zygmund, this Zbl. 45, 64) If $|F(x)| |\log^+ F(x)|$ is integrable there exist two subsets R and S of the reals of density 1 such that the averages $\frac{1}{|N_s| |M_r|} \int_{N_s} \int_{M_r} F(g_h x) dg$ converge almost everywhere as r and s tend independently to infinity through R and S respectively. *Chr. Pauc.*

Krotkov, Valentina and Israel Halperin: The ergodic theorem for Banach spaces with convex-compactness. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 47, 17—20 (1953).

B : Banach space, T : bounded linear operator on B , $T_n = (n+1)^{-1} (1 + T + \dots + T^n)$, f : element of B . $\bar{S}(f)$: set of all averages of the form $c_0 f + c_1 T f + \dots + c_r T^r f$, where r is an arbitrary non-negative integer and the c_i are non-negative scalars with sum = 1. $\bar{S}(f)$: strong closure of $\bar{S}(f)$ = weak closure of $\bar{S}(f)$. A closed subset A of B is convex compact if every decreasing sequence of non empty, closed, bounded, convex subsets of A has a non-empty intersection. Basic assumptions: (A 1) $n^{-1} T^n f \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$ for every f in B . (A 2) $|T_n| \leq K$ for all n , for some $K < \infty$. Main Theorem: f is T -ergodic (i. e. $T_n f$ converges when n becomes infinite) if and only if the mapping of $\bar{S}(f)$ into itself by T has a fix-point. Corollary: f is ergodic if $\bar{S}(f)$ is convex-compact. — Special cases of convex-compact spaces: locally weakly compact (= reflexive) Banach spaces, uniformly convex Banach spaces. Application: B is L^1 over the measure space X of finite measure $|X|$. $Tf(P) = f(\Phi(P))$ for some measurable mapping Φ of X into itself. A necessary and sufficient condition for T to be ergodic is that for some $K < \infty$ and for all n and all measurable sets e $(n+1)^{-1} (|e| + |\Phi^{-1}(e)| + \dots + |\Phi^{-n}(e)|) \leq K |e|$. *Chr. Pauc.*

Altman, M.: Mean ergodic theorem in locally convex linear topological spaces. Studia math. 13, 190—193 (1953).

Let T be a weakly completely continuous transformation on a locally convex topological space X to X such that the sequence $\{T^n x\}$ is bounded for every $x \in X$. Then the sequence $\{n^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} T^m x\}$ converges for every $x \in X$ to a point y , and $Ty = y$. The proof is reduced, by virtue of the method in another paper of the author (cf. the following review) to the mean ergodic theorem of F. Riesz (this Zbl. 19, 414), the reviewer (this Zbl. 19, 414) and S. Kakutani (this Zbl. 19, 416). *K. Yosida.*

Altman, M.: On linear functional equations in locally convex linear topological spaces. Studia math. 13, 194—207 (1953).

It is proved that Riesz's theory of „determinant-free treatment of Fredholms alternative in Banach spaces“ [Acta math. 41, 71—98 (1916); cf. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw 1932, 151, this Zbl. 5, 209] may be extended to locally convex linear topological spaces. While similar extension was taken up earlier by J. Leray (this Zbl. 37, 357), the merit of the present paper is that J. Schauder's result [Studia math. 2, 183—196 (1930)] concerning the conjugate operator is also generalized. *K. Yosida.*

Koshi, Shozo: On Weierstraß-Stone's theorem. J. math. Soc. Japan 5, 351—352 (1953).

Ω : espace compact; $C(\Omega)$: algèbre normée des fonctions réelles continues sur Ω ; $C^*(\Omega)$: dual de $C(\Omega)$ en tant qu'espace de Banach. L'A. cherche à caractériser les sous-ensembles S de $C^*(\Omega)$ tels que si B est une sous-algèbre de $C(\Omega)$ contenant l'unité, et si pour deux éléments quelconques $\varphi, \psi \in S$, il existe $f \in B$ telle que $\varphi(f) \neq \psi(f)$, alors B est dense dans $C(\Omega)$. Il établit qu'il en est ainsi si et seulement si, pour deux points différents quelconques $x_1, x_2 \in \Omega$, on peut trouver un nombre réel $p \neq 0$ et $\varphi, \psi \in S$ tels que $\mu_{x_1} - \mu_{x_2} = p(\varphi - \psi)$ où $\mu_x(f) = f(x)$. Extension au cas de Ω complètement régulier, $C(\Omega)$ algèbre des fonctions réelles continues bornées. *A. Revuz.*

Matsushita, Shin-ichi: Positive linear functionals on selfadjoint B-algebras. Proc. Japan Acad. 29, 427—430 (1953).

Extension au cas d'algèbres involutives complexes non commutatives de Banach, des résultats connus pour les algèbres réelles commutatives, sur l'ensemble convexe des fonctionnelles linéaires, non négatives sur les carrés et valant 1 pour l'unité, et ses éléments extrémaux. Résultats essentiels: Isomorphisme entre l'espace vectoriel réel des fonctionnelles vérifiant $f(a^*) = f(a)$ et le dual faible réel du noyau hermitien de l'algèbre et entre certains de leur sous-ensembles. Correspondance pour les algèbres semi-unitaires entre éléments extrémaux d'un ensemble convexe de fonctionnelles et idéaux maximaux de l'algèbre. Les démonstrations seront publiées ultérieurement. *A. Revu.*

Nakamura, Masahiro and Zirô Takeda: Normal states of commutative operator algebras. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 109—121 (1953).

Suite d'articles antérieurs (Nakamura et Takeda, ce Zbl. 48, 349; Takeda, ce Zbl. 48, 93; 51, 91). Les AA. caractérisent, à une équivalence unitaire près, une C^* -algèbre par son spectre, supposé simple, et par une ou plusieurs mesures sur ce spectre. Résultats analogues pour les opérateurs hermitiens. *J. Dixmier.*

Orihara, Masae: Correction to my paper „Rings of operators and their traces“. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 8, 89—91 (1953).

Correction au lemme 2.2 de l'article cité dans le titre [Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 5, 107—138 (1950)]. Ce lemme était destiné à prouver l'existence de traces dans les anneaux d'opérateurs finis. La démonstration du nouveau lemme proposé par l'A. utilise l'existence de l'application τ canonique, ce qui ôte beaucoup d'intérêt à la méthode. *J. Dixmier.*

Smiley, M. F.: Right H^* -algebras. Proc. Amer. math. Soc. 4, 1—4 (1953).

Les H^* -algèbres à droite généralisent les H^* -algèbres d'Ambrose [Trans. Amer. math. Soc. 57, 364—386 (1945)]. Ce sont à la fois des $*$ -algèbres et des espaces hilbertiens, les deux structures étant liées par l'axiome $(xy, z) = (x, zy^*)$. L'A. les détermine (en supposant que $yx = 0$ pour tout $y \Rightarrow x = 0$): elles sont sommes directes (au sens d'Ambrose) de „matrix right H^* -algebras“ (une telle algèbre étant, en gros, l'algèbre des opérateurs d'Hilbert-Schmidt dans un espace hilbertien, avec un produit scalaire modifié). Les méthodes sont analogues à celles d'Ambrose. *J. Dixmier.*

Wermer, John: On algebras of continuous functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 866—869 (1953).

C : algèbre des fonctions continues sur $|z| = 1$ avec la norme $\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$; A : sous-algèbre fermée des fonctions continues, traces sur $|z| = 1$ de fonctions holomorphes dans $|z| < 1$. Théorème: Toute sous-algèbre fermée de C contenant A est A elle-même ou C . Plus généralement, si B est une sous-algèbre fermée de C contenant une fonction q telle que $q(\lambda_1) = q(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, alors toute sous-algèbre fermée contenant B est B ou C . Conséquence: Si M est une algèbre de fonctions continues sur $|z| \leq 1$, atteignant le maximum de leur module sur $|z| = 1$, et si M contient une fonction holomorphe univalente, M est constituée de fonctions holomorphes. *A. Revuz.*

Wermer, John: On restrictions of operators. Proc. Amer. math. Soc. 4, 860—865 (1953).

τ étant un opérateur borné inversible sur un espace de Banach B , soit C un sous-espace fermé de B invariant par τ et non invariant par τ^{-1} . L'A. étudie la restriction T de τ à C , en supposant de plus que C a un seul générateur x (les vecteurs $T^n x$ forment une suite fondamentale dans C). Il montre qu'un tel opérateur peut être représenté par la multiplication par z sur un espace de fonctions analytiques sur la composante connexe de 0 de l'ensemble résolvant de τ , et que l'anneau des opérateurs bornés sur C commutant avec T est isomorphe

à un anneau de fonctions analytiques. Il termine par l'étude du cas où τ est un opérateur normal sur un espace de Hilbert H et où le spectre de τ n'a pas d'intérieur et sépare le plan en exactement deux régions. Si $C^\infty = \bigcap T^n C$ et si $C^0 \perp C^\infty$, $H = C^0 + C^\infty$, on a les résultats suivants: C^0 et C^∞ sont tous deux invariants par T , la restriction de T à C^∞ est un opérateur normal, sa restriction à C^0 peut être représentée comme multiplication par z sur un espace J de fonctions analytiques. Si, de plus τ est unitaire, et si $C^\infty \neq C$, on peut prendre pour J l'espace H^2 des fonctions analytiques en $|z| < 1$ avec $\sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty$.

A. Revuz.

Wolfson, Kenneth G.: The algebra of bounded operators on Hilbert space. Duke math. J. 20, 533—538 (1953).

Désignant par „annulet gauche“ dans une algèbre de Banach, l'idéal fermé à gauche défini par $\{x; xT = 0\}$ où T est un sous-ensemble de l'algèbre, l'A. établit le théorème suivant: „Une algèbre de Banach involutive K possédant une identité et des idéaux à droite minimaux est isomorphe (pour sa structure totale d'algèbre normée involutive) à l'algèbre de tous les opérateurs bornés d'un espace de Hilbert (défini à une isométrie près), si et seulement si: (1) K contient un plus petit idéal bilatère fermé (différent de 0). (2) Si J_1 et J_2 sont des annulets gauches vérifiant $J_1 J_2^* = 0$, alors $J_1 + J_2$ est un annulet gauche.“

A. Revuz.

Tomita, Minoru: On rings of operators in non-separable Hilbert spaces. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 7, 129—168 (1953).

Es sei M eine W^* -Algebra mit Einselement, bestehend aus beschränkten Operatoren eines nicht als separabel vorausgesetzten Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} . Verf. versucht eine Ausdehnung der von Neumannschen Resultate für den separablen Fall. Es bedeute $\mathfrak{M} \eta M$, daß der lineare abgeschlossene Teilraum \mathfrak{M} eine zu M gehörige Projektion besitzt. $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ heie, daß \mathfrak{M} durch eine in M liegende Isometrie auf \mathfrak{N} abgebildet wird. \mathfrak{M} heißt endlich, wenn aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$ stets $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ folgt. Andernfalls heißt \mathfrak{M} unendlich. Ist \mathfrak{H} selbst endlich, so heißt M von endlicher Klasse, ist jedes $\mathfrak{M} \eta M$ unendlich, so heißt M von rein unendlicher Klasse. M heißt von unendlicher Klasse, wenn jedes $\mathfrak{J} \eta M \cap M'$ unendlich ist und wenigstens ein endliches $\mathfrak{M} \neq (0)$ enthält. Jedes M ist direkte Summe je einer W^* -Algebra endlicher bzw. unendlicher bzw. rein unendlicher Klasse (die eventuell fehlen können). Ist M von endlicher Klasse, so ist M eine direkte Summe von W^* -Algebren M_α , von denen jedes M_α eine Spur T_α von der Form $T_\alpha(A) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} (A g_i^*, g_i^*)$, $g_i^* \in M_\alpha$, $A \in M_\alpha$, besitzt. Dieses Ergebnis beruht auf

einem Satz von Dixmier und der Theorie der Hilbertalgebren von Nakano. Ein $\mathfrak{M} \eta M$ heißt irreduzibel, wenn aus $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ und $[M\mathfrak{M}] = [M\mathfrak{N}]$ folgt $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ ($[M\mathfrak{M}]$ ist der aus den $A f$, $A \in M$, $f \in \mathfrak{M}$ aufgespannte lineare abgeschlossene Teilraum von \mathfrak{H}). Ein irreduzibles \mathfrak{M} ist stets endlich. M heißt von diskreter Klasse, wenn jedes $\mathfrak{J} \eta M \cap M'$ irreduzibles $\mathfrak{M} \neq (0)$ enthält; M heißt von stetiger Klasse, wenn kein irreduzibles $\mathfrak{M} \neq (0)$ existiert und der rein unendliche Teil von M verschwindet. Es wird bewiesen, daß jedes M die direkte Summe je einer diskreten bzw. stetigen bzw. rein unendlichen W^* -Algebra ist (ein entsprechendes Resultat bewies J. Dixmier, dies. Zbl. 43, 327). Ist M in einer der eben genannten Klassen, so auch M' . Auf jedem M existiert eine Gewichtsfunktion (Dimension der $\mathfrak{M} \eta M$). Im letzten Kapitel wird die von Neumannsche Reduktionstheorie auf den nichtseparablen Fall übertragen. Es werden zuerst kommutative W^* -Algebren und Hilbertalgebren zerlegt, dann wird ein topologisches direktes Integral eingeführt. Damit gilt der Zerlegungssatz: M sei eine W^* -Algebra mit Einselement und ohne rein unendlichen Teil; es gibt dann eine direkte Zerlegung $\mathfrak{H} \approx \mathfrak{H}(\lambda)$, $M \approx M(\lambda)$, $M' \approx M'(\lambda)$ über einem geeigneten Booleschen Raum Ω bezüglich eines Baireschen Maßes μ , so daß $M(\lambda)''$ und $M'(\lambda)''$ Paare von Faktoren sind mit Ausnahme einer nichtdichten Menge $V \subset \Omega$. $M(\lambda)''$ besitzt eine Gewichtsfunktion D_λ , so daß für jedes $\mathfrak{M} \eta M$ $D_\lambda(\mathfrak{M}(\lambda))$ bis auf V stetig ist, und es ist $D_\lambda(\mathfrak{M}) = \int_\Omega D_\lambda(\mathfrak{M}(\lambda)) d\lambda$ eine Gewichtsfunktion auf M . Bis auf eine nichtdichte Menge sind alle $M(\lambda)''$ von stetiger bzw. diskreter Klasse, wenn M es ist.

G. Köthe.

Sz.-Nagy, Béla: Sur les contractions de l'espace de Hilbert. Acta Sci. math. 15, 87—92 (1953).

Es sei H ein Hilbertscher Raum und T eine Kontraktion in H , d. h. ein linearer Operator T mit $\|T\| \leq 1$. T^* sei die Adjungierte von T . Dann werden die folgenden Darstellungen bewiesen: $T^k = P U^k$, $(T^*)^k = P U^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Dabei bedeuten U einen unitären Operator in einem Hilbertschen Raum $H \supset H$ und P die orthogonale Projektion von H auf H . Folgende Sätze sind unmittelbare Folgerungen aus obigem Resultat: (a) Invariante Elemente: Aus $Tf = f$ folgt $T^*f = f$. (b) Ergodensatz von v. Neumann. (c) Ist $u(z)$ regulär-analytisch und $|u(t)| \leq 1$ für $|z| \leq 1$, so folgt aus $\|T\| \leq 1$ die Ungleichung $\|u(T)\| \leq 1$. Gilt $u(z) \geq 0$, so folgt $\operatorname{Re}(u(T)f, f) \geq 0$ für $f \in H$. E. Heinz.

Sz.-Nagy, Béla: Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe. Acta Sci. math. 15 104–114 (1954).

In einer vorangehenden Note ist vom Verf. gezeigt worden, daß für jede Kontraktion T im Hilbertschen Räume H die Darstellungen $T^k = PU^k$, $(T^*)^k = PU^{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) gelten. Dabei ist U ein unitärer Operator in H und P die orthogonale Projektion von H auf H (vgl. vorstehendes Referat). Ein analoger Satz besteht für Halbgruppen linearer Transformationen in H . In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis dieses Satzes gegeben. Es sei I' eine topologische Gruppe und $\{T_g\}_{g \in I'}$ eine Schar von beschränkten, linearen Operatoren, für welche $\sum_{g, \gamma \in I'} (T_g - 1)(g, \gamma) \neq 0$; $T_{g^{-1}} = T_g^*$ gilt und welche schwachstetig von γ abhängen. Dann wird gezeigt: Es gibt einen Hilbertschen Raum $H \supset H$ und eine Schar $\{U_\gamma\}$ von unitären Operatoren in H , so daß $T_\gamma = PU_\gamma$ ($\gamma \in I'$) gilt, wobei P die orthogonale Projektion von H auf H bezeichnet. Als weitere Anwendung dieses Satzes wird ein Resultat von Neumark über verallgemeinerte Spektralscharen bewiesen. E. Heinz.

Smul'jan, Ju. L.: Operatoren mit ausgearteter charakteristischer Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 985–988 (1953) [Russisch].

This paper is a continuation of earlier results of the author's (this Zbl. 49, 88, where the reader may find the definitions used here). The paper contains a deal of results the principal of which is the following. (1) Let H be a Hilbert space, T an orthogonal extension (of norm 1) of an isometric operator V with finite deficiency indices (m, n) ; if every point of the unit circle is an eigenvalue of T , then T has an invariant subspace H_1 such that the induced operator T_1 is the orthogonal extension of an isometric operator V_1 with indices of deficiency (m, n) where $m \geq n$. The other results are: (2) let T_1 be an orthogonal extension of an isometric operator V_1 in a Hilbert space H_1 with deficiency indices (m, p) , then there exists a Hilbert space $H \supset H_1$ and an operator T in H such that T is the orthogonal extension of an isometric operator V with equal deficiency indices (q, q) and such that H_1 is invariant with respect to T and the induced operator coincides with T_1 (here m, p are not supposed to be finite). (3) the characteristic function of a simple isometric operator V with deficiency indices (m, p) is identically null if and only if V is the direct sum of two simple isometric operators with deficiency indices $(m, 0)$ and $(0, p)$ respectively. Only the proof of (1) is sketched. The author defines in the first part of the paper several notions which are needed for the proofs. This are: the isometric extension of an isometric operator, its normal characteristic function, the adhesion of two orthogonal extensions of two isometric operators. A. Alexiewicz.

Krejn, M. G.: Über die Spurformel in der Störungstheorie. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 597–626 (1953) [Russisch].

S. M. Lifšic (Mosk., Zbl. 46, 212) hat, in Zusammenhang mit gewissen Problemen der Quantenstatistik, die folgende „Spurformel“ aufgestellt:

$$(1) \quad \operatorname{Sp} \{ \Phi(H + T) - \Phi(H) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\Phi(\lambda).$$

Hier ist H ein selbstadjungierter Operator des Hilbertschen Raumes, T ein selbstadjungierter Operator endlichen Ranges (d. h. mit endlichdimensionalem Wertebereich), $\Phi(\lambda)$ eine „beliebige“ Funktion ($-\infty < \lambda < \infty$) und $\xi(\lambda)$ eine feste Funktion, die nur von H und T abhängt aber von Φ abhängt. Lifšic hat keinen strengen Beweis für (1) gegeben und auch die Gültigkeitsgrenzen von (1) nicht bestimmt. In vorliegender Arbeit wird ein strenger Beweis von (1) für den Fall angegeben, daß $\Phi(\lambda)$ von der Form ist: $\Phi(\lambda) = \int_{\Pi} \frac{1}{\lambda - z} dm(z)$ ($-\infty < \lambda < \infty$),

wo Π die Menge aller nichtreellen komplexen Zahlen bedeutet und wo m eine für alle Borelschen Mengen in Π definierte, komplexwertige, absolut additive Mengenfunktion ist, für die $\int_{\Pi} \frac{1}{|\operatorname{Im} z|^k} |dm(z)| < \infty$ ($k = 1, 2$) gilt. Die Funktion $\xi(\lambda)$ wird eindeutig bestimmt (bis auf

eine Nullmenge), und $\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \sum |\tau_i|$, wo τ_i die Eigenwerte von T sind. Formel (1) bleibt nicht für alle Funktionen $\Phi(\lambda)$ gültig, die auf $(-\infty, \infty)$ absolut stetig und von beschränkter Schwankung sind (die Klasse aller solcher Funktionen sei mit V_a bezeichnet). Wenn aber $H^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ in dem Sinne gegen $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}$ strebt, daß $(E_{\lambda}^{(n)} f, g) \rightarrow (E_{\lambda} f, g)$ für jedes Paar von Elementen f, g gilt, dann folgt aus der Gültigkeit der Formel

$$\operatorname{Sp} \{ \Phi(H^{(n)} + T) - \Phi(H^{(n)}) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{(n)}(\lambda) d\Phi(\lambda) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

für einen festen Operator T und für alle $\Phi \in V_a$ auch die Gültigkeit von (1), und zwar ist dann $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\mu) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{(n)}(\mu) d\mu$. B. Sz.-Nagy.

Slobodjanskij, M. G.: Über die Transformation des Problems des Minimums eines Funktional in das Problem des Maximums. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 733—736 (1953) [Russisch].

Definitionen: A ein positiv definiter Operator im reellen Hilbertschen Raume \mathfrak{H} : $(Au, u) \geq x(u, u)$, $x > 0$; $D(A)$ Definitionsbereich von A . $A = \sum_{i=1}^m A_i$, A_i selbstadjungierte positive Operatoren: $(A_i u, u) \geq 0$, $D(A_i) \supset D(A)$, $i = 1, \dots, m$. $(A_1 u, u) \geq x_1(u, u)$, $x_1 > 0$. u_0 das minimale Element des Funktional $F_f^A(u) = (Au, u) - 2(f, u)$, $f \in \mathfrak{H}$, $u \in D(A)$. $H(\sigma) = \sum_{i=1}^m (A_i u_i, u_i)$, $u_i \in D(A_i)$, $(\sigma) = (u_i)$, wobei $\sum_{i=1}^m A_i u_i = f$. Ergebnis: $\min H(\sigma) = -F_f^A(u_0)$. Das Ergebnis wird angewandt auf das Randwertproblem: $Au = \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right] = f(x)$, $u(a) = \dots = u^{(m-1)}(a) = u(b) = \dots = u^{(m-1)}(b) = 0$. K. Maurin.

Berman, D. L.: Die Approximation periodischer Funktionen durch lineare trigonometrische Polynomoperationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 1249—1252 (1953) [Russisch].

La terminologie et les notations sont celles d'une note antérieure (ce Zbl. 48, 95). On désigne par K un sous-ensemble de la sphère unité de E , soumis à la condition $f \in K \rightarrow f_t \in K$ ($-\infty < t < +\infty$) et l'on note

$$\varrho^{(\sigma_n)} = \sup_{f \in K} \|f - \sigma_n(f)\|, \quad \varrho^{(U)} = \sup_{f \in K} \|f - U(f)\|.$$

Le résultat principal est l'inégalité $\varrho^{(\sigma_n)} \leq \varrho^{(U)}$. On étend ces considérations aux espaces de fonctions définies dans l'espace euclidien à k dimensions.

G. Marinescu.

Berman, D. L.: Über gleitende lineare trigonometrische Polynomoperationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 693—694 (1953) [Russisch].

On démontre que les opérations polynomielles trigonométriques qui vérifient la relation $U(f^*) = [U(f)]^*$, où $f^*(x) = f(x + a)$, sont de la forme $U(f) = \sigma_T(f) =$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) T(x - t) dt.$$

G. Marinescu.

Gál, I. S.: On sequences of operations in complete vector spaces. Amer. math. Monthly 60, 527—538 (1953).

A lucid expository account, with proofs and applications, of the Banach-Steinhaus theorem concerning linear operators on a complete vector space and of the principle of condensation of singularities. The proof of the Banach-Steinhaus theorem does not use the idea of category and is quite elementary (compare I. S. Gál, this Zbl. 46, 335). The applications are to the theory of summability, Fourier series, and Lagrange interpolation. W. W. Rogosinski.

Ritt, R. K.: A condition that $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T^n = 0$. Proc. Amer. math. Soc. 4, 898—899 (1953).

Let T be a bounded linear transformation of a (complex) Banach space. The following conditions are sufficient that $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} T^n = 0$: (1) the spectrum of T is interior to the unit circle, with the possible exception of $\lambda = 1$, (2) there are $M > 0$ and $\eta > 0$ such that $\|(\lambda - 1)(\lambda E - T)^{-1}\| \leq M$ for every λ in the resolvent set, such that $|\lambda| \geq 1$ and $|\lambda - 1| \leq \eta$.
A. Alexiewicz.

Atkinson, F. V.: On relatively regular operators. Acta Sci. math. 15, 38—56 (1953).

Ein beschränkter Operator T eines komplexen Banachraumes heißt relativ regulär, wenn es einen beschränkten Operator X mit $TXT = T$ gibt. Dies ist wahrscheinlich eine schärfere Forderung als die Abgeschlossenheit des Bildraumes von T . Beispiele solcher Operatoren sind die endlichdimensionalen, die Projektionen und die Operatoren der Form $S + V$, S invertierbar, V vollstetig. Mit $\alpha(T)$ wird die Dimension des Nullraumes von T bezeichnet, mit $\beta(T)$ die des Nullraumes des adjungierten Operators T' . Ist für zwei beschränkte Operatoren U, V der Operator $I - UV$ relativ regulär und hat er die Defekte $\alpha = m, \beta = n$, wobei einer $< \infty$ ist, so gilt dasselbe für $I - VU$. Sind X, T beschränkt und ist $TXT - T$ relativ regulär, so auch T , und die Defekte von T sind nicht größer als die von $TXT - T$. Ist ST relativ regulär und $\alpha(TS) < \infty$, so ist T relativ regulär. Sind S und T relativ regulär, $\alpha(S) = m < \infty, \beta(S) = n, \alpha(T) = m' < \infty, \beta(T) = n'$, so ist ST relativ regulär und $\alpha(ST) \leq m + m', \beta(ST) = n - n'$. Sind $m, n, m' < \infty, n' = \infty$, so sind ST und TS ebenfalls relativ regulär, und $\beta(ST) = \beta(TS) = \infty$, während $\alpha(ST)$ und $\alpha(TS)$ beide $\leq m + m'$ sind. Ersetzt man in allen vorangehenden Sätzen „relativ regulärer Operator“ durch „Operator mit abgeschlossenem Bildraum“, so bleiben die Sätze richtig. Ist T relativ regulär und $\alpha(T)$ oder $\beta(T)$ endlich, so gibt es ein $\varrho > 0$, so daß alle T_1 mit $\|T - T_1\| < \varrho$ ebenfalls relativ regulär sind und $\alpha(T_1) \leq \alpha(T), \beta(T_1) \leq \beta(T)$ gilt. Ebenso bleibt $T - V$ für vollstetiges V stets relativ regulär, und die endlichen Indizes $\alpha(T), \beta(T)$ bleiben endlich. Auch der Fall der analytischen Störung wird ausführlich untersucht. Ist T relativ regulär, $\alpha(T) < \infty, \beta(T) = \infty, A_\lambda$ analytisch in einer Umgebung von 0 und $A_0 = 0$, so gibt es ein $\varrho > 0$, so daß $T - A_\lambda$ in $0 < |\lambda| < \varrho$ relativ regulär, $\alpha(T - A_\lambda) = m' \leq m, \beta(T - A_\lambda) = \infty$ ist. In dem größten zusammenhängenden Gebiet der komplexen Ebene, das $\lambda = 0$ enthält, in dem $T - A_\lambda$ existiert und $\alpha(T - A_\lambda) < \infty$ ist, gilt mit Ausnahme abzählbar vieler, sich nicht im Innern häufender Stellen (verallgemeinerte Eigenwerte) überall $\alpha(T - A_\lambda) = m', \beta(T - A_\lambda) = \infty$. Ist T_λ eine analytische Funktion, so werden die Spektralbereiche $\text{Sp}(m, n)$ eingeführt, das sind offene zusammenhängende Gebiete, in denen T_λ relativ regulär ist und $\alpha(T_\lambda) = m, \beta(T_\lambda) = n$ gilt bis auf abzählbar viele isolierte Stellen. Für einen solchen Spektralbereich werden eine verallgemeinerte Resolvente und die Projektionen auf die Nullräume von T_λ bzw. T'_λ als analytische Funktionen von λ untersucht.
G. Köthe.

Hille, Einar: Le problème abstrait de Cauchy. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 12, 93—103 (1953).

Une conférence sur les résultats de l'A. concernant le problème abstrait de Cauchy. Soit X un espace de Banach (complexe), U un opérateur linéaire (en général non borné) dans X , de domaine $D(U)$. On se pose le problème suivant dit problème abstrait de Cauchy (PAC): trouver une fonction $y(t)$ définie pour $t > 0$ telle que (1) $y(t) \in D(U)$, (2) $y(t)$ soit absolument continue, (3) $t'y'(t) = y(t)$ pour $t > 0$, (4) $\lim_{t \rightarrow 0+} \|y(t) - y_0\| = 0$, y_0 étant donné d'avance.

La solution non-triviale telle que $y_0 = 0$ est dite nulle; la solution est du type normal ω lorsque $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|y(t)\| = \omega < \infty$. L'A. démontre les propositions suivantes. (a) Si l'opérateur U est clos et que ses valeurs propres ne sont denses dans aucun demi-plan droit, alors pour chaque $y_0 \in X$ le PAC n'admet qu'une solution du type normal. (b) L'opérateur U étant clos, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3) admette une solution nulle du type normal $\leq \omega$ est que l'équation $Ux = \lambda x$ admette une solution $x = x(\lambda)$ non nulle, holomorphe dans le demi-plan $\Re(\lambda) > \omega$ et bornée dans chaque demi-plan $\Re(\lambda) \geq \omega + \varepsilon, \varepsilon > 0$. (c) Si l'opérateur engendre un semi-groupe $S(t)$ de transformations satisfaisant à la condition (5) $\lim_{t \rightarrow 0+} \|S(t)x - x\| = 0$, le PAC admet $S(t)y_0$ comme solution unique du type normal.

Ainsi le problème se pose de savoir quand U engendre un semi-groupe satisfaisant à (5). M. Phillips a démontré qu'il en faut et il suffit que la résolvante $R(\lambda, U)$ existe pour $\lambda > \alpha$ et que $\|R^{(n)}(\lambda, U)\| \leq M n! (\lambda - \alpha)^{-n-1}$, l'opérateur U étant supposé clos et de domaine dense. L'A. démontre qu'il en est ainsi si et seulement si $R(\lambda, U)$ existe pour $\Re(\lambda) > \omega$ et

$R(\lambda, U)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$, $T(t)$ désignant une famille fortement continue de transfor-

mations linéaires bornées telle que $T(0) = 1$. La réciproque est vraie si le PAC n'admet qu'une solution du type normal et telle que $\|y(t)\| \leq M(\alpha) e^{\alpha t} \|y_0\|$ pour chaque $\alpha > \omega$. Enfin l'A. applique des théorèmes précédents pour construire des solutions „explosives à éclatement retardé“.

A. Alexiewicz.

Kato, Tosio: Integration of the equation of evolution in a Banach space. J. math. Soc. Japan **5**, 208—234 (1953).

The author discusses the equation of evolution in a Banach space X :

$$(1) \quad \text{strong } \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (U(t+h, s) - U(t, s)) x = A_t U(t, s), \quad t > s, \quad \text{strong } \lim_{t \downarrow s} U(t, s) x = x \in X.$$

He assumes the following conditions: (i) The domain D of the closed linear operator A_t is independent of t and is strongly dense in X , and the range of A_t is contained in X . (ii) For $\alpha > 0$, the resolvent $(I - \alpha A_t)^{-1}$ exists as a bounded linear operator on X to X with the norm ≤ 1 . (iii) The operator $B(t, s) = (I - A_t)(I - A_s)^{-1}$ is uniformly bounded in norm for every $t \geq s$. (iv) $B(t, s)$ is, at least for some s , of bounded variation in t in norm, viz. $\sum_j \|B(t_j, s) - B(t_{j-1}, s)\| \leq N(a, b) < \infty$ for every partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

(v) $B(t, s)$ is, at least for some s , weakly differentiable in t and the differential quotient is strongly continuous in t . Under these conditions, it is proved that the limit

$$(2) \quad U(t, s) x = \text{strong } \lim_{\substack{\max |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0 \\ s = t_0 < \dots < t_n = t}} \prod_{k=0}^{n-1} \exp((t_k - t_{k-1}) A_{t_{k-1}}) x,$$

exists for every $x \in X$ and gives the unique solution of (1) at least for $x \in D$. Herein $\exp(t A_s)$, $t \geq 0$, is the semi-group of operators with the infinitesimal generator A (E. Hille, Functional Analysis and Semi-groups, New York 1948, this Zbl. **33**, 65; K. Yosida, this Zbl. **37**, 353). The result is more general than a result by R. S. Phillips, obtained in another way [Trans. Amer. math. Soc. **74**, 199—221 (1953)]; Phillips discussed the special case $A_t = A + B_t$.

K. Yosida.

Charazov, D. E.: Zur Theorie der linearen Gleichungen in Banachschen Räumen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **19**, 163—171 (1953) [Russisch].

Sei T_λ ein linearer vollstetiger Operator, der einen Banachraum B in sich abbildet und analytisch vom Parameter λ abhängt, λ in einem Gebiet A der komplexen Ebene. $(E - T_\lambda)^{-1}$ existiert dann entweder für kein λ , oder für alle $\lambda \in A$ mit möglicher Ausnahme einer Menge isolierter Punkte. Der Satz gilt noch unter der schwächeren Voraussetzung, daß T_λ in isoliert liegenden Ausnahmepunkten μ nicht analytisch ist, sondern eine gewisse Laurententwicklung gestattet, in der die Potenzen $(\lambda - \mu)^{-1}$, $(\lambda - \mu)^{-n+1}$, $(\lambda - \mu)^{-n}$ auftreten (n beliebig). Dies wird auf Gleichungen der Form

$$u(x) - \int_a^b K(x, y; \lambda) u(y) dy = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) \in L_p, \quad p > 1,$$

angewandt. Ähnliche Ergebnisse stammen von Gochberg (dies. Zbl. **42**, 346). Verf. hat schon früher den Spezialfall des Hilbertraumes bearbeitet.

K. Zeller.

Leżański, T.: The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces. Studia math. **13**, 244—276 (1953).

Let X be a Banach space, let Ξ be a closed linear subspace of the space of all linear (— additive and continuous) functionals on X , let \mathfrak{K} be a Banach algebra (with the unit I) of endomorphisms of the space Ξ , and let F be a fixed linear functional defined on \mathfrak{K} . We shall interpret the operators $K \in \mathfrak{K}$ as bilinear functionals Kq, x defined on $\Xi \times X$ ($q \in \Xi$, $x \in X$). Instead of $F(K)$ we shall also write $F_{q, x}\{Kq, x\}$. The functional F determines uniquely an operator $T = T_F$ defined by the formula: $T_F q, x = F_{q, x}\{Iq, x\}$. We suppose that $T \in \mathfrak{K}$ and that, for each $K \in \mathfrak{K}$, $x_0 \in X$ and $q_0 \in \Xi$, the operator M , defined by formula $Mq = Kq, x_0 + q_0$, belongs to \mathfrak{K} and $F(M) = KT, q_0, x_0$. The author examines the linear equation (1) $q + KTq = q_0$ where $K \in \mathfrak{K}$, $q_0 \in \Xi$ and the solution $q \in \Xi$. The determinant of this equation (more precisely: of the operator $I + KT$) is the absolutely convergent series $D(F) = D_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$, where $a_0 = 1$,

$$a_n = \frac{1}{n!} \left\{ F_{y_1, y_1} \{ F_{y_2, y_2} \{ \dots \{ F_{y_n, y_n} \} K \left(\begin{smallmatrix} y'_1, \dots, y'_n \\ y_1, \dots, y_n \end{smallmatrix} \right) \} \dots \} \right\} \text{ and } K \left(\begin{smallmatrix} y_1, \dots, y_n \\ y_1, \dots, y_n \end{smallmatrix} \right)$$

is the determinant of the matrix $(Kq, y_i)_{i, j=1, \dots, n}$. Equation (1) has a (necessarily unique) solution q for each $q_0 \in \Xi$ if and only if $D_0 \neq 0$. The formula for this solution q and the formula for the determinant D_0 are generalizations of analogous formulas in the Fredholm

theory of integral equations. The author defines also some subdeterminants D_n of order n ($n = 1, 2, 3, \dots$) which are $2n$ -linear functionals on $\Xi \times X$ and are generalizations of Fredholm's subdeterminants. If $D_0 = 0$, then $D_n \neq 0$ for a positive integer n . Let n be the least integer with this property. Then the equation $q + KTq = 0$ has exactly n linearly independent solutions, and equation (1) has solutions under some additional hypothesis analogous to the hypothesis in the Fredholm theory of integral equations. — In the second part of the paper the author gives some applications of his theory to the case where Ξ is one of the spaces L^p , M , C , l^p , m , and K and T are integral operators or matrix operators. In the case of an infinite system of linear equations with an infinite number of unknown variables (the spaces l or m) the author proves that his notion of the determinant is a generalization of Koch's determinant. He formulates a generalization of Cramer's formulas and proves that he determinant D_0 is a multiplicative functional, i. e. the determinant of the superposition $I + T_1)(I + T_2)$ is equal to the product of the determinants of the operations (i. e. the infinite square matrices) $I + T_1$ and $I + T_2$. — Leżański's determinant theory of linear equations in arbitrary Banach spaces seems to be an essential progress in the theory of linear equations. The analogy to the Fredholm theory of integral equations is complete. Leżański's theory seems also to be simpler than that of Puston [this Zbl. 43, 110; Proc. London Math. Soc., II. Ser. 53, 109—124 (1951)].

R. Sikorski.

Richter, Vladimir: Gewöhnliche Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum. Arch. der Math. 4, 477—484 (1953).

Il est connu que le théorème d'existence de Peano pour les équations différentielles $y' = f(x, y)$ ne s'étend pas lorsque y prend ses valeurs dans un espace de Banach E [x réel, continue dans un voisinage de (x_0, y_0) , et à valeurs dans E]. La contribution de l'A. à cette question consiste en la remarque élémentaire que si la méthode de construction de Cauchy-ipschitz conduit à une solution „polygonale" approchée, prenant ses valeurs dans une partie compacte K de E (indépendante de l'approximation considérée) alors le théorème de Peano est valable, sa démonstration s'étendant sans aucune modification. Mais l'A. ne donne aucun critère général moyennant lequel la condition précédente serait réalisée, et se contente de signaler quelques exemples très simples où elle l'est, notamment lorsque E est un espace l^p . L'A. signale que la ligne 6 du bas de la p. 482 doit être remplacée par le texte suivant: „Jetzt kann man nach dem Diagonalverfahren zu jeder Folge $\{x^n\}$ aus K^p eine konvergente Auswahlfolge $\{x^{n^k}\}$ bilden. Daher ist K^p kompakt" (Note du réf.: il s'agit là d'un théorème bien connu, cas particulier d'un théorème de la théorie générale des espaces l^p).

J. Dieudonné.

Sikkema, P. C.: Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. I. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 465—477 (1953).

Verf. setzt die in seinem entsprechend benannten Lehrbuch (dies. Zbl. 51, 344) begonnenen Untersuchungen fort. $F(D) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r D^r$ sei ein Differentialoperator unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und $y(x)$ sei eine ganze Funktion der endlichen Ordnung σ . Die Problemstellung betrifft die Frage, unter welchen Voraussetzungen über $F(D)$ die Funktion $h(x) = F(D)y(x)$ vom selben Typ wie $y(x)$ ist, bzw. wann sie von einem geringeren Typ ist. In dem genannten Lehrbuch wurde diese Frage für $0 < \sigma < 1$, für den Minimumtyp der Ordnung 1 und für den Normaltyp der Ordnung 1 beantwortet. Die vorliegenden Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Fall $\sigma > 1$ und dem Maximumtyp der Ordnung 1. Schon im Fall des Normaltyps τ der Ordnung 1 zeigt es sich, daß für die entsprechenden Kriterien grundsätzlich andere Gesichtspunkte maßgebend sind als in den übrigen Fällen, weil hier wesentlich die Nullstellen der Funktion $F(z)$ im Bereich $|z| \leq \tau$ eingehen. Bei der jetzt behandelten erweiterten Fragestellung spielen die Nullstellen von $F(z)$ in ihrer Gesamtheit eine Rolle und können nicht mehr nur in einem beschränkten Bereich betrachtet werden. Dieser Umstand setzt einer allgemeinen Antwort erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Verf. behandelt die Problemstellung daher zunächst unter der einschränkenden Annahme, daß die Funktion $F(z)$ überhaupt nur endlich viele Nullstellen besitzt. Die vorliegende Arbeit stellt nur den Anfang dieser Untersuchungen dar. Eine Fortsetzung ist angekündigt.

H.-J. Kowalsky.

Mikusinski, J.G.: On the operational calculus. Zastosowania Mat. 1, 28—38, russ. u. engl. Zusammenfassgn. 38—39, 39—40 (1953) [Polnisch].

The differential operator d/dt often behaves in calculations like an algebraic quantity; consequently, it is possible to perform operations with it just as with ordinary numbers. In this way a great many of new operators are obtained. O. Heaviside made extensive use of this property to carry out various calculations applicable to electrical engineering. Those calculations were purely formal. Similarly, operations with irrational and with imaginary numbers used to be performed only formally, long before the appearance of theories defining the mathematical sense of those numbers. The historical development of Heaviside's calculus

did not, at first, tend towards a generalization of the number concept, but was based on the Laplace transform. Treated thus, the operational calculus became a precision tool of research but lost its original character, because the place of former operators was taken in it by analytical functions. Moreover, the new treatment restricted the applicability range of the calculus to the so called transformable functions. It is possible to avoid the above disadvantages by turning again to a direct interpretation of Heaviside's symbols by means of an appropriate generalization of the number concept. This new generalization comprises not only complex numbers and all Heaviside's operators, but also functions and many other mathematical concepts. It is possible to construct both an algebra and an analysis in which operators play the same part as that played by numbers in classical analysis. Autoreferat.

Rothe, E. H.: Gradient mappings. Bull. Amer. math. Soc. 54, 5—19 (1953).

This is an address delivered before the Norman meeting of the Amer. math. Soc. Gradients in Banach spaces have been first used by M. Golomb (this Zbl. 9, 312) and much studied by the author (specially in this Zbl. 42, 344). The definition of gradient mapping and gradient in a Banach space is first of all recalled [see Ann. of Math., II. Ser. 47, 580—592 (1946) and this Zbl. 30, 260]. Then three simple examples are given, in particular that of the Hammerstein scalar, already treated in the article just mentioned (this Zbl. 42, 344). The author shows afterwards that many problems in Functional Analysis are equivalent to the determination of the zeroes of a gradient. A particular case of such zeroes is when they correspond to extrema of variational problems. Mentioning this the author points out that the general theory may not be directly available, but he sketches in a few words, though with extreme clarity, how it is possible to extend its domain of applicability. Generally the zeroes of a gradient define critical points, in the sense of Morse, and the last part of the address sums up the most important results obtained by the author, in particular the relation between the Morse type numbers and the Leray-Schauder index of a mapping. It enables him to determine, in a few remarkable cases, the number of solutions of a functional equation, which the general theory of the index does not yield. C. Racine.

Hosszu, Miklós: On the functional equation of distributivity. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 159—166 (1953).

Verf. löst die Funktionalgleichung $F[G(x, y), z] = G[F(x, z), F(y, z)]$ unter Voraussetzung der strengen Monotonie und zweimaligen Differenzierbarkeit der Funktionen F und G vollständig [für Spezialfälle s. z. B. A. R. Schweitzer, Bull. Amer. math. Soc. 21, 23—29 (1914); Ryll-Nardzewski, dies. Zbl. 38, 210 und J. Aczél, Zur Theorie der Mittelwerte (russisch) Colloquium math. im Erscheinen]. Es gibt drei Lösungssysteme:

- (1) $F(x, y) = f^{-1}[f(x)g(y) + h(y)]$, $G(x, y) = f^{-1}[kf(x) + (1-k)f(y)]$, $k \neq 0, 1$, $g(t) \equiv 1, 0$,
- (2) $F(x, y) = f^{-1}[h(y) - f(x)]$, $G(x, y) = f^{-1}\{f(y) + \varphi[f(x) - f(y)]\}$, $(\varphi(t) = -\varphi(t) \neq 0)$,
- (3) $F(x, y) = f^{-1}[f(x) + h(y)]$, $G(x, y) = f^{-1}\{f(y) + \varphi[f(x) - f(y)]\}$.

Es werden auch weitere Bemerkungen über diese Funktionalgleichung, sowie über die allgemeinere Funktionalgleichung $F[G(x, y), z] = K[F(x, z), F(y, z)]$ gemacht. (Bemerkung des Ref.: die in der Fußnote 7, S. 164 erwähnte Differenzierbarkeit bezieht sich auf die Funktion $G(x, y)$, woraus die Stetigkeit der dort figurierenden Funktion $\lambda(x, y)$ folgt, von der auch in dem Text keine Differenzierbarkeitseigenschaft vorausgesetzt wird.) J. Aczél.

Hosszu, M.: A generalization of the functional equation of bisymmetry. Studia math. 14, 100—106 (1953).

Die von D. C. Murdoch (dies. Zbl. 20, 347) für quasi-Gruppen, vom Ref. (dies. Zbl. 30, 27) für reelle Zahlen und von L. Fuchs (dies. Zbl. 41, 155) für vollständig geordnete Systeme untersuchte Gleichung $F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)]$ der Bisymmetrie wird vom Verf. stark verallgemeinert: (1) $F[G(x, y), H(u, v)] = f[g(x, u), h(y, v)]$ und für reelle streng monotone derivierbare Funktionen gelöst:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \chi[\Phi(x) + \Psi(y)], & f(x, y) &= \chi[\varphi(x) + \psi(y)], \\ G(x, y) &= \Phi^{-1}[X_1(x) + Y_1(y)], & H(x, y) &= \varphi^{-1}[X_2(x) + Y_2(y)], \\ g(x, y) &= \varphi^{-1}[X_1(x) + X_2(y) + k], & h(x, y) &= \varphi^{-1}[Y_1(x) + Y_2(y) - k] \end{aligned}$$

(g im Original mit Druckfehler!). [Bemerkung des Ref.: $\pm k$ könnte in die Funktionen X_1, Y_1 mit einbezogen werden.] Also bestimmt hier eine Funktionalgleichung

vier Funktionen, und alle sind von der Form (2) $z = Z[X(x) + Y(y)]$. — Es werden auch verschiedene Spezialfälle von (1) untersucht. Endlich wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit von Funktionen in der Gestalt (2) gegeben. Sie behauptet die Abhängigkeit der Funktionen $z(x, u)$, $z(x, v)$, $z(y, u)$, $z(y, v)$.
J. Aczél.

Praktische Analysis:

Picone, Mauro: Sull'opera matematica dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nel decorso quarto di secolo della sua esistenza. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 27—44 (1953).

Italianische Fassung des in dies. Zbl. 50, 120 besprochenen Berichtes.

Aitken, A. C.: Über die Zerlegung von Polynomen durch iterative Methoden. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 6 (58), 71—86 (1953) [Russisch].

Russische Übersetzung der in dies. Zbl. 44, 130 besprochenen Arbeit durch A. Ja. Belostockij.

Forsythe, George E.: Tentative classification of methods and bibliography on solving systems of linear equations. Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser. 29, 1—28 (1953).

Klassifikation der Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme nach folgenden Gesichtspunkten: I) sog. direkte Methoden, II) sog. endliche Iterationsmethoden, wie etwa das Verfahren der konjugierten Gradienten, III) unendliche Iterationsprozesse. Ferner werden unterschieden: α) Stationäre Methoden, d. h. solche, bei denen alle Rechenschritte gleichartig sind, β) Teilweise stationäre Prozesse, γ) Nichtstationäre Prozesse. — Auf diese Weise erhält man 9 Klassen von Methoden: I α , I β , ..., III γ , von denen aber I β , I γ , II γ leer sind. — Die 450 Literaturstellen sind einmal nach dieser Klasseneinteilung und einmal alphabetisch nach Verfassern eingeordnet.
H. Rutishauser.

Langefors, B.: Approximate solution of simultaneous equations by means of transformation of variables. Applications to aeronautical problems. Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes 1953, Nr. 7, 26 p. (1953).

Bei manchen mechanischen oder elektrischen Aufgaben treten lineare Gleichungssysteme der Art auf, daß zwischen $2n$ Variablen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, die zu Spalten x, y zusammengefaßt werden mögen, Relationen der Gestalt $y = Vx$ bestehen, wo V eine Diagonalmatrix ist (statt Zahlen können allgemeiner in der Diagonale von V auch quadratische Untermatrizen stehen), und daß ferner den x_1, \dots, x_n sowie den y_1, \dots, y_n Systeme linearer Bedingungsgleichungen auferlegt sind. Die Arbeit betrifft nun die angenäherte Lösung solcher Gleichungssysteme, indem man die x_1, \dots, x_n willkürlich auf einen linearen Teilraum kleinerer Dimension einschränkt. Es wird gezeigt, wie man solche Teilräume so wählen kann, daß die approximative Lösung nur wenig von der richtigen Lösung abweicht; ferner wird gezeigt, wie nach Vorgabe des Teilraums die approximative Lösung durch eine Extremalforderung gewonnen werden kann. Der Vorteil der approximativen Behandlung liegt in einer Verminderung des Rechenaufwands. Verf. empfiehlt die Benützung bei Systemen mit einer großen Anzahl von Unbekannten, um vor der umständlicheren Berechnung der exakten Lösung das Ausgangszahlenmaterial zu kontrollieren und einen vorläufigen Überblick über die zu erwartende Lösung zu gewinnen, und er macht einige Anwendungen auf Probleme des Flugzeugbaus.
A. Stöhr.

Morris, J. and J. W. Head: Note on Lin's iteration process for the extraction of complex roots of algebraic equations. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 391—397 (1953).

Die Linsche Faktorisierungsmethode (dies. Zbl. 26, 235) wird an einem biquadratischen Polynom $F(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ illustriert. Um einen quadratischen Faktor zu finden, sei $g_1(x) = x^2 + (a_1/a_2)x + a_0/a_2$; man könnte an Stelle von diesem auch irgendein anderes normiertes quadratisches Polynom als $g_1(x)$ nehmen. Lin bestimmt eine Folge $g_m(x)$ von normierten quadratischen Polynomen durch den folgenden Iterationsalgorithmus: $F(x) = f_m(x)g_m(x) + c_m g_{m+1}(x)$ ($m = 1, 2, \dots$). Wenn $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) = g(x)$ existiert, so ist $g(x)$ ein Faktor von $F(x)$. Die Koeffizienten der $g_m(x)$ können durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden, wobei es ausreichend ist, bequeme Näherungswerte einzusetzen, da bei

solchen Iterationsprozessen, wenn sie konvergieren, geringfügige Fehler keinen endgültigen Effekt haben können. Um ein Konvergenzkriterium zu finden, sei x eine Wurzel von $F(x)$, so daß also $f_m(x) g_m(x) = -c_m g_{m+1}(x)$, also $g_{m+1}(x) = R_m R_{m-1} \dots R_1 g_1(x)$ wobei $R_\mu = -f_\mu(x)/c_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$). Es wird somit x eine Wurzel von $g(x)$ sein, wenn fast alle $|R_\mu| < 1$ sind; für die Konvergenz wird daher hinreichend sein, daß diese Ungleichungen für x in der Nähe einer Wurzel erfüllt sind. Ferner wird eine notwendige Konvergenzbedingung hergeleitet, welche aber praktisch wertlos zu sein scheint, da sie die Koeffizienten des quadratischen Faktors $g(x)$ impliziert. Für den Fall eines Polynoms $F(x)$ vom Grade n wird sodann der entsprechende Algorithmus für lineare Divisoren diskutiert.

H. Schwerdtfeger.

Banachiewicz, T.: Sur les thèses de deux notes de T. Wazewski relatives aux cracoviens et matrices. Ann. Soc. Polon. Math. 24, Nr. 2, 153—156 (1953).

Wazewski, T.: Sur l'algorithme des méthodes d'éliminations successives. Ann. Soc. Polon. Math. 24, Nr. 2, 157—164 (1953).

Es handelt sich um eine — schon in zwei früheren Noten des zweiten Verf. W. begonnene — Kontroverse über die Frage, ob einige Verfahren des ersten Verf. B. zur Auflösung linearer Gleichungssysteme „numerisch identisch“ sind mit bekannten Abarten der sukzessiven Elimination unter Benutzung des Matrizenkalküls, insbesondere um das Verfahren von Doolittle; ferner darum, ob die von B. an Stelle von Matrizen benutzten sog. Krakovianen gegenüber den Matrizen Vorteile bringen oder nicht.

R. Zurmühl.

Tyler, G. W.: Numerical integration of functions of several variables. Canadian J. Math. 5, 393—412 (1953).

In Analogie mit Formeln der einfachen numerischen Quadratur kann man auch zur Integration von Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen Näherungsformeln aufstellen, bei welchen einerseits die bequeme Verteilung der zu benutzenden Funktionswerte maßgebend ist, andererseits Formeln, die direkt auf möglichst große Genauigkeit hinzielen. Für Integration über ein Rechteck werden Formeln mit 8, 12, 13, 21 Funktionswerten gegeben und für Integration einer Funktion von drei Variablen über ein Parallelepipet Formeln mit 6, 9, 21, 42 Werten. Genauigkeitsbetrachtungen werden angestellt. Ein allgemeiner Ansatz, der orthogonale Polynome benutzt, wird erwähnt. Schließlich folgen einige Bemerkungen über krummlinig, insbesondere von Parabelbögen begrenzte Integrationsgebiete und für den zuletzt genannten Spezialfall Formeln mit 5 und 13 Funktionswerten.

E. J. Nyström.

Laville, G.: Résolution graphique d'intégrales utilisées en analyse harmonique et en calcul symbolique. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 16, 153—168 (1953).

Kennt man den Endpunkt der Kurve, die man erhält, wenn man $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta = X + iY$ für $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufträgt, so liefern die Projektionen der Sehne vom Anfangspunkt nach dem Endpunkt $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \cos \theta d\theta$ und $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \sin \theta d\theta$. Ist $f(\theta)$ ein Polynom 3. Grades, dann kann man den Endpunkt ohne Kenntnisse des Kurvenverlaufes konstruieren. Man benötigt dazu lediglich f, f', f'', f''' an den Stellen θ_0 und θ_1 . Die Ableitungen werden durch Funktionswerte ausgedrückt und so leicht berechenbar. Ist $f(\theta)$ von anderer Bauart, dann erfolgt stückweise Approximation mit Polynomen 3. Grades. Die Auswertung von $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) e^{i\theta} d\theta$ läßt sich leicht auf den Grundfall zurückführen. Erläuternde Beispiele beschließen die Arbeit.

H. Unger.

Southwell, R. V.: Some extensions of „Rayleigh's principle“. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 257—272 (1953).

In der Eigenwertaufgabe $\mathcal{D}u = \lambda \mathcal{D}'u$ (λ Eigenwert, \mathcal{D} und \mathcal{D}' selbstadjungierte Differentialoperatoren, \mathcal{D} positiv definit, u Eigenfunktion) wird angenommen, eine Vergleichsfunktion w lasse sich nach den normierten Eigenfunktionen w_k entwickeln: $w = \sum_k A_k w_k$

und diese Reihe sei gliedweise (so oft es gebraucht wird) differenzierbar. w_k gehöre zum Eigenwert λ_k , die λ_k seien geordnet: $\dots \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Der mit w gebildete Rayleighsche Quotient λ_k kann dann nicht zwischen λ_{k-1} und λ_{k+1} liegen (diese Erweiterung des Rayleighschen Prinzips nennt Verf. Theorem von Miss G. Vaisey). Werden nach dem Iterationsverfahren (vom Verf. Identification genannt) aus $w = w_0$ die Vergleichsfunktionen $w(1), w(2), \dots$ nach $\partial w_{(n+1)} = A \partial w_{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) gebildet, wobei A eine frei wählbare Konstante ist, und bildet man die Schwarzschen Konstanten $I = I^{(0)}, I', I'', \dots$ nach $I^{(n)} = \int w_{(n)} \partial w_{(n)} d\tau - \sum_k A_k^2 / \lambda_k^{(n)} (\int \dots d\tau$ Integration über das Grundgebiet, obiges λ_k ist dann $= A / I^{(n)}$), so werden folgende Schranken aufgestellt: 1) Aus I, I', I'' berechne man $2(1 + \varepsilon) = I'' + I, I'$. Dann liegt λ_k für mindestens ein k zwischen den Schranken $1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon^2$. 2) Kennt man noch I^{IV} , so bestimme man ein anderes ε aus $4(1 + \varepsilon)^2 I'' = I + 2I'' + I^{IV}$; dann liegt λ_k für mindestens ein k zwischen den Schranken $1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon^2$. Zahlenbeispiele. L. Collatz.

Southwell, R. V. and Gillian Vaisey: On some eigenvalue problems of exceptional difficulty, exemplified by a case of elastic instability. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 453—480 (1953).

Kombinationen der in der vorangehenden Arbeit genannten Methoden mit anderen (bekannten) Methoden werden auf eine technische Eigenwertaufgabe angewandt, in der die drei folgenden Erscheinungen auftreten: 1) die „erste“ d. h. zum Eigenwert λ_1 mit kleinstem Betrage gehörige) Eigenfunktion hat im Grundgebiet beiderlei Vorzeichen (Auftreten von Knotenlinien); 2) es treten Eigenwerte beiderlei Vorzeichens auf; 3) die 2 oder 3 kleinsten Beträge von Eigenwerten sind nahezu gleich groß. Die Differentialgleichung lautet: $1) w = (P_x w_x - S w_y)_x + (P_y w_y - S w_x)_y = 0$ mit $w_x = \partial w / \partial x$; $w_y = \partial w / \partial y$; P_x, P_y, S sind Polynome 3. Grades in x, y (rechteckiger Doppel-T-Träger mit eingespannten Ecken, gleichförmige Druckbelastung längs einer der längeren Seiten). Die früher mit Relaxationsmethoden erhaltenen Ergebnisse und Eigenwert-Schranken werden in der vorliegenden Arbeit verschärft. L. Collatz.

Urabe, Minoru and Takeshi Tsushima: On numerical integration of ordinary differential equations. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 17 193—219 (1953).

Verff. leiten eine Anzahl neuer Formeln zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ab und stellen sie in Tabellenform zusammen. Diese Formeln sind alle vom Mehrstellentypus:

$$y_{n+1} = \sum_0^p c_k y_{n-k} + h \sum_0^p c'_k y'_{n-k} + R_1, \quad y'_n = \sum_1^p d_k y_{n-k} + h \sum_0^p d'_k y'_{n-k} + R_2$$

(und analog für Differentialgleichungen 2. Ordnung). Eine entscheidende Verbesserung wird nicht erreicht, außerdem sind leider einige der abgeleiteten Formeln — z. B. $y_k = \frac{1900}{2511} y_{k-2} + \frac{675}{2511} y_{k-4} - \frac{64}{2511} y_{k-5} + h \cdot (\dots) / 837$ auf S. 211 — bereits für beliebig kleine Schrittweite numerisch instabil und damit unbrauchbar. (Vgl. Ref., dies. Zbl. 46, 133). H. Rutishauser.

Mikeladze, Š. E.: Numerische Lösung von Randwertaufgaben für nicht-lineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 14, 133—137 (1953) [Russisch].

Zur Lösung der Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in $0 \leq x \leq l$ mit den Randbedingungen $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ki} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ki} y^{(k)}(l) = \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) wird an Stelle der Gleichung das System

$$y^{(k)}(x) = \sum_{v=0}^{n-k-1} \frac{x^v y^{(k+v)}(0)}{v!} + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} y^{(n)}(t) dt$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) betrachtet, hierin für x der Reihe nach $h, 2h, \dots, mh$ genommen und das Integral auf Grund von Quadraturformeln durch Summen-

ausdrücke ersetzt. Nach Weglassen der Restglieder ergeben sich aus dem Gleichungssystem und den Randbedingungen $n(m+1)$ Gleichungen für die $n(m+1)$ Unbekannten $y_\sigma^{(k)} = y^{(k)}(\sigma h)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$; $\sigma = 0, 1, \dots, m$). Als Beispiel wird $y'' = -\lambda^2 y(1 - 0,5 y'^2)$ mit $y'(0) = 0$, $y(0,5) = 0$, $l = 0,5$, $m = 5$ behandelt.

W. Schulz.

Mitchell, A. R.: Round-off errors in the solution of the heat conduction equation by relaxation methods. Appl. Sci. Research A 4, 109—119 (1953).

Die Arbeit handelt von der folgenden Randwertaufgabe der parabolischen Differentialgleichung $q_{xx} - q_t = f(x, t)$. Von der im Gebiet $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$ zu konstruierenden Lösung $q(x, t)$ wird gefordert, daß $q(x, 0) = \varphi(x)$ für $0 \leq x \leq L$. Wird die Differentialgleichung nach Einführung eines rechteckigen Gitters durch die Differenzengleichung

$$(1/(2\Delta x)^2) (\varphi_{j+1,k-1} - 2\varphi_{j+1,k} + \varphi_{j+1,k+1} + \varphi_{j,k-1} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j,k+1}) - (1/\Delta t) (\varphi_{j+1,k} - \varphi_{j,k}) = f$$

ersetzt, eine Differenzengleichung, deren Lösung stets stabil ist, so interessiert die Frage, wie sich in den Knotenpunkten des Gitters auftretende Fehler fortpflanzen. Verf. zeigt, daß sich das Gleichungssystem, welches die Verteilung der Fehler beschreibt, in eine einzige Matrixengleichung zusammenfassen läßt. Bei der Untersuchung der hier auftretenden Matrix stützt sich Verf. auf eine Arbeit von D. E. Rutherford (dies. Zbl. 46, 10), die von Kontinuanten handelt. Interessant ist das Ergebnis, welches besagt, daß das Maximum des Fehlers in keinem inneren Knotenpunkt des Gitters auftreten kann, es ist entweder auf dem Rand $t = 0$ oder auf dem Rand $t = T$ vorhanden.

W. Quade.

Azbelev, N. V.: Über die Grenzen für die Anwendung eines Satzes von S. A. Čaplygin. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 589—591 (1953) [Russisch].

The absence of estimates on the limits of applicability of the theorem on differential inequalities impedes the development of Čaplygin's method for approximate integration of differential equations. To supply this want the author establishes a comparison theorem for the solution of a differential system consisting of an n th order ordinary differential equation with assigned initial values for the unknown and its first $n-1$ derivatives. The underlying idea is to set up a dominating differential system which is linear.

W. E. Milne (R.).

● **Pentkovskij, M. V.:** Graphisches Rechnen (Nomogramme). Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 151 S. R. 2,20 [Russisch].

Das Büchlein ist für mittlere Schulen geschrieben. Es lehrt zunächst die Durchführung von Rechnungen mit Hilfe von Nomogrammen; aber auch in der Theorie der Konstruktion von Nomogrammen gibt es vieles, das auch Schülern zugänglich ist. Verf. beschränkt sich auf die einfachsten Nomogramme, die beim Lösen von Aufgaben der Algebra, Geometrie, Trigonometrie und Physik Anwendung finden können. Von den beiden Teilen des Buches beschäftigt sich der erste mit den Fluchtentafeln. Nachdem Verf. an die Grundtatsachen über Koordinaten und Funktionen erinnert hat, werden die Gleichungen der Funktionsleitern aufgestellt und die Skalen hiernach aufgetragen. Im zweiten Teil werden zahlreiche Beispiele dafür gegeben, wie einfache Eigenschaften geometrischer Figuren zur Konstruktion von Nomogrammen ausgenutzt werden können. Außer den schon aus dem ersten Teil bekannten Fluchtentafeln lernt der Leser hier auch Nomogramme anderer Typen kennen. Dieses Kapitel erschöpft bei weitem nicht alle Möglichkeiten der Anwendung der in ihm befolgten Methode, sondern läßt dem Leser noch ein weites Feld für eigene Betätigung offen. Das Büchlein ist einfach, leichtverständlich und anregend geschrieben. Es kann insbesondere als Leitfaden für die Arbeit mathematischer Zirkel in mittleren Schulen von Nutzen sein.

W. Schmid.

● **Pentkovskij, M. V.:** Skelette der Nomogramme von Gleichungen der dritten nomographischen Ordnung. (Akad. Nauk SSSR, Trudy Inst. točnoj Mech. i. vyčislit. Techn.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1953. 63 S. R. 3,45 [Russisch].

Verf. legt eine neue Methode für die Konstruktion von Fluchtlinien-Nomogrammen für einen besonderen Typus der zu vertafelnden Formeln vor, nämlich für die Gleichungen dritter „nomographischer Ordnung“. Darunter versteht Verf. nach N. A. Glagolew eine in drei Funktionen von je einer Veränderlichen trilineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten. Die besondere Methode des Verf. besteht in der Anwendung sogenannter „Nomogramm-Skelette“. Jede Gleichung der dritten nomographischen Ordnung läßt sich durch geeignete Substitution auf eine von drei sehr einfachen kanonischen Formen bringen, die ihrerseits ineinander transformiert werden können. Für jede solche kanonische Form lassen

sich Fluchtlinien-Nomogramme von acht verschiedenen Typen konstruieren, die sich durch die Gestalt der Träger der Funktionsleitern unterscheiden. Die drei Leitern des Nomogramms liegen stets auf einer unkursalen Kurve dritter Ordnung, die eigentlich oder zerfallend sein kann. Die nicht zerfallenden Trägerkurven können einen Knotenpunkt (Schleife), einen Rückkehrpunkt oder einen isolierten Punkt aufweisen. Die zerfallende Trägerkurve kann aus einem Kegelschnitt und einer Geraden bestehen, wobei die Gerade den Kegelschnitt reell schneidet, berührt oder nicht reell schneidet oder aus drei Geraden, die ein Dreieck bilden oder durch einen Punkt gehen können. Dadurch sind die acht Typen von Nomogrammen gegeben. Zur Bezeichnung jedes einzelnen Nomogrammes führt Verf. dreifache Indizes ein. Die erste Ziffer kennzeichnet die auf dem Träger mögliche „Metrik“, die hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sein kann und einer nichteuklidischen Bewegungsgruppe der Punkte auf der Trägerkurve entspricht. Die zweite Ziffer kennzeichnet den geometrischen Typus der Trägerkurve: nichtzerfallend, Kegelschnitt und Gerade, drei Geraden. Die dritte Ziffer gibt eine Numerierung der besonderen Nomogramme innerhalb jedes der durch die beiden ersten Indizes gekennzeichneten Typen. Die Ziffer 0 an der dritten Stelle bedeutet die Gesamtheit aller zu einem Typus gehörigen Nomogramme, die untereinander projektiv verwandt sind, und wird dem „Skelett“ dieses Typus zugeordnet. Verf. untersucht die Skelette für sämtliche acht möglichen Typen und gibt den Vorgang für die Konstruktion eines Nomogrammes bei gegebener Formel auf einem beliebigen der Skelette an. Als Beispiel bringt Verf. die Konstruktion eines Nomogrammes für eine Formel aus der Praxis an der Drehbank und ein Beispiel der Konstruktion eines Satzes von Nomogrammen, die eine Formel der Tachymetrie ver tafeln. In einer Beilage sind 25 Beispiele von Nomogrammskeletten für Gleichungen von der nomographischen Ordnung drei gegeben. Die Arbeit zeigt, daß durch bewußte und folgerichtige Anwendung der projektiven Geometrie und der geometrischen Transformationen auf die Aufgaben der Nomographie die Güte der Lösungen wesentlich gehoben werden kann.

W. Schmid.

Zalts, K. Ja.: Über quadraturfreie Nomogramme der Funktion $F_1 K_{23} + F_2 L_{31} + F_3 M_{12}$. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 383—388 (1953) [Russisch].

Verf. behandelt die Darstellung der Funktion der linken Seite in Form einer Masseeau-schen Determinante:

$$(1) \quad F_1 K_{23} + F_2 L_{31} + F_3 M_{12} = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei der Index i anzeigt, daß die Funktion von der Veränderlichen z_i ($i = 1, 2, 3$) abhängt. Die partiellen Ableitungen werden folgendermaßen bezeichnet: $L'_1 = \partial L_{31} / \partial z_1$, $M'_1 = \partial^2 M_{12} / \partial z_1^2$, ... Aus (1) folgen die Gln. (2) $G_1 K_{23} + G_2 L_{31} + G_3 M_{12} = 0$ und $H_1 K_{23} + H_2 L_{31} + H_3 M_{12} = 0$. Die erste Gl. (2) und ihre ersten beiden Ableitungen nach z_1 haben eine nicht triviale Lösung, wenn

$$(3) \quad \begin{vmatrix} G_1 & L_{31} & M_{12} \\ G'_1 & L'_{31} & M'_1 \\ G''_1 & L''_{31} & M''_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{sofern} \quad \Delta_I = \begin{vmatrix} L_{31} & M_{12} \\ L'_1 & M'_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Existiert (1) und ist $\Delta_I = 0$, so dürfen die Adjunkten der Elemente G'_1 , G''_1 , G_1 der Determinante (3) die Veränderlichen z_2 und z_3 nur in einem gemeinsamen Faktor enthalten. Nach Kürzung dieses Faktors erhält man G_1 als Lösung der DGl. (4) $A_1 X'_1 + B_1 X'_1 + C_1 X_1 = 0$, wobei A_1 , B_1 , C_1 Funktionen von z_1 sind. Damit (4) besteht, müssen die Funktionen L_{31} und M_{12} zwei Bedingungen genügen, die notwendig und hinreichend sind, daß sich z_2 und z_3 eliminieren lassen:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} L_{31} & M_{12} & L'_1 \\ L'_1 & M'_1 & L''_1 \\ L''_1 & M''_1 & L'''_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} L_{31} & M_{12} & M'_1 \\ L'_1 & M'_1 & M''_1 \\ L''_1 & M''_1 & M'''_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Bestimmung von H_1 geht man genauso vor und erhält ebenfalls (4), d. h. G_1 und H_1 sind linear unabhängige Lösungen von (4), wenn $\Delta_I \neq 0$. Wegen (5) ist es möglich, die DGl. ohne Integrationen zu lösen, und zwar ist: $G_1 = [L_3]$, $H_1 = [M'_1]$, wobei die eckigen Klammern bedeuten, daß für die Veränderlichen z_2 und z_3 geeignete konstante Werte gewählt werden. Sind die Elemente der ersten Zeile von (1) gefunden, so lassen sich die übrigen durch algebraische Operationen (Cramersche Regel) bestimmen. Dabei müssen zwei weitere Identitäten erfüllt werden:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 0 & M_{12} & M'_1 \\ K_{23} & L_{31} & L'_1 \\ K'_3 & L'_3 & L''_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & L_{31} & L'_1 \\ K_{23} & M_{12} & M'_1 \\ K'_2 & M'_2 & M''_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dann ist: $G_2 = -[K'_3]$, $H_2 = -[K'_2]$, $G_3 = -(I_{31} - [K'_2][L'_1]/[M'_1])$, $H_3 = (M_{12} - [K'_3][M'_1])/[L'_1]$. Die rechten Seiten von G'_3 und H'_3 dürfen nicht von z_1 abhängen. Dies ist wegen (6) möglich und muß erfüllt werden durch geeignete spezielle Werte z_2 und z_3 bei der Berechnung der eckigen Klammern.

R. Ludwig.

Kurdiani, I. G.: Über ein nomographisches Verfahren zur Konstruktion psychometrischer Tafeln. Soobščenijsa Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 14, 399—405 (1953) [Russisch].

Johnson, Walter E.: An analogue computer for the solution of the radio refractive-index equation. J. Res. nat. Bur. Standards 51, 335—342 (1953).

Lösung der Gleichung $N = (K_1/T) [p + K_2 (e_s/T) RH]$ mittels Gleichstrombrücke. Die Teilschaltungen zur Multiplikation, Addition und Division werden beschrieben. Die Zahl der Veränderlichen wird auf 3 reduziert durch Verwendung eines Spezialpotentiometers für e_s/T , dessen Widerstandsverlauf durch Nebenschlüsse an entsprechenden Abgriffen geeignet gestaltet wird. Angaben über Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit werden gemacht. W. Breiting.

Mitrović, Dusan: Sur un principe nouveau de construction des machines électriques destinées à résoudre les équations algébriques. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 16, 204—210 (1953).

Angabe eines einfachen elektrischen Netzwerkes aus Ohmschen Widerständen und aus Kapazitäten als Analogie zu einem Polynom mit komplexen Koeffizienten. Durch systematische Veränderung des Real- und Imaginärteils der Impedanzen (von Hand), so lange bis ein Strom-Meß-Instrument in Nullage kommt, werden die Nullstellen aufgesucht. Der Aufsatz enthält mehrere sinnstörende Druckfehler. H. Wundt.

Mitrović, Dusan: Étude théorique d'un principe nouveau de construction des machines électriques servant à résoudre les systèmes d'équations algébriques linéaires. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. Sér. 16, 169—203 (1953).

Die elektrischen Analogiegeräte zur Lösung linearer Gleichungssysteme gewinnen die Unbekannten mittels einer Nullmethode durch iterative Änderung gewisser Spannungen. Zwecks Darstellung des Vorzeichens der Koeffizienten und der Unbekannten müssen diese Spannungen immer wahlweise sowohl mit positivem ($+V_k$) wie mit negativem Vorzeichen ($-V_k$) (jeweils gegen Masse) vorhanden sein. Der Abgriff der auf denselben Knoten zulaufenden Spannungen erfolgt mittels Potentiometern, die auf die gegebenen Koeffizienten eingestellt werden. Dadurch ergibt sich bei vollautomatischer Durchführung der Iteration eine Unsymmetrie zwischen V_k und $-V_k$, die den Prozeß instabil machen kann. Anstatt die Symmetrie von Hand nachzuregulieren, schlägt Verf. zwei Methoden vor, gerade diese „Unsymmetrie-Spannungen“ zum automatischen Lösungsgang auszunutzen. Er nennt sie „Methode der sich spontan einstellenden Symmetrie“ und „Iterationsmethode mit Hilfe der Unsymmetrie-Spannungen“. Der schaltungsmäßige Mehraufwand ist verhältnismäßig gering. Vor allem die zweite Methode soll erstmalig ein vollautomatisches stabiles (unbedingt konvergentes) Verfahren darstellen, selbst wenn die System-Matrix nicht positiv definit ist, was ja z. B. für die Konvergenz der Gauß-Seidel-Iteration eine notwendige Voraussetzung bildet. H. Wundt.

Miller, K. S. and F. J. Murray: A mathematical basis for an error analysis of differential analyzers. J. Math. Physics 32, 136—163 (1953).

Bei der maschinellen Lösung der Anfangswertaufgabe für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen (I) $F_i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n, t) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) werden 3 Arten von Fehlern, α -, β - und λ -Fehler unterschieden. Es läßt sich i. a. $F_i = 0$ nicht streng verwirklichen; so sei $G_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) das von der Maschine integrierte System. Wird bei Übergang von F_i zu G_i die Ordnung einer Differentialgleichung geändert, so liegt ein λ -Fehler vor; Änderungen bei G_i gegenüber F_i ohne Ordnungsänderung werden α -Fehler genannt. Fehler im Laufe der Integration (auch Fehler bei den Anfangswerten) heißen β -Fehler. Die Fehler werden durch (kleine) Parameter λ , α , β beschrieben, so daß $x_i = x_i(t, \lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$ wird. Der Fehler einer maschinell erhaltenen Näherung wird dann für $\lambda = 0$ durch die Taylorsche Reihe $\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \alpha_k + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial \beta_l} \beta_l + \dots$ ausgedrückt; die partiellen Ableitungen $\partial x_i / \partial \alpha_k$, $\partial^2 x_i / \partial \alpha_k \partial \beta_l, \dots$ genügen dabei linearen Differentialgleichungen; ist w_j eine dieser Ableitungen, so kann ihr Verhalten auf die homogenen Gleichungen $\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \dot{w}_j + \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} w_k = 0$ (sensitivity equations) zurückgeführt werden. Zum Studium der λ -Fehler werden die G_i in der Form angesetzt: $G_i(\lambda \dot{x}_1, \dots, \lambda \dot{x}_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, x_1, \dots, x_n, t) = 0$ ($i = 1, \dots, r$), während in den Gleichungen für $i = r + 1, \dots, n$ keine Ordnungserhöhung

gegenüber F_i stattgefunden habe. Es seien gewisse Funktionaldeterminanten $\neq 0$, so daß sich die Gleichungen in der Form schreiben lassen (2) $\lambda \bar{x}_i = g_i^k$ für $i = 1, \dots, r$ und $\bar{x}_i = g_i^k$ für $i = r + 1, \dots, n$ mit $g_i^k = g_i^k(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n, t, \alpha_r)$. Für $\lambda = \alpha_r = 0$ möge sich das System auf $F_i = 0$ reduzieren. Auch hier führt Taylorentwicklung zu einem System linearer homogener Differentialgleichungen. Die Koeffizienten werden durch Konstanten ersetzt und der dadurch entstandene Fehler durch einen weiteren Parameter η erfaßt. Das System hat Partikularlösungen, die proportional $e^{\eta t}$ bzw. $e^{i\eta t}$ sind, die also für $\lambda = 0$ nicht analytisch zu sein brauchen. Die Brauchbarkeit der maschinellen Näherung kann dabei verlorengelassen. Besondere Sorgfalt wird dem Umstande, daß man in praktischen Fällen manchmal gebietsweise die Umwandlung von (1) in (2) durch verschiedene analytische Umformungen vornimmt, und den dabei notwendigen Übergangsbedingungen gewidmet. Ein Beispiel am Schluß (Differentialgleichung $\lambda \dot{y} + \dot{y} + y(1-x) = 0$ ohne analytische Lösung $Y(x, \lambda)$ mit $Y(0, 0) = 1$) betont die Notwendigkeit solcher gelegentlichen intervallweisen Behandlung.

L. Collet z.

Fröberg, Carl-Erik: Solutions of linear systems of equations on a relay machine. Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser. 29, 39—42 (1953).

Verf. hat mit dem schwedischen Rechenautomaten BARK (siehe Kjellberg, dies. Zbl. 44, 334) die Auflösung linearer Gleichungssysteme und die Inversion von Matrizen numerisch durchgeführt und in bezug auf den Rechenaufwand verglichen. Er stellt dabei fest, daß das Verfahren von Gauß-Jordan (erweiterte Elimination) dem normalen Gaußschen Verfahren in jedem Fall unterlegen ist. Dies ist insofern überraschend, als man annehmen würde, daß sich die Jordansche Variante des Gaußschen Algorithmus dank ihrer einfacheren Struktur besonders gut für programmgesteuerte Rechenmaschinen eignen würde. H. Rutishauser.

Petrie III, George W.: Matrix inversion and solution of simultaneous linear algebraic equations with the IBM 604 electronic calculating punch. Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser. 29, 107—112 (1953).

Die beschriebene Methode zur Inversion von Matrizen ist eine speziell für programmgesteuerte Rechenmaschinen geeignete Variante des Gauß-Jordanschen Eliminationsverfahrens und unterscheidet sich von diesem nur durch die Reihenfolge, in der die Rechenoperationen ausgeführt werden. Sei a_{ik}^0 die gegebene Matrix, dann erhält man die Inverse als a_{ik}^N durch folgenden Prozeß ($j = 0, 1, \dots, N-1$):

$$a_{jN}^{(j+1)} = (a_{j1}^{(j)})^{-1}, \quad a_{jN}^{(j+1)} = a_{jN}^{(j-1)} a_{1N}^{(j)} \quad (k = 1, \dots, N-1),$$

$$a_{iN}^{(j+1)} = -a_{iN}^{(j-1)} a_{iN}^{(j)} \quad (i = 1, \dots, N-1),$$

$$a_{ik}^{(j+1)} = a_{ik}^{(j-1, k-1)} - a_{iN}^{(j-1, 1)} a_{1N}^{(j-1, k)} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots, N+1)$$

(Formulierung des Ref.). Verf. gibt eine detaillierte Beschreibung des Rechenvorgangs (inkl. Summenkontrollen) für IBM-Lochkartenmaschinen. Es sei beiläufig bemerkt, daß im Verlaufe dieses Prozesses alle a_{ik}^0 ($i, j, k = 1, 2, \dots, N$) gelocht werden; man muß daher mit einem Verbrauch von etwa N^3 Lochkarten rechnen.

H. Rutishauser.

Böhm, Corrado: Scomposizione di un sistema di sostituzioni lineari in una successione di transfert. Rend. Mat. e Appl. 12, 76—89 (1953).

Seien die Komponenten des Vektors x im Speicher einer programmgesteuerten Rechenmaschine enthalten. Ist A eine Matrix mit ganzzahligen Elementen, so lassen sich die Komponenten des Vektors Ax durch Ausübung von Transferadditionen und -subtraktionen berechnen. Eine Transferaddition $1ab$ ist wie folgt definiert: Addiere die Zahl in der Speicherzelle a einmal zur Zahl in der Speicherzelle b und lasse das Resultat in b . — Verf. behandelt das Problem, die Zahl der für die Berechnung von Ax notwendigen Transferoperationen zu einem Minimum zu machen, und gibt Regeln zur Verminderung dieser Anzahl an.

H. Rutishauser.

Harmuth, Henning: Programmsteuerung einer elektronischen Rechenmaschine. Acta phys. Austr. 7, 390—401 (1953).

Unter diesem nicht ganz zutreffenden Titel beschreibt Verf. ein Analogiegerät, welches das Galtonsche Brett nachbildet. Mit diesem Gerät lassen sich dann Ausdrücke der Form $\binom{N}{M} p^{N-M} q^M$ berechnen. Interessant ist, wie man durch Hintereinanderschalten von mehreren Galtonschen Brettern auch die in der Boltzmann-Statistik auftretenden Ausdrücke $\frac{N!}{N_1! \dots N_i!} p_1^{N_1} \dots p_i^{N_i}$ und

die entsprechenden Größen der Fermi- und Bose-Statistik berechnen kann. — Zu bemängeln ist die Verwendung unklarer Begriffe wie „ein mit Impulsen gefüllter Speicher“.

H. Rutishauser.

Pearcey, T. and G. W. Hill: Programme design for the C. S. I. R. O. Mark I computer. I. Computer conventions. II. Programme techniques. Austral. J. Phys. 6, 316—334, 335—356 (1953).

I. Die Verf. beschreiben eine elektronische Rechenmaschine, wobei aber weniger die technischen Belange als die mathematischen und organisatorischen Eigenschaften zur Sprache kommen; insbesondere wird das Befehlssystem vollständig beschrieben. Die Maschine hat einen Schnellspeicher (Hg-Tank) für 1024 Wörter zu je 20 Dualziffern, einen langsamen Speicher (magnetische Trommel) für 4096 Wörter, sowie einige Register *A, B, C, D, H*, die zum Teil für die Ausführung der arithmetischen Rechenoperationen benötigt werden. — Das Besondere an dieser Maschine ist jedoch das Befehlssystem: Jeder Befehl bewirkt die Übertragung einer Zahl von einer „Quelle“ zu einem „Ziel“, und das noch auf verschiedene Weise (nur substituierend oder unter Ausführung einer arithmetischen Rechenoperation). Von den 20 Dualstellen eines Befehls bestimmen die 5 ersten die Quelle, 5 weitere das Ziel und die Art der Übertragung. Dabei können als Quelle die Register *A, B, C, D, H*, der Befehlszähler *S* oder eine Zelle des schnellen oder langsamen Speichers fungieren (falls der Speicher oder das 16-zellige Register *D* beteiligt ist, bezeichnen die letzten 10 Dualziffern des Befehls die betroffene Speicherzelle). — Einige Beispiele: $C \leftarrow A$ (ohne Adresse): Übertrage den Inhalt des Registers *C* in den Akkumulator *A* (unter vorgängiger Löschung des letzteren). $(57) \leftarrow A$: Addiere den Inhalt der Speicherzelle 57 in den Akkumulator *A*. $B \leftarrow S$: Ersetze den Befehlszählerstand durch die Zahl im Register *B* (es erfolgt ein unbedingter Sprung). — Wie einige weitere Beispiele zeigen, ist das beschriebene Befehlssystem außerordentlich vielseitig und beweglich, aber durchaus nicht leicht zu handhaben. — **II.** Verf. zeigen, wie man für diese Rechenmaschine Programme aufstellt. Ein großer Teil dieser Ausführungen ist dem Zusammenfügen von Teilprogrammen und dem Einfügen von Unterprogrammen gewidmet, wobei im wesentlichen die EDSAC-Technik angewendet wird (vgl. Wilkes, Wheeler, Gill, dies. Zbl. 43, 129); natürlich unter Benützung der speziellen Eigenschaften der CSIRO-Mark I. — Die einzelnen Teilprogramme werden nacheinander zusammen mit gewissen Parametern in einen Streifen gelocht und sind dann zur Eingabe bereit. Das spezielle Eingabe-Programm, welches die Eingabe besorgt, gleichzeitig die Teilprogramme zusammenfügt und die hierzu notwendigen Adreßänderungen „erster Art“ auslöst, wird ausführlich beschrieben. Der Begriff des Strukturdiagramms (Flow-diagram) wird nicht verwendet.

H. Rutishauser.

● **Bückner, H., F. J. Weyl, L. Biermann und K. Zuse: Probleme der Entwicklung programmgesteuerter Rechengерäte und Integrieranlagen.** Herausgegeben von H. Cremer. Aachen: Technische Hochschule 1953. XIII, 85 S.

Das Heft enthält vier Vorträge, die in einem Kolloquium über Rechenanlagen gehalten wurden. H. Bückner beschreibt den „Integromat“, eine neuartige Integrieranlage, welche Stufengetriebe als Integratoren verwendet. Die Integrationsvariable ist „quantisiert“, d. h. durch Impulse dargestellt. Funktionen können als Lochkombinationen auf einem Streifen dargestellt werden. — F. J. Weyl erläutert allgemeine Gesichtspunkte programmgesteuerter Maschinen. Er gibt eine kurze Beschreibung bestehender amerikanischer Anlagen und der Aussichten für Weiterentwicklungen, schildert ferner die Einsatzmöglichkeiten. — L. Biermann beschreibt die Göttinger Entwicklung einer Rechenmaschine sowie ihre geplanten Anwendungen. — K. Zuse vermittelt einen Überblick über die deutschen Entwicklungen auf dem Gebiet der Relais-Maschinen, die bis 1937 zurückreichen. Anschließend werden die Prinzipien der Zuseschen Geräte beschrieben, und schließlich sind Entwicklungstendenzen geschildert. Ein Anhang gibt einige Diskussionsbeiträge wieder. *Ambros. Speiser.*

● **Tables of circular and hyperbolic sines and cosines for radian arguments.** (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 36.) 2. ed. Washington: Government Printing Office 1953. X, 407 p. \$ 3,—.

Korrigierte Neuausgabe der „Mathematical Table 3“ von 1939 und 1949 für die trigonometrischen und hyperbolischen Sinus und Cosinus auf 9 Dezimalen im Intervall von 0 bis 1.9999 bei einer Schrittweite von 10^{-4} und im Intervall

von 0 bis 10 bei einer Schrittweite von 10^{-1} . Der Anhang enthält eine Umrechnungstafel vom Grad- zum Bogenmaß und umgekehrt, sowie eine Tabelle der Vielfachen $n\pi/2$ für $n = 1, 2, \dots, 100$.
H. Bilharz.

● **Tables of 10^x .** (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 27.) Washington: Government Printing Office 1953. 543 p. \$ 3.50.

Dieser von H. E. Salzer edierte Band enthält eine den heutigen Bedürfnissen entsprechend angeordnete (und um etwa 250 Fehler korrigierte) Wiedergabe des seltenen Antilogarithmie Canon von J. Dodson (London 1742) für das Intervall $x = 0(10^{-5})1$ auf 10 Dezimalen. Auf eine Reproduktion der von Dodson angegebenen Differenzen- und partes proportionales-Tafeln wurde verzichtet und eine neu berechnete Hilfstafel (ähnlich derjenigen von F. Deppez (Bern 1939)) aufgenommen, die die Antilogarithmen 15stelliger Zahlen auf 15 Dezimalen zu berechnen erlaubt. Diese Tabellen geben auf 15 Dezimalen die Werte der Funktion $10^{n \cdot 10^{-p}}$ für $n = 1(1999)$ und $p = 3(3)15$. Die Einleitung berichtet über die Berechnungsmethode und enthält Hinweise für eine zweckmäßige Benutzung dieses Tabellenwerkes.
H. Bilharz.

● **Salzer, Herbert E.: Tables of coefficients for the numerical calculation of Laplace transforms.** (National Bureau of Standards Appl. Math. Ser. 30.) Washington: Government Printing Office 1953. 36 p. 25 cents.

Um eine Laplace-Transformierte $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \equiv \mathcal{L}\{f\}$ numerisch zu berechnen, wird $f(t)$ mittels der Werte in $t = 0, 1, \dots, n-1$ nach der Lagrangeschen Formel durch ein Polynom approximiert: $f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) P_i(t)$, und dann $\mathcal{L}\{f\} = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \mathcal{L}\{P_i\} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(i)$ gesetzt. Die Werte A_i finden sich für $n = 2$ bis 11 in Tafel I tabelliert, und zwar für $p = 0, 1$ bis $n-1$, wenn $n \leq 7$, in größeren Schritten für die höheren n . In Tafel II sind die Werte $n! \cdot p^{n+1}$ tabelliert, die man benutzen kann, wenn $f(t)$ durch ein Polynom in gewöhnlicher Form $c_0 + c_1 t + \dots$ approximiert ist.
G. Doetsch.

Salzer, Herbert E.: Zeros of the derivative of Bessel functions of fractional order. Math. Tables Aids Comput. 7, 69—71 (1953).

● **Tables of normal probability functions** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ and $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-x^2/2} d\alpha$.

(National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 23.) Washington: Government Printing Office 1953. IX, 344 p. Buckram bound \$ 2,75.

Berichtigte Neuauflage der Mathematical Table 14 von 1942 und 1948. Vertafelt sind 1.) auf 15 Dezimalen die Funktionen

$$Q(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) \quad \text{und} \quad P(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-x}^x \exp(-y^2/2) dy,$$

die die Ordinaten und Flächenabschnitte einer Normalverteilung darstellen, im Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ mit einer Schrittweite von 10^{-1} , ferner von $x = 1$ bis $x = 7,8$ mit einer Schrittweite von 10^{-3} , sowie schließlich von $x = 7,8$ bis $x = 8,285$ bzw. 8,112 bei variabler

Schrittweite und 2.) auf 7 Dezimalen die Funktionen $Q(x)$ und $1 - P(x) = 2(2\pi)^{-1/2} \int_x^\infty \exp(-y^2/2) dy$ für das Intervall von $x = 6$ bis $x = 10$ bei einer Schrittweite von 10^{-1} . Die Einleitung wurde von A. N. Lowan verfaßt. Sie enthält u. a. Bemerkungen über direkte und indirekte Interpolation, asymptotische Entwicklung von $P(x)$, Berechnungsmethode und eine kurze Bibliographie.
H. Bilharz.

● **Lindley, D. V. and J. C. P. Miller: Cambridge elementary statistical tables.** Cambridge: At the University Press 1953. 35 p.

Diese Tabellensammlung ist für den täglichen Bedarf des Naturwissenschaftlers, Technikers und Industriellen, sowie zum Gebrauch im statistischen Hochschul-Unterricht gedacht und aufs knappste zugeschnitten. Sowohl bezüglich der Argumentsschritte als auch

bezüglich der Stellenzahl sind die vorliegenden Tabellen im Vergleich zu den in der Mathematischen Statistik heute gebräuchlichen Tabellenwerken zumeist sparsamer. Fast allen Tabellen ist eine genaue formelmäßige Erklärung der tabulierten Größen beigegeben; ferner knappe Hinweise bezüglich der jeweils zu empfehlenden Interpolationstechnik und Approximationsformeln für die in der Tabelle nicht erfaßten Bereiche. Inhalt: Flächen und Ordinaten bzw. Prozent-Punkte der Normalverteilung, Prozent-Punkte der Student-Verteilung, Transformation $z = \Psi r \Sigma gr$, Prozent-Punkte der χ^2 -Verteilung, Umrechnungsfaktor zur Berechnung der Standardabweichung aus der Spannweite, Prozent-Punkte der F -Verteilung, Zufallszahlen, n^2 , \sqrt{n} , n^{-1} , $n^{-1/2}$, $\arcsin \sqrt{x}$, $\arcsin \sqrt{x}$, $\log x$, 10^x , $\log n!$, $k \cdot n/10$. *M. P. Geppert.*

Clark, Robert E.: Percentage points of the incomplete beta function. *J. Amer. statist. Assoc.* **48**, 831—843 (1953).

Table of the $\frac{1}{2}$, 1, $2\frac{1}{2}$ and 5% points of the incomplete Beta Function Ratio $I_p(X, N - X + 1)$ (in Karl Pearson's notation) for $N = 10$ (1) 50 and $X = 1$ (1) N . The entries are stated to be accurate within 1.5 of the last (fourth) significant figure. Some of the percentage points are not given in Thompson's table [*Biometrika* **32**, 168—181 (1941)]. A few notes are added concerning the application of such tables. *S. Vajda.*

● **Rosser, J. Barkley and R. J. Walker:** Properties and tables of generalized rocket functions for use in the theory of rockets with a constant slow spin. Cornell University 1953.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Carnap, Rudolf: What is probability? *Scientific American* **189**, no. 3, 128—130, 132, 134, 136, 138 (1953).

Stegmüller, Wolfgang: Bemerkungen zum Wahrscheinlichkeitsproblem. *Studium generale* **6**, 563—593 (1953).

Die Arbeit ist eine kritische Stellungnahme zu fünf Aufsätzen zum Wahrscheinlichkeitsproblem von Vietoris, Gröbner, March, Strohal und Erismann (Vietoris, dies. Zbl. **42**, 370, Strohal, dies. Zbl. **42**, 370, Gröbner, dies. Zbl. **42**, 371, March, dies. Zbl. **42**, 371). Der Verf. bekennt sich dabei eindeutig zur Wahrscheinlichkeitsauffassung von R. Carnap (dies. Zbl. **40**, 70), der eine zweifache Explikation des Begriffes „Wahrscheinlichkeit“ als relative Häufigkeit \mathfrak{H}_E und als Bestätigungsgrad einer Hypothese \mathfrak{H}_E durchführt. Die zweite, rein logische Theorie erweist sich für die Anwendung außerhalb der Statistik als zweckmäßiger, insbesondere für eine Theorie der Induktion, und läßt sich so ausbauen, daß sie die Statistik mitumfaßt. Aus der Arbeit von Vietoris hebt der Verf. hervor, daß Vietoris sowohl die Häufigkeitsdeutung wie die subjektive Deutung, die der logischen nahesteht, ablehnt und eine Axiomatik fordert, die eine implizite Definition der Wahrscheinlichkeit einschließt. Sein Hinweis auf die Beziehung „eher als“ der Alltagssprache ist unzulänglich, da sie von anderer Art ist als die logischen Konstanten „und“, „oder“, „nicht“. Die Abhandlungen von Gröbner und von March geben dem Verf. Gelegenheit, die Mehrdeutigkeit des Begriffes „Wahrscheinlichkeit a priori“ zu betonen und die Frage der Zurückführbarkeit von Sätzen auf Basissätze zu diskutieren. Wahrscheinlichkeitshypothesen sind in einer Sprache formulierbar, in der beliebig viele Existenz- und Allzeichen zugelassen sind. Die Forderung von March, daß alle Sätze auf ihre Widerlegbarkeit hin überprüft werden können, ist allerdings in einer Wahrscheinlichkeitstheorie nicht erfüllbar. Die Frage der Kausalität wird dadurch geklärt, daß man in der Quantenphysik den Zustandsbegriff anders faßt als in der Mechanik. Zur Abhandlung von Strohal wird festgestellt, daß es kaum möglich erscheint, die Hypothesenwahrscheinlichkeit auf die relative Häufigkeit zurückzuführen. Erismann baut seine Theorie auf synthetisch-apriorische Sätze auf. Seine Ausschaltung geordneter Folgen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie dürfte wegen des stetigen Übergangs zu den ordnungslosen Folgen nicht möglich sein. Ein synthetischer Apriorismus ist weder für eine Theorie der Ereigniswahrscheinlichkeit noch für eine Theorie der Induktion notwendig. *A. Kratzer.*

Waerden, B. L. van der, W. Pauli und S. Rosin: Der Begriff der Wahrscheinlichkeit und seine Rolle in den Naturwissenschaften. *Verh. d. Schweizer. naturforsch. Ges.* **132**, Versammlung, Bern 1952, 74—86 (1953).

Discussion sur le concept mathématique de probabilité, et sur l'utilisation pratique des probabilités dans les applications. - B. L. van der Waerden distingue les axiomes mathématiques et les postulats rendant ces axiomes applicables. Le plus important est le

suivant: si un événement a une petite probabilité, nous pourrions compter qu'il ne se produira pas. Il signale ensuite quelques problèmes statistiques: limites de confiance, types de tests indépendants du choix des lois de probabilité. — W. Pauli revient sur la différence entre les axiomes, qui ne sont pas une définition de la probabilité, et la définition pratique de la probabilité, nombre dont les fréquences relatives, mesurées sur une population suffisamment nombreuse, constituent l'approximation. Il insiste sur le rôle des probabilités en mécanique quantique, et sur l'idée, presque universellement admise, d'une „probabilité primaire“ qui serait à la base des lois de la physique. — S. Rosen indique la manière dont les biologistes font pratiquement usage des probabilités. Il montre comment le calcul des probabilités peut servir à prouver des lois (ou plutôt à réfuter des hypothèses inexactes), à organiser un plan de recherches, à estimer une valeur numérique. — Une discussion générale suit, où l'on examine surtout les difficultés dues à ce que les mathématiciens traitent la probabilité comme un élément non définissable (des axiomes établissent seulement des relations, mais ne définissent pas), alors que les utilisateurs la traitent comme un élément naturel. D'après F. Gonseth (ces deux conceptions sont reliées par la loi des grands nombres, où apparaît explicitement la notion de „chances égales“).

J. Bass.

Kauppi, Raili: Über den Begriff des Merkmaltraumes. Proc. XIth Internat. Congr. Philosophy (Brussels, Aug. 20—26, 1953) 5, 38—43 (1953).

Costa, M. A. Fernandes: Über die Berechnung der Verteilung einer Zufallsvariablen. Inst. Actuários Portug. Bol. 8, 45—57 (1953) [Portugiesisch mit englischer Zusammenfassg.].

In this paper, no claims to original results are advanced; but a systematic account of elementary methods for the calculation of the distribution of certain functions of one or several random variables is given, thus supplementing the theoretical apparatus of most intermediate and elementary text books. Extensive use is made of the concepts of „gamma and beta variates“.

Autorreferat

Franckx, E.: Généralisation d'un théorème de Borel. Trabajos Estadist. 4, 369—371 (1953).

L'A. introduit, pour les éléments d'une suite A la notion d'événements non covariants et étend à ce concept un théorème de Borel relatif à des événements indépendants, de A .

A. Sade.

Franckx, Ed.: Sur le comportement stochastique des itérations favorables. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 22, 417—420 (1953).

Das Eintreffen des Ereignisses A besitze die Wahrscheinlichkeit $p_A \neq 0$. Eine Serie von Versuchen E_1, E_2, E_3, \dots wird als günstige Serie von der Länge k bezeichnet, wenn sich das Ereignis in dieser Serie mindestens k mal hintereinander verwirklicht. Der Verf. beweist mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung das Verallgemeinerung des Satzes von Bernoulli: $W[|(\alpha/m - (p_A)^k)| > \varepsilon] < \eta$, wobei α/m die beobachtete Häufigkeit der günstigen Serien von der Länge k bedeutet.

W. Saxer.

Kampé de Fériet, Joseph: Fonctions aléatoires harmoniques dans un demi-plan. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1632—1634 (1953).

Der Verf. formuliert mit einer Beweis-Skizze den folgenden Satz: Gegeben eine reellwertige stochastische Funktion $f(x, \omega)$, definiert auf $R \times \Omega$, wobei $f(x, \omega)$ meßbar in ω für alle $x \in R$. Wenn $f(x, \omega)$ der Klasse H angehört, so ist das

Poissonsche Integral $u(x, y, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} f(\xi, \omega) d\xi$ für $\omega \in \Omega - A$,

wobei A vom Maße 0, eine harmonische Funktion für $y > 0$, wobei $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y, \omega) =$

$f(x, \omega)$ für fast alle x . Die Randfunktion ist in diesem Fall durch eine bestimmte Verteilung gegeben.

W. Saxer.

Ulin, Bengt: An extremal problem in mathematical statistics. Skand. Aktuarietidskr. 1953 (36), 158—167 (1953).

Es wird $I(\xi, \alpha, \sigma) = \inf_{-\xi}^{\xi} \int f(x) dx$ gesucht, wenn $f(x)$ alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit dem Durchschnitt 0 und endlicher Streuung σ durch-

läuft und wo ferner $f(x)$ der Bedingung unterworfen ist, daß $f(x)$ im Intervalle $(-\infty, \alpha)$ nicht abnehmend und im Intervalle (α, ∞) nicht zunehmend ist. Es wird gezeigt, daß das Extremum, von einigen Spezialfällen abgesehen, existiert und eine reine Sprungfunktion ist. Einige Abschätzungen von $I(\alpha, \sigma)$ werden gegeben.

H. Bergström.

Bochner, S.: Closure classes originating in the theory of probability. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 1082—1088 (1953).

A sequence of continuous functions $\{\varphi(\alpha)\}$, where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ranges over Euclidean k -space E_k , is called P -convergent, if it converges simply and uniformly so in any compact set of α . Suggested by the infinitely divisible laws of P. Lévy [Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris 1937 (this Zbl. 16, 170), 158], the author proves the following results: (i) For every $m = 1, 2, \dots$ the class of functions

$$(1) \quad \varphi(\alpha) = Q_{2m}(\alpha) + \int_{|x| > 0} \sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right)^{2m} dF(x)$$

is a P^* closed family. Herein, $F(A)$ is a non-negative set function in $E_k - (0)$ for which the above integral exists as a continuous function of α , and $Q_{2m}(\alpha)$ is any non-negative real homogenous polynomial of degree $2m$. (ii) For given $\varphi(\alpha)$ of the family, the term Q_{2m} and the value of the integral are uniquely determined.

K. Yosida.

Kitagawa, Tosio: The t -distributions concerning random integrations. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 8, 31—41 (1953).

Verf. gibt Näherungsausdrücke an für eine in einer früheren Arbeit [Random integration, Bull. math. Statistics 4, 15—22 (1951)] definierte Verteilungsfunktion sowie für eine weitere Verteilungsfunktion, die sich auf ein über dem Wienseschen Raum der stetigen Funktionen definiertes Funktional bezieht.

G. Doetsch.

Bergström, Harald: On distribution functions with a limiting stable distribution function. Ark. Mat. 2, 463—474 (1953).

$F(x)$ bezeichne eine Verteilungsfunktion, $F^{*n}(x)$ die aus ihr durch n -fache Faltung hervorgehende Verteilungsfunktion. W. Doeblin hat die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, denen $F(x)$ genügen muß, damit $F^{*n}(b_n x)$ gegen eine stabile Verteilungsfunktion (im Sinne von P. Lévy) $G_z(x)$ vom Exponenten α konvergiert. Verf. gibt hier Abschätzungen für das Restglied $F^{*n}(x) - G_z^{*n}(x)$, falls $F^{*n}(n^{1/\alpha} x)$ gegen $G_z^{*n}(n^{1/\alpha} x) = G_z(x)$ konvergiert. Vorausgesetzt wird, daß die Ableitungen aller Ordnungen von $G_z(x)$ von beschränkter Schwankung sind.

G. Schulz.

Fisz, M.: The limiting distribution of the difference of two Poisson random variables. Zastosowania Mat. 1, 41—44, russische und engl. Zusammenfassgn. 45 (1953) [Polnisch].

The random variables x_1 and x_2 are independent and have a Poisson distribution with the respective mean values λ_1 and λ_2 . It is shown that as λ_1 and λ_2 converge to infinity the distribution of the difference $x_1 - x_2$ converges to the normal distribution. It results from tables I and II that when testing statistical hypotheses on a low significance level one can use the limiting normal distribution for relatively small values of λ_1 and λ_2 . Autoreferat.

Silvey, Samuel D.: The equivalence of asymptotic distributions under randomisation and normal theories. Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 139—147 (1953).

Let $\{\xi_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) be a sequence of independently and identically distributed normal random variables and let $\{X_n\}$ be a sequence of random variables such that the joint probability $P(X_1 = a_{v_1}, \dots, X_n = a_{v_n}) = 1/n!$ for each permutation (v_1, \dots, v_n) of $(1, 2, \dots, n)$, $\{a_n\}$ being a given sequence of real numbers, not all equal. The author determines conditions subject to which, for all c , (*) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{r_n(\xi_1, \dots, \xi_n) < c\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{r_n(X_1, \dots, X_n) < c\}$ where $r_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ is a sequence of standardized linear combinations of the X_n .

A necessary and sufficient condition for (*) to be true of all such sequences r_n is that the distribution of measures a_1, \dots, a_n should tend to normality as n tends to ∞ . For more special sequences a theorem is proved which is a generalization of results due to Wald and Wolfowitz [Ann. math. Statistics 15, 358—372 (1944)] and Noether (this Zbl. 31, 226). Applications refer i. a. to the product-moment rank correlation coefficient.

S. Vajda.

Challand, Albert: Moyenne d'une série de grandeurs fortuites dont la loi de distribution est elle-même fortuite. Verhdt. Schweizer. naturforsch. Ges. 132. Versammlung, Bern 1952, 98—99 (1953).

Gnedenko, B. V.: Über die Rolle des maximalen Summanden bei der Summation unabhängiger Zufallsgrößen. Ukrain. mat. Žurn. 5, 291—298 (1953) [Russisch].

Verf. stellt zunächst eine Reihe bereits früher zumeist von ihm gefundener Resultate zusammen, die Bedingungen für Konvergenz der Verteilung der Teilsumme $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ bzw. des Maximums $r_n = \text{Max}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ der ersten n Glieder einer Folge voneinander stochastisch unabhängiger, der gleichen Verteilung $F(x) = P\{\xi_n < x\}$ folgender Zufallsgrößen betreffen. In dieser Arbeit beweist Verf., daß, wenn mit geeigneten Konstanten A_n , $B_n > 0$ die Verteilung von $\eta_n/B_n \rightarrow A_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen

$$\Phi_\alpha(x) = 0 \quad \text{für } x \leq 0 \quad \text{und} \quad = e^{-x^{-\alpha}} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{bzw. gegen } A(x) = e^{-e^{-x}}$$

konvergiert, für beliebiges ε in $0 < \varepsilon < \alpha$ $\int_0^\infty x^{-\alpha-\varepsilon} dF(x) < \infty$, $\int_0^\infty x^{\alpha+\varepsilon} dF(x) = +\infty$ bzw.

für beliebiges $\delta > 0$ $\int_0^\infty x^{-\delta} dF(x) < \infty$ gilt. Ferner wird für $\zeta_n = \text{Max}\{|\xi_1|, \dots, |\xi_n|\}$ bewiesen:

Wenn bei geeigneten A_n , $B_n > 0$ die Verteilung von s_n für $n \rightarrow \infty$ gegen $\Phi_\alpha(x)$ mit $\alpha \neq 2$ konvergiert, dann streben auch die Verteilungen der mit dem gleichen B_n normierten Größen ζ_n/B_n und η_n/B_n gegen $\Phi_\alpha(x)$. Wenn andererseits für irgendwelche A_n , B_n die Verteilung von $\zeta_n/B_n \rightarrow A_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $A(x)$ oder $\Phi_\alpha(x)$ mit $\alpha > 2$ strebt, dann konvergiert die Verteilung von s_n gegen Normalverteilung; im Falle der Konvergenz gegen $\Phi_\alpha(x)$ erfüllen die Normierungskonstanten B_n für beliebiges $\varepsilon > 0$ $B_n n^{1-\varepsilon} = O(n^\varepsilon)$, $n^{1/2}/B_n = O(n^\varepsilon)$. Schließlich wird für $\zeta_n^{(k)} = k$ -te Größe der Zahlen $|\xi_1|, \dots, |\xi_n|$ bewiesen: Wenn die Verteilung von s_n für $n \rightarrow \infty$ gegen $\Phi_\alpha(x)$ mit $\alpha \neq 2$ geht, strebt diejenige der mit dem gleichen B_n normierten Größe $\zeta_n^{(k)}/B_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die Grenzverteilung

$$\Phi_\alpha^{(k)}(x) = 0 \quad \text{für } x < 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^x z^{k-1} e^{-z^{-\alpha}} dz / (k-1)! \quad \text{für } x > 0.$$

M. P. Geppert.

Fisz, M.: The limiting distributions of sums of arbitrary independent and equally distributed r -point ($r \geq 2$) random variables. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 1, 235—238 (1953).

Sei $X_n = \sum_{k=1}^n Y_{nk}$ ($n = 1, 2, \dots$) eine Folge von Zufallsvariablen, wobei für jedes n alle Y_{nk} ($k = 1, 2, \dots, n$) gegenseitig stochastisch unabhängig der diskreten Verteilung $\text{Pr}\{Y_{nk} = a_{nl}\} = p_{nl}$ ($l = 1, 2, \dots, r$; $r \geq 2$) folgen. Wenn dann für die Zahlenfolgen A_n , $B_n > 0$ die kumulative Verteilungsfunktion $F_n(z)$ der Variablen $\zeta_n = X_n/B_n - A_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen eine nichtsinguläre Verteilungsfunktion $F(z)$ konvergiert, ist diese notwendig diejenige einer Summe gegenseitig unabhängiger Variablen, von denen s ($0 \leq s \leq r-2$) Poisson- und v ($= 0$ oder 1) normal verteilt sind, oder einer Summe von $r-1$ Poisson-Variablen. Weitere Sätze führen unter den Bedingungen $a_{nl} = a_l$ bzw. $p_{nl} = p_l$ zu genaueren Angaben über s und v . Schließlich gibt Verf. unter speziellen Voraussetzungen über die a_{nl} und p_{nl} und unter Benutzung von $B_n = \sqrt{\text{var } X_n}$, $A_n = E(X_n)/\sqrt{\text{var } X_n}$ hinreichende Bedingungen für die Konvergenz von ζ_n gegen Normal- bzw. Poisson-Verteilung. Bezüglich der hier gänzlich fehlenden Beweise verweist Verf. auf seine Arbeit in Studia math. 14, 111—123 (1953). M. P. Geppert.

Blackwell, David: Extension of a renewal theorem. Pacific J. Math. 3, 315—320 (1953).

A chance variable x will be called d -lattice variable if $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Pr}\{x = nd\} = 1$ and d is the largest for which it holds. If x is not a d -lattice variable for any d , x will be called a nonlattice

variable. The main purpose of this paper is to give a proof of the following theorem. Let x_1, x_2, \dots be independent identically distributed chance variables with $E(x_1) = m > 0$ (the case $m = +\infty$ is not excluded); let $S_n = x_1 + \dots + x_n$; and, for any $h > 0$, let $U(a, h)$ be the expected number of integers $n \geq 0$ for which $a \leq S_n < a + h$. If the x_n are nonlattice variables, then $U(a, h) \rightarrow h/m, 0$ as $a \rightarrow +\infty, -\infty$. If the x_n are d -lattice variables, then $U(a, d) \rightarrow d/m, 0$ as $a \rightarrow +\infty, -\infty$. If $m = +\infty$, h/m and d/m are interpreted as zero. — This theorem has been proved for nonnegative d -lattice variables by Kolmogorov and by Erdős, Feller and Pollard; for nonnegative nonlattice variables by Blackwell; for d -lattice by Chung and Woffowitz; for nonlattice variables such that the distribution of some S_n has an absolutely continuous part and $m < \infty$ by Chung and Pollard; and in the form given here by Harris (unpublished). The proof given here obtains the theorem almost directly from the cases by way of an integral identity and an equation of Wald.

T. Szentmártony.

Kudô, Akio: On the strong law of large numbers. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 7, 69—80 (1953).

Mit Hilfe einer Ausdehnung der Kolmogoroff-Ungleichung (Satz 2) beweist Verf. die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen (1) $P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{k=1}^N x_k = 0\right) = 1$ für eine Folge $\{x_k\}$ reeller Zufallsvariablen mit linearen Regressionen $m(x_m | x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n A_{m,n}^{(j)} x_j$ ($m > n$), wenn $M(N) = \sum_{n,m=1}^N \sigma_{n,m}$ die Bedingung $M(N) + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \left| \sum_{l=k+1}^N A_{n,l}^{(k)} \right| \sqrt{M(k) \sigma_{n,n}} = O(N^{2-\epsilon})$ ($\epsilon > 0$) erfüllt (Satz 3). Satz 4 gibt eine hinreichende Koeffizienten-Bedingung für die Gültigkeit des analogen Gesetzes $P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{k=1}^N a_k^{(N)} x_k = 0\right) = 1$ bei gegenseitiger Unabhängigkeit der x_k , aus welcher in Satz 5 die Gültigkeit von (1) für $y_k = A(y_1 + \dots + y_{k-1}) + x_k$ ($-2 < A < 0$), $z_k = B^{k-1} z_1 + B^{k-2} z_2 + \dots + B z_{k-1} + x_k$ unter der Voraussetzung $\sigma^2(x_k) = \int x_k^2 P(d\omega) < \sigma^2$ folgt. Schließlich werden diese Sätze zum Beweise des starken Gesetzes (1) für stationäre Gaußsche Markoff-Prozesse (Satz 6) benutzt.

M. P. Geppert.

Rényi, Alfréd: On the theory of order statistics. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 4, 191—229 und russische Zusammenfassg. 230—231 (1953).

ξ_1, \dots, ξ_n seien n unabhängige aleatorische Variable mit übereinstimmender stetiger, monoton steigender Verteilungsfunktion $F(x)$. $F_n(x)$ sei die gefundene Stichprobenverteilungsfunktion. Die Transformation $\zeta = -\ln F(\xi)$ führt zu den unabhängigen ζ_k mit übereinstimmender Verteilungsfunktion $G(x) = 1 - e^{-x}$. Es ist dann für die transformierten

Anordnungsstatistiken: $\zeta_k^* = \sum_{j=1}^k \delta_j / (n+1-j)$ mit unabhängigen δ_j der Verteilungsfunktion $G(x)$. Mit Hilfe dieser Zurückführung der Untersuchung der ξ_k^* auf Summen unabhängiger Variabler werden zunächst bekannte Sätze über die Grenzverteilung der $F(\xi_k^*)$ bei $n \rightarrow \infty$ vereinfacht bewiesen; desgleichen der N. W. Smirnovsche Satz (dies. Zbl. 41, 453) über die Grenzverteilung der Stichprobenquantilen. — Die Wirksamkeit der neuen Methode zeigt sich in der Aufstellung neuer Grenzverteilungssätze über die relative Abweichung der $F_n(x)$ von $F(x)$. Als Beispiele seien zitiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \sup_{0 \leq a \leq F(x) \leq 1} |(F_n(x) - F(x))/F(x)| < y) = L(y \sqrt{a/(1-a)})$$

mit der tabulierten Funktion $L(z) = 4\pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-1} \exp(-(2k+1)^2 \pi^2 / 8z^2)$ sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \sup_{0 \leq a \leq F(x) \leq b \leq 1} (F_n(x) - F(x))/F(x) < y) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{y \sqrt{b/(1-b)}} e^{-u^2/2} \left(\int_0^{(y \sqrt{b/(1-b)} - u) \sqrt{a(1-b)/(b-a)}} e^{-t^2/2} dt \right) du.$$

Der Beweis dieser Sätze benutzt auch für sich wichtige Verallgemeinerungen von Grenzwertsätzen von P. Erdős und M. Kac [Bull. Amer. math. Soc. 52, 292—302 (1946)] über das Maximum der Partialsummen unabhängiger zufälliger Größen. — Verschiedene störende Druckfehler.

H. Richter.

Dobrusin, R. L.: Grenzwertsätze für eine Markovsche Kette aus zwei Zuständen. *Vestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **17**, 291—330 (1953) [Russisch].

Die Arbeit gibt eine erschöpfende Beschreibung der möglichen Grenzverteilungen für die Trefferzahl ξ_n eines Zustandes nach n Schritten einer homogenen Markov-Kette mit zwei Zuständen und der Matrix der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten $P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$. Verf. beweist einen allgemeinen Grenzwertsatz, nach welchem bei von n abhängiger Matrix $P(n)$ die Verteilung von ξ_n dann und nur dann für $n_k \rightarrow \infty$ gegen eine eigentliche Grenzverteilung konvergiert, wenn p_n, q_n eine der 5 Bedingungen: p 1) $p_{n_k} \rightarrow a < \infty$; 2) $p \rightarrow 0, p_{n_k} \rightarrow \infty$; p 3) $p \rightarrow \bar{p} < 1, q \rightarrow \bar{q} < 1$; p 4) $q \rightarrow 0, q_{n_k} \rightarrow \infty$; p 5) $q_{n_k} \rightarrow a < \infty$; und p_n, q_n eine der analogen 5 Bedingungen p 1) — p 5) erfüllen. Kombination der p - und q -Fälle führt zur Aufteilung in Bereiche I—VII, in denen 7 verschiedene Grenzverteilungen gelten: normal-, Poisson-Verteilung und deren Verallgemeinerung durch B. O. Koopman (dies. bl. **37**, 85) sowie Verteilung von Karpjolewitsch und B. A. Uspjenski, die auf Laguerre'schen Polynomen und Besselschen Funktionen beruhen. In einem lokalen Grenzwertsatz wird für diese Bereiche gezeigt, daß für die exakten Einzelwahrscheinlichkeiten $p_m(n; p, q) = P(\xi_n = m)$ und die aus dem Integral-Grenzwertsatz folgenden approximativen, entsprechenden π_m unter genau formulierten Voraussetzungen über p, \bar{p}

$$\sum_{m=1}^n |p_m(n; p, \bar{p}) - \pi_m(n; p, \bar{p})| = O(n^{-1/13} (\ln n)^{5/2}).$$

Weitere Sätze befassen sich mit Einzelheiten über die Stärke der Konvergenz gegen Normal- bzw. Poisson-Verteilung beim Bernoulli-Schema sowie gegen Koopman-Verteilung, verallgemeinerte Poisson-Verteilung, Karpjolewitsch-Uspjenski- und Normalverteilung.

M. P. Geppert.

Gichman, I. I.: Einige Grenzwertsätze für bedingte Verteilungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **91**, 1003—1006 (1953) [Russisch].

Unter Heranziehung einfacher Markoff'scher Ketten und in der Zeit kontinuierlicher Markoff-Prozesse beweist Verf. folgende Sätze: 1) Gehorchen die Glieder der Folge ξ_1, ξ_2, \dots voneinander unabhängig der gleichen Verteilung mit $E(\xi) = 0$, $\text{var}(\xi) = \sigma^2$, und (oder) entweder Fall a) vor, in welchem die ξ eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ von beschränkter Schwankung haben, oder Fall b), in welchem die ξ ein Gitter bilden; sei $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ($\sigma^2 = 1$). $M(n) = \max \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\}$, $m(n) = -\min \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\}$. Dann konvergiert für $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow z$ die durch die Annahme $\eta_n = z_n$ bedingte Wahrscheinlichkeit für das Variablenpaar $\{m(n), M(n)\}$ gegen

$$S(x, y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \{ \exp[-2r(x+y)(x+y-y-z)] - \exp[-2(r y + (r-1)x)(r y + (r-1)x - z)] \}.$$

2) Für $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow z$ konvergiert die durch die Hypothese $\eta_n = z_n$ bedingte Wahrscheinlichkeit für das Variablenpaar $m'(n) = \min_{0 \leq k \leq n} \xi_k$, $M'(n) = \max_{0 \leq k \leq n} \xi_k$ mit $\xi_k = \eta_k - (k/n) \eta_n$ gegen die von z unabhängige Grenzverteilung

$$S'(x, y) = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \{ 2 \exp[-2x^2(x+y)^2] - \exp[-2(r y + (r-1)x)^2] - \exp[-2((r-1)y + r x)^2] \},$$

gegen die auch die unbedingte Verteilung von $m'(n)$, $M'(n)$ strebt, 3) Erfüllt $\{\xi_k\}$ die Voraussetzungen von Satz 1 und ist v_n die Anzahl positiver Glieder der Folge $\sum_{r=1}^k \xi_r - k \sum_{r=1}^n \xi_r / n$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), so konvergiert mit $n \rightarrow \infty$, $z_n \rightarrow z$ die durch $\eta_n = z_n$ bedingte Wahrscheinlichkeit für v_n schwach gegen Gleichverteilung.

M. P. Geppert.

● **Mann, Henry B.:** Introduction to the theory of stochastic processes depending on a continuous parameter. (National Bureau of Standards Applied Math. Ser. 24.) Washington: Government Printing Office 1953. 45 p. 30 cents.

This booklet is intended „to bring together under a unified terminology and notation some of the basic definitions and results“ of the theory mentioned in the title, „with as little appeal to abstract measure theory as possible“. In Chapter 1: Fundamental Concepts, a stochastic process dependent on a continuous parameter is defined as a set of random variables x_t where t is chosen from an interval of real numbers. Chapter 2: Special Processes, contains the definition and a discussion of the Fundamental Random Process (F. R. P.) and of the Ornstein-Uhlenbeck Process (O. U. P.), the latter based on a paper by Doob [Ann. of Math. II. Ser. **43**, 351—369 (1942)]. Chapter 3: Estimation of Parameters, is claimed to be mostly new. It deals with the estimation of the single parameter of the F. R. P. and with

that of the product of the two parameters which determine the O.-U. P. Chapter 4: The General Differential Process follows M. Loève's presentation in various papers, whilst Chapter 5: Differential Processes Modified by Mechanical Devices, deals with filter effects and counter data, the latter section based on W. Fellers contribution to the Courant anniversary volume (this Zbl. **35**, 213). Chapter 6 is entitled The Fourier Analysis of Stochastic Processes, leading up to J. v. Neumann's mean ergodic theorem (this Zbl. **4**, 310). — In addition to most of chapter 3, a theorem in chapter 1 is claimed to be new. Let $M_{abs.}$, m_{abs} denote, respectively, the largest and the smallest values of x_t , $t \in S$, S being a finite subdivision of $[a, b]$. Given a sequence of such subdivisions whose moduli converge to zero, a sufficient condition is stated for $M_{abs.}, m_{abs.}$ to have probability limits. *S. Vajda.*

Tortrat, A.: Les processus strictement stationnaires de Markoff et leurs corrélations. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **32**, 281—333 (1953).

Stationäre Markoffsche Prozesse in einer beliebigen abstrakten Menge Ω (wie z. B. bei Doeblin) werden mittels der Halbgruppentheorie (Hille) studiert; es werden nämlich die zwei (adjungierten) Operatoren $A(t)$ und $A'(t)$ betrachtet, die in den Banach-Räumen der meßbaren Funktionen $f(x)$ bzw. der Mengenfunktionen $g(E)$ von Ω ($x \in \Omega$, $E \subset \Omega$) operieren, so daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(E)$ nach der Zeit t in $A'(t)p(E)$ und die Erwartung $A(t)f(x)$ in $f(x)$ geändert werden. Spektraleigenschaften, asymptotisches Verhalten, erzeugende Operation a [für welche $A(t) = e^{at}$], Korrelationsfunktion $\varrho(t)$ werden für diese Prozesse studiert; letztere wird als charakteristische Funktion einer Verteilung $F(x)$ bestimmt, wo $F(x)$ mittels $(ixI - a)^{-1}$ ausgedrückt wird (d. h. durch die rein imaginären Eigenwerte von a). Die eigentliche Schwierigkeit der wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendung der Theorie entspringt aus der Tatsache, daß nichtnegative Mengenfunktionen nichtnegativ bleiben sollen. So bleiben die Fragen ungelöst, unter welchen Bedingungen $A(1) \geq 0$ eine $A(t) \geq 0$ gestattet oder $\varrho(t)$ die Korrelationsfunktion eines derartigen Prozesses bilden kann; Verf. zeigt an Beispielen, daß neben den selbstverständlichen, scheinbar hinreichenden Einschränkungen weitere notwendig sind. *B. de Finetti.*

Lévy, Paul: Random functions. General theory with special reference to Laplacian random functions. Univ. California Publ. Statist. **1**, 331—390 (1953).

Dans ce travail, l'A. développe les résultats qu'il avait déjà sommairement exposés dans une communication antérieure (cf. ce Zbl. **44**, 138). Il s'agit essentiellement de l'étude des équations différentielles stochastiques et de certains processus Laplaciens qui en sont solutions. — Dans la première partie, l'A. rappelle quelques définitions et propriétés des fonctions aléatoires, et plus particulièrement de la fonction de Wiener $w(t)$. Il donne aussi un exemple d'une fonction aléatoire qui n'est ni purement déterministe, ni purement indéterministe (au sens de Karhunen). La seconde partie aboutit à une discussion des différentes méthodes pratiques permettant de définir une fonction aléatoire $x(t)$: fonction de t et d'une suite dénombrable de variables aléatoires données, cette suite pouvant être en particulier formée des valeurs $x(t_n)$, où les t_n sont une suite dense sur l'intervalle de définition — fonctionnelle d'une fonction aléatoire donnée — définition de Slutsky. Cette seconde partie se termine par une introduction à la notion d'équation différentielle stochastique. L'A. considère des équations de la forme (1) $\delta x(t) \sim \mu dt + \xi \sqrt{d\omega(t)}$; ξ est une variable réduite qui dépend d'une loi indéfiniment divisible (ce sera dans la suite une variable Laplacienne ζ); $\omega(t)$ est une fonction non décroissante; μ est une fonctionnelle linéaire des valeurs de $x(u)$ pour $u < t$; le signe \sim indique que, lorsque $dt \rightarrow 0$, les deux premiers moments de la différence des deux membres sont $o(dt)$ et $o[d\omega(t)]$. La troisième partie est consacrée à l'étude des processus Laplaciens

complexes où μ est une fonctionnelle de Volterra: $\mu = \int_0^t f(t, u) x(u) du$. Ces processus sont définis par leur covariance $\Gamma(t, u)$, qui satisfait à l'équation intégrale $\frac{\partial \Gamma(t, x)}{\partial t} = \int_0^t f(t, u) \Gamma(u, x) du$.

La dérivée $\partial^2 \Gamma / \partial t \partial x$ vérifie une seconde équation intégrale qui peut être interprétée comme une équation de Fredholm permettant de déterminer la fonction $F(t, u) = \int_0^t f(t, v) dv$ lorsque la covariance est donnée et que certaines conditions de régularité sont satisfaites. Après une étude des conditions d'existence presque sûre d'intégrales de Stieltjes liées à la fonction de Wiener, l'A. examine des cas particuliers. Il s'intéresse surtout aux fonctions aléatoires presque sûrement périodiques, auxquelles il ramène la fonction de Wiener $w(t)$ par la transformation $w(t) = w(t) - w(0) - (t/2\pi)[w(2\pi) - w(0)]$. Il aboutit ainsi pour $w(t)$ à un développement, déjà obtenu par Wiener en 1924: $w(t) = \frac{\zeta_n t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{int} - 1}{\sqrt{2\pi}} \zeta_n$,

$0 \leq t \leq 2\pi$, où les ζ_n et ζ sont des variables Laplaciennes réduites indépendantes. Ce développement sert ensuite à obtenir, par deux méthodes, la loi de probabilité de l'aire comprise entre l'arc et la corde d'un mouvement brownien plan. La seconde méthode utilise un résultat

R. H. Cameron et W. T. Martin [J. Math. Physics **23**, 195—209 (1944)] d'après lequel l'intégrale $\int_0^1 x^2(t) dt$, où $x(t)$ est la fonction de Wiener réelle, a pour fonction caractéristique

$\sqrt{\cos 2t} z$. Pour terminer, l'auteur étudie d'une façon analogue le développement en série de Fourier de la fonction du mouvement brownien périodique sur un cercle. J. Bass.

Hayashi, Chikio and Hirotsugu Asaike: On a matching problem. Ann. Inst. Statist. Math. **4**, 55—64 (1953).

Das der Soziometrie entstammende Problem wird durch folgendes Schema veranschaulicht: Eine Urne enthält $2N$ Kugeln, von denen jede zu einer von R Klassen gehört. Nacheinander werden aus der Urne (ohne Zurücklegen) R -mal je 2 Kugeln entnommen. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit P dafür, daß sich unter den N Paaren x Paare befinden, die derselben Klasse angehören. Im Falle $R = 2$ wird der explizite Ausdruck für P aufgestellt, und werden Mittelwert, Streuung und höhere Momente berechnet. Für $R > 2$ werden nur Mittelwert und Streuung angegeben. Es folgen Zahlentafeln und Versuchsergebnisse. G. Schulz.

Borenus, Gustaf: On the statistical distribution of mine explosions. Skand. Aktuarietidskr. **1953** (36), 151—157 (1953).

N. Blomqvist (dies. Zbl. **48**, 111) hat die exakte Wahrscheinlichkeit

$$P(k) = q^{n-k} n \cdot k \prod_{v=m-k+1}^m (1-q^v) \prod_{v=n-k+1}^n (1-q^v) / \prod_{v=1}^k (1-q^v)$$

dafür bestimmt, daß beim Durchgang von m Personen durch ein Feld mit n Minen genau k Explosionen stattfinden, wobei $p = 1 - q =$ Wahrscheinlichkeit für eine Person, auf eine bestimmte Mine zu treten. Durch Einführung neuer Größen $u = 1 - q^m$, $v = 1 - q^n$, $w = 1 - q^k$ und Betrachtung von $\Delta P = P(k+1) - P(k)$ zeigt Verf. mittels Lösung einer einfachen Differentialgleichung, daß für $n \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ mit endlichem n/p und m/p die Variable w asymptotisch normal verteilt ist mit Mittelwert uv und $\sigma = \sqrt{puv(1-u)(1-v)}$. Ein iterativer, aber nicht exakter Gedankengang des Verf. dient der Bestimmung des asymptotischen Erwartungswertes $\bar{w} = uv$ ohne Kenntnis der genauen Verteilung $P(k)$ und versagt bei der Ermittlung von σ . M. P. Geppert.

Kendall, David G. and R. A. Rankin: On the number of points of a given office in a random hypersphere. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **4**, 178—189 (1953).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **31**, 112) betrachtete Kendall die Anzahl der Gitterpunkte eines quadratischen Gitters in einem auf das Gitter zufallsmäßig geworfenen Kreis von gegebenem Radius, sowie in einem Oval gegebener Form und Größe. Diese Ergebnisse wurden von Hlawka (dies. Zbl. **36**, 309) auf k -dimensionale konvexe Körper in einem k -dimensionalen Gitter verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit behandeln die Verf. die

Anzahl der Gitterpunkte eines k -dimensionalen Gitters \mathcal{G} $x_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} y_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, k$),

ganzzahlig, mit der Determinante $\Delta = |a_{ij}| > 0$, in einer k -dimensionalen Kugel \mathfrak{K} vom Radius ϱ . Sie bestimmen den Erwartungswert der Anzahl der in \mathfrak{K} gelegenen Gitterpunkte, wenn die Grundwahrscheinlichkeit für die Lage des Mittelpunktes von \mathfrak{K} im Fundamentalmittelreich des zugrunde gelegten Gitters \mathcal{G} konstant ist, und, was wesentlich interessanter ist, die Streuung für die Gitterpunktzahl in \mathfrak{K} . Hierfür werden zwei verschiedene Ausdrücke hergeleitet, zunächst die unendliche Reihe von Bessel-Funktionen

$$\sigma^2 = \Delta^{k-2} e^k \sum_m' \{J_{k/2}[(2\pi \varrho/\Delta) \sqrt{Q(m)}]\}^2 / \{Q(m)\}^{k/2};$$

bei ist $Q(y)$ die zu $q(y) = y' a' a y = x' x$ adjungierte Quadratform, $a = (a_{ij})$, und die Summe läuft über alle von $(0, \dots, 0)$ verschiedenen Gitterpunkte m des Gitters \mathcal{G} . Für große ϱ folgt hieraus die asymptotische Darstellung $\sigma^2 = A(\varrho) e^{k-1} + O(e^{k-2})$ mit

$$A(\varrho) = (\Delta^{k-1}/\pi^2) \sum_m' \cos^2[(2\pi \varrho/\Delta) \sqrt{Q(m)}] / \{Q(m)\}^{(k+1)/2}.$$

Hieraus ergibt sich für

$$\bar{A} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R A(\varrho) d\varrho = \frac{\Delta^{k-1}}{2\pi^2} Z_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{1}{2} (k+1) \right\}$$

mit der Epsteinschen Zetafunktion $Z(s) = \sum_m \{Q(m)\}^{-s}$. Weiter wird für σ^2 die Formel abgeleitet: $\sigma^2 = (K_k q^n / \Delta) (1 - K_k q^n / \Delta) + (1/\Delta) \sum'_m V(q, \sqrt{q(m)})$, die sich für kleine q besser eignet als die erste Formel. Hier ist K_k der Inhalt der k -dimensionalen Einheitskugel.

$V(q, t) = 2 \int_{t/2}^q K_{k-1}(q^2 - x^2)^{(k-1)/2} dx$ und $V = 0$ für $q(m) > 4q^2$, also die Summe endlich.

Durch Vergleich beider Formeln erhält man eine neue Identität. Schließlich betrachten Verf. noch den ebenen Fall und speziell den Fall eines Sechsecksgitters und vergleichen ihre Ergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen, die G. H. Wright bei 23000 Würfeln von Kreisen verschiedener Radien über einem solchen Gitter erhalten hat.

J. Heinhold.

Ryll-Nardzewski, C.: D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients. *Studia math.* **13**, 30—36 (1953).

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{i\vartheta_n} - 2^n) z^n$ mit zufälligen, über $(0, 2\pi)$ gleichverteilten ϑ_n besitzt $z = \frac{1}{2}$ als einzigen singulären Punkt auf ihrem Konvergenzkreis $|z| = \frac{1}{2}$. Sie widerlegt eine Borelsche Behauptung (1896), nach welcher der Konvergenzkreis von Potenzreihen mit Zufallskoeffizienten fast sicher ihre natürliche Grenze ist. Sie unterstützt aber auch die Vermutung von D. Blackwell (1947), nach

welcher dies durch Addition einer geeigneten gewöhnlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — hier mit $c_n = -2^n$ — erreicht werden kann. Verf. beweist nun genauer, daß es zu

jeder Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n = F(z)$ mit L -meßbaren Funktionen $a_n(t)$ der

Zufallsveränderlichen t über $(0, 1)$ bis auf eine Nullmenge der t eine gewöhnliche Potenzreihe $f_0(z)$ mit folgender Eigenschaft gibt: Der Konvergenzkreis von $F + f_0$ ist ihre natürliche Grenze, und dies gilt für alle $f(z)$ mit dem Konvergenzradius $r(F + f) = r(F + f_0)$, wogegen für die übrigen f sich $r(F + f) < r(F + f_0)$ ergibt.

T. Szentmártony.

Følner, Erling: Die Elemente der von Neumannschen Theorie der Spiele. *Nordisk mat. Tidskrift* **1**, 115—126 (1953) [Dänisch].

Ein vor dänischen Gymnasiallehrern gehaltener Vortrag. Es wird der Hauptsatz über Nullsummenspiele für 2 Personen (Minmax-Theorem) bewiesen und als Anwendung ein vereinfachtes Poker behandelt; beides nach J. v. Neumann und O. Morgenstern, *Theory of Games* pp., 3. ed. Princeton 1953.

W. Gaschütz.

Jongh, B. H. de: An extension of the theory of games and economic behaviour. *Verkekrings-Arch.* **30**, Bijvoegsel actuar. 54—61 (1953).

Verf. kritisiert an der v. Neumannschen Definition der günstigsten (optimalen) Strategien für ein Matrixspiel die alleinige Verwendung des Erwartungswertes zur Festlegung derselben. Er verweist auf Beispiele (Feuerversicherung), bei denen nicht nur der Erwartungswert für das menschliche Verhalten entscheidend sein kann. Dabei setzt Verf. offenbar „vernünftiges Verhalten“ (im Sinne einer Utility) = „menschliches Verhalten“ (im Sinne einer statistischen Mittelung des wirklich Geschehenden), ohne hierfür eine nähere Begründung zu geben. Die in der Überschrift erwähnte „extension“ besteht, wenn Ref. recht versteht, in der zusätzlichen Heranziehung des von C. Shannon und W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, Urbana 1949, eingeführten „Unsicherheitsmaßes“ zur Beurteilung des Wertes eines Spieles. — Für eine genaue Beurteilung des angestrebten Zieles bedürfen die ziemlich allgemein gehaltenen Ausführungen einer mathematischeren Behandlung.

W. Gaschütz.

Dauskin, J. M. and L. Gillman: A game over function space. *Rivista Mat. Univ. Parma* **4**, 83—94 (1953).

Es wird nach den v. Neumannschen Methoden das folgende „Spiel“ behandelt: A und B zielen mit geladenen Pistolen aufeinander. Sie schießen mit

der Wahrscheinlichkeit $x(t)$ bzw. $y(t)$, wenn ihre Entfernung voneinander t beträgt, und treffen dann mit der Wahrscheinlichkeit $\eta(t)$ bzw. $\zeta(t)$ den Gegner. Gewonnen hat derjenige, der den Gegner zuerst trifft. Die Strategien $x(t)$, $y(t)$ der Spieler sind hier also Elemente des Funktionenraumes über $t \geq 0$. Verff. beweisen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über η und ζ die Existenz eines Sattelpunktes und geben für optimale Strategien explizite Werte an. — Die auf Seite 84 gegebene Erklärung der optimalen Strategien ist fehlerhaft; Verff. bedienen sich jedoch in ihrer Arbeit der geläufigen Definition. W. Gaschütz.

Statistik:

● Neyman, J.: First course in probability and statistics. New York: Henry Holt and Company 1953. IX, 350 p. \$ 5,50.

This is not a textbook of statistical techniques or of the mathematics of statistics, but an introduction to fundamental concepts, and naturally enough mainly to those, to the development of which the author has so eminently contributed. It offers a course for American undergraduates with limited mathematical education, but its usefulness extends far beyond this group. It proves the correctness of the idea (attributed to E. L. Lehmann) „that the basic concepts of modern statistical theory can ... be taught on an elementary level“ (p. iv). Attention is also drawn, wherever appropriate, to possible shortcomings of a formal model, and the critical faculty of the reader is thus developed. — It is well known that, in the author's opinion, statistics is that branch of the theory of probability which deals with problems „most closely connected with rules of inductive behavior when the data ... are of a random nature“ (p. 4). This is explained in Chapter 1: Introduction. Scope of the Theory of Probability and Statistics, while Chapters 2: Probability, 3: Probabilistic Problems in Genetics and 4: Random Variables and Frequency Distributions, present probability calculus, illustrated not only by some games of chance in the traditional manner, but also by questions of public health and biology. „The heart of the whole book and its justification“ (p. iv) is Chapter 5: Elements of the Theory of Testing Statistical Hypotheses, of nearly 100 pages. It deals with the logic of tests and leads as far as uniformly most powerful critical regions and the $\hat{\alpha}$ -principle (probability ratio test). Estimation is not mentioned at all, except in a casual way in the historical introduction. — The stimulating style of the book reaches its peaks in the first and in the last chapter. In the first, Chevalier de Méré, according to tradition responsible for the beginnings of the theory of probability, is assumed to ask rather subtle questions (still concerned with „double sixes“) which might almost lead him to the invention of power functions and errors of two kinds. In the last chapter the Lady Tasting Tea is borrowed from R. A. Fisher's „The Design of Experiments“ and is put through various tests which probe the validity of a number of different claims which she might make, making her original claim more precise. All this is wittily presented and supplies a splendid example of logical thinking. — With its often realistic, sometimes facetious Problems and Exercises at the end of sections, the book is most valuable to teachers and to students alike, although the latter would need to supplement it with other reading to obtain a complete picture of statistical theory. They might also wonder, with the reviewer, about that Volume 2 which is mentioned in the very last sentence of the book. S. Vajda.

● Goedicke, V.: Introduction to the theory of statistics. New York: Harper & Brothers Publishers 1953. XII, 286 p. 35 s.

Unter Benützung eigener Vorlesungsunterlagen hat Verf. als Mathematiker den vorliegenden Leitfaden geschrieben, der in einem einsemestrigen 3- bis 4- stündigen Kolleg Studenten der Psychologie, Soziologie, Biologie, Pädagogik in die statistische Methodik einführen soll. Das Ziel ist ein Kompromiß zwischen nützlichen Ausführungsvorschriften einerseits und mathematisch-logischer Analyse der behandelten Begriffe und Methoden andererseits, wobei Verf. ein tieferes Verständnis des Wesens und der Gültigkeitsgrenzen der besprochenen Verfahren zu vermitteln erstrebt und nur elementare mathematische Kenntnisse voraussetzt. Die zahlreichen Zahlenbeispiele und Übungsaufgaben (mit Lösungen) sind zumeist fiktiv und zielen auf unmittelbare Anwendung der Formeln im Text ab. Der Stoff greift kaum über die Anfangsgründe hinaus. Häufigkeitsverteilung, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, Momente, Normalverteilung, Regression, einfache, multiple und partielle Korrelation, Mittelwertvergleich (ohne Erwähnung der Student-Verteilung), χ^2 -Test. Im Anhang: abgekürzte Logarithmen-, Sterbe-, Normal- und χ^2 -Verteilungstafeln. Als störend empfindet man die teilweise von der heute in der mathematischen Statistik üblichen abweichende Bezeichnungsweise; ferner befremdet teilweise die etwas verschwommene Erklärung und Begründung der Verfahren (z. B. χ^2 -Test). Trotzdem mag das Buch den nicht mathematisch orientierten Anfänger in der statistischen Methodenlehre einiges Nützliche bieten. Angesichts

der bereits vorhandenen Überfülle englisch-sprachiger „Einführungen“ läßt sich die Drucklegung der vorliegenden aber wohl kaum nach dem „Prinzip des zwingenden Grundes“ rechtfertigen.

M. P. Geppert.

● Hansen, M. H., W. N. Hurwitz and W. G. Madow: *Sample survey methods and applications*. Vol. I.: *Methods and applications*. Vol. II.: *Theory*. New York: J. Wiley & Sons; London: Chapman and Hall 1953. 638, 332 p. \$ 8,—, 7,—.

I. „This volume is designed as a textbook and reference manual for the student and for the investigator engaged in the design of sample surveys“ (from the Preface). It gives a very comprehensive survey of sampling practice on an elementary basis, giving formulae without proofs, but justifying them intuitively, mainly through illustrations. These are mostly taken from applications in the U. S. Bureau of the Census, with which the authors are or were associated. The emphasis is on principles for finding, approximately at least, optimum sample designs for estimating the characteristics of a finite population. The chapter headings give a good idea of the topics covered: 1. An elementary survey of sampling principles. 2. Biases and nonsampling errors in survey results. 3. Sample designs for some common sampling problems. 4. Simple random sampling. 5. Stratified simple random sampling. 6. Simple one- or two-stage cluster sampling. 7. Stratified single- or multi-stage cluster sampling. 8. Control of variation in size of cluster in estimating totals, averages, or ratios. 9. Multi-stage sampling with large primary sampling units. 10. Estimating variances. 11. Regression estimates, double sampling, sampling for time series, systematic sampling, and other sampling methods. 12. Case studies — designs and results of some actual sample surveys. — There is also a table of areas under the normal curve, an index, and references at the end of chapters. — II. The twelve chapters of this book are grouped into four parts: „Introduction“ (Chapter 1), „Fundamental Theory“ (Chapters 2 and 3, containing probability theory which is needed in the sequel), „Derivations, proofs and some extensions of theory for corresponding chapters of volume I“ (Chapters 4–11, with same titles as those in volume I), and „A theory for response errors“ (Chapter 12). References to literature are found after chapters 2–12 and exercises are inserted. The mathematical knowledge required does not extend beyond elementary algebra and some simple calculus. Sections which „may be deferred“ are indicated by an asterisk.

S. Vajda.

● Burr, J. W.: *Engineering statistics and quality control*. New York: McGraw-Hill Book Co. 1953. 442 p. \$ 7,—.

Dieses aus zwölfjährigen Vorlesungen an der Purdue-Universität hervorgegangene Lehrbuch wendet sich ausschließlich an künftige Ingenieure, Physiker und an Männer der industriellen Praxis, keinesfalls an Mathematiker oder theoretische Statistiker. Sein Ziel ist, diesem Personenkreis genau das für die statistische Qualitätskontrolle im industriellen Betrieb in dem heute üblichen Umfange erforderliche statistische Rüstzeug in klarer, zweckentsprechender Form zu vermitteln. Dem entspricht sowohl die besondere Auswahl als auch die Darstellung des behandelten Stoffes. — Der allgemeine Teil (im wesentlichen Kap. 2, 3, 4, 8) beschränkt sich auf die elementarsten statistischen Begriffe: Häufigkeitsverteilung, wichtigste Mittelwerte und Streuungsmaße, deren Eigenschaften rigoros hergeleitet werden, Normalverteilung, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, binomische, hypergeometrische und Poisson-Verteilung. Breitester Raum ist hingegen den übrigen 11 speziellen Kapiteln gewährt, in welchen sehr eingehend die spezielle Methodik der statistischen Qualitätskontrolle, also diejenige der Kontrollstreifen einerseits und die der statistischen Abnahmeprüfungen andererseits, beide sowohl für Variablen (quantitative) als auch für Alternativen (qualitative Merkmale), begründet und erläutert wird. Der Nachdruck liegt hier auf der Charakterisierung der verschiedenen Kontrollstreifen-Typen und ihrer Trennschärfe (Effizienz) und auf der Kennzeichnung der verschiedenen, auf einfachen, doppelten oder Sequenzproben beruhenden Stichprobenpläne und ihrer Charakteristiken (Hersteller- und Abnehmer-Risiko, Operationscharakteristik, erwartungsgemäße Probenlänge, mittlere Produktionsqualität (AOQ), usw. Auf die Herleitung der mathematischen Grundlagen, soweit sie anspruchsvoller sind (Student-, χ^2 -, F -Verteilung etc.) wird hierbei verzichtet. Bezüglich weiter, auch für die Fabrikationskontrolle wichtiger und grundlegender Gebiete, wie Korrelations- und Regressionstheorie, Varianzanalyse, Signifikanzteste und Parameterschätzung, verweist Verf. auf ein künftiges Lehrbuch: sie finden nur auf den letzten zwei Seiten kurze Erwähnung. Zur Prüfung auf Normalität einer Verteilung wird ausschließlich der χ^2 -Test empfohlen; auch die vom Verf. nebeneinander gegebenen Definitionen der Wahrscheinlichkeit (Kap. 8) würden wohl keinen Mathematiker befriedigen. Im übrigen wird das Verständnis durch zahlreiche, der industriellen Praxis entnommene, echte Zahlenbeispiele erleichtert, sowie durch kurze Zusammenfassungen, die jedes Kapitel beschließen, und eine Liste der benutzten Begriffe und entsprechenden Symbolik, die sich in Rücksicht auf den Leserkreis streng an den (dem Stochastiker nicht allzu sympathischen) von der amerikanischen Gesellschaft für Qualitätskontrolle eingeführten Standard hält. Zahlreiche praktische Winke und Empfeh-

lungen für den Gebrauch von Rechenmaschinen sowie eine stattliche Reihe von Aufgaben sind den einzelnen Kapiteln beigelegt. Die Darstellung wird abgerundet durch Tabellen der Flächen und Ordinaten der Normalverteilung, der χ^2 -Verteilung, der Werte $\log n!$, der Summen der Poisson-Verteilung, und Tabellen, die die Konstanten wichtiger Kontrollstreifenverfahren bzw. verschiedene Stichprobenpläne betreffen. Im Hinblick auf das eingangs erwähnte spezielle Ziel des Verf. darf das Werk wohl als glücklich gelungen bezeichnet werden.

M. P. Geppert.

Otterson, Klaus: Über die Anwendung von statistischen Methoden und Prüfverteilungen bei Untersuchungen im Elektromaschinenbau. Ber. Math.-Tagung Berlin 14. 1.—18. 1. 1953, 213—218 (1953).

Castellano, Vittorio: Studio delle medie ferme basali espresse dalla formula comprensiva del Gini. Soc. Ital. Statist., Atti X Riunione sci. (Roma 5—6 Luglio 1950), 59—92 (1953).

L'A. ha studiato la formula generale delle medie basali del Gini

$$B_{c,d}^{c,p} = \frac{c^{p-d} q}{\sqrt{\left| \sum G_c^p \binom{n}{c} \right| \left| \sum G_d^q \binom{n}{d} \right|}},$$

dove G_c^p e G_d^q sono prodotti del tipo $x_{b_1}^p, x_{b_2}^p, \dots, x_{b_c}^p$ e $x_{b_1}^q, x_{b_2}^q, \dots, x_{b_d}^q$ e le somme sono estese a tutte le combinazioni delle n quantità reali positive x_i di classe c e di classe d . Facendo assumere ai parametri c e d tutti i valori interi da 1 ad n e considerando p e q come variabili reali comprese tra $-\infty$ e $+\infty$, la $z = B_{c,d}^{c,p}$ è la equazione di una superficie dipendente da due parametri discreti. L'A. ha descritto le $\binom{n+1}{2}$ superficie distinte che ne derivano con mezzi analitici elementari, mediante le sezioni con tre opportuni fasci di piani verticali, mettendo in evidenza alcune importanti proprietà di tali medie. Interessante è pure il confronto tra la $B_{c,d}^{c,p}$ con la media M^{cp} e M^{dq} dove, ad es. $M^{cp} = \sqrt{\sum G_c^p \binom{n}{c}}$ e G_c^p ha il significato sopra detto.

T. Salvemini.

Kamat, A. G.: The third moment of Gini's mean difference. *Biometrika* 40, 451—452 (1953).

Gini's „mean difference“ is defined as $g = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |x_i - x_j|$.

U. S. Nair (1936) has given an expression for the variance of g , and Lomnicki (this Zbl. 48, 115) has simplified this result. In this note the third moment is derived assuming that the original distribution of the x_i is normal by a method which is simpler than those previously used for the derivation of the variance.

H. Geiringer.

Olkin, Ingram: Note on „The Jacobians of certain matrix transformations“ useful in multivariate analysis. *Biometrika* 40, 43—46 (1953).

The Jacobians of certain matrix transformations are evaluated by the techniques developed in a previous paper (Deemer and Olkin, this Zbl. 43, 342). To quote the author's conclusion, Theorem 2 is concerned with an alternative form of the Toeplitz factorization which is a rotation of the rectangular coordinates. In Theorem 3, the relation between the correlation and covariance matrices is stated. In Theorem 4, a set of normalized rectangular co-ordinates is introduced, and in Theorem 5, these are related to the correlation matrix. In Theorems 6—8, respectively, the Cayley transformation for a general matrix, a symmetric and a triangular matrix is given. In Theorem 10, the Smith canonical form which yields the characteristic roots of a matrix is considered.

H. Chernoff (R).

Hotelling, Harold: New light on the correlation coefficient and its transforms. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 15, 193—232 (1953).

The author derives two new series for the probability that the correlation coefficient, r , in a sample exceeds a given value by chance, when the correlation coefficient of the bivariate normal parent population is $\rho = 0$. For $\rho \neq 0$, he obtains a rapidly converging series for the

frequency function. He then deals with the probability integral which he expresses in terms of the latter series and with recurrence relations for the frequency function and for the distribution function. Thereafter, he develops a new method for calculating the moments of r about ϱ , and of Fisher's $z = \tanh^{-1} r$ about $\tanh^{-1} \varrho$. This leads to a revision of the traditional formula for the variance, affecting slightly the bias and the supposed rate of approach to normality with increasing sample size. Finally, it is proved that it is impossible to find a transformation of r , independent of ϱ , which produces a normal distribution with fixed variance, but that z can be adjusted so that the variance of the new function deviates from a constant only by terms of high order in n^{-1} . *S. Vajda.*

Roy, Purnendu Mohon: A note on the unreduced balanced incomplete block designs. *Sankhyā* 13, 11—16 (1953).

Ein balancierter, unvollständiger Blockversuch mit b Blöcken von je k Einheiten, v Sorten von je r Einheiten und λ = Anzahl der Blöcke, in denen ein Sortenpaar gemeinsam auftritt, also mit $b k = v r$, $\lambda(v-1) = r(k-1)$, heißt „reduziert“, wenn b, r, λ teilerfremd; „unreduziert“, wenn b, r, λ nach Division durch gemeinsame Teiler $b = \binom{v}{k}, r = \binom{v-1}{k-1}, \lambda = \binom{v-2}{k-2}$

erfüllen; „nicht reduziert“, wenn $\lambda = \binom{v-2}{k-2}$; „teilweise reduziert“, wenn λ zwischen $\binom{v-2}{k-2}$ und seinem kleinsten möglichen Wert liegt. Verf. sucht zunächst die unreduzierten Versuche auf, untersucht sodann die Beziehungen zwischen diesen Versuchen einerseits und endlichen Geometrien und den Sätzen der Differenzenmethode andererseits. Schließlich werden Bedingungen für Resolvierbarkeit und affine Resolvierbarkeit unreduzierter Versuche ermittelt. Die Arbeit fußt wesentlich auf Begriffen und Resultaten von R. C. Bose [dies. Zbl. 23, 1: *Sankhyā* 6, 105—110 (1942)]. *M. P. Geppert.*

Shrikhande, S. S.: The non-existence of certain affine resolvable balanced incomplete block designs. *Canadian J. Math.* 5, 413—420 (1953).

R. C. Bose [*Sankhyā* 6, 105—110 (1942)] has shown that the parameters of a design of the type mentioned in the title can be expressed in terms of $n (\geq 2)$ and $t (\geq 0)$ as follows: $v = n^2[(n-1)t+1] = n^2 s$, say, $b = n(n^2 t + n + 1) = nt + 1$. The author proves that a necessary condition for the existence of the design is that ns must be a perfect square for both n and t odd, and s must be a perfect square for n odd and t even. From this, he deduces a number of results of which the following is typical: A design of the type mentioned does not exist for any t if $n = 2(4)$ and the square-free part of n contains a prime $\equiv 3(4)$. [Similar results were given by the author (this Zbl. 43, 136). The title of the latter article given in the references at the end of the present paper is inaccurate.] He also uses his results to improve an inequality for the maximum number of possible restraints, originally given by Plackett and Burman in *Biometrika* 33, 305—325 (1946). *S. Vajda.*

Peel, E. A.: Factorial analysis as a psychological technique. Uppsala Symposium psychological factor analysis, March 17—19, 1953, 7—22 (1953).

Vom Standpunkt des Psychologen diskutiert Verf. die verschiedenen Theorien und Modelle, die von der englischen und amerikanischen Schule im Rahmen der Faktorenanalyse die Struktur der Intelligenz beschreiben sollen: Thomsons Stichprobentheorie im Gegensatz zur Zwei-Faktorentheorie, Burts hierarchische Struktur, Thurstones Theorie mehrerer primärer Gruppenfaktoren; ferner die Faktoranalyse von Temperament und Persönlichkeit, der interindividuellen Korrelation und qualitativer Daten. *M. P. Geppert.*

Bartlett, M. S.: Factor analysis in psychology as a statistician sees it. Uppsala Symposium psychological factor analysis, March 17—19, 1953, 23—34 (1953).

Vom Standpunkt des Stochastikers stellt Verf. der auf K. Pearson zurückgehenden Hauptkomponentenmethode [Konstruktion der Hauptkomponenten $z_i = \alpha_i' x$ aus der Korrelationsmatrix $R = E(x x')$ und deren Eigenwerten λ_i durch Lösung von $(R - \lambda_i) \alpha_i = 0$] Spearmans einfaches Faktormodell und dessen Verallgemeinerung $x = Mf + M_0 s$ mit Spaltenvektor f und Diagonalmatrix M_0 gegenüber. Für diese werden für große Stichproben gültige χ^2 -Eignungsteste und verschiedene Schätzmethoden für M, f erörtert. Schließlich untersucht Verf. den Fall, in welchem die in diesem Modell enthaltene Linearitätshypothese nicht erfüllt und das Modell entsprechend zu erweitern ist. *M. P. Geppert.*

Lawley, D. N.: A modified method of estimation in factor analysis and some large sample results. Uppsala Symposium psychological factor analysis, March 7—19, 1953, 35—42 (1953).

Verf. betrachtet das Modell $x_i = \sum_{r=1}^k l_{ir} f_r + e_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) mit gegenseitig unabhängig und mit Mittelwert 0 normal verteilten „gemeinsamen Faktoren“ f_r und Residuen e_i und konstruiert nach dem Maximum-likelihood-Prinzip Punktschätzungen der Gewichte l_{ir} unter zwei verschiedenen Annahmen, daß nämlich die Residuenvarianz $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_p^2 = \sigma^2$ bekannt bzw. unbekannt und daher aus den Daten zu schätzen sei. Für diese Schätzungen, die im wesentlichen auf den Eigenwerten der Kovarianzmatrix in der Population beruhen, bestimmt Verf. in beiden Fällen alle Varianzen und Kovarianzen. *M. P. Geppert.*

Wold, H.: Some artificial experiments in factor analysis. Uppsala Symposium psychological factor analysis, March 17—19, 1953, 43—64 (1953).

In 4 konstruierten Beispielen illustriert Verf. die von P. Whittle (dies. Zbl. 48, 116) hergeleitete Methode zur Schätzung der Faktoren β und Gewichte α im Modell $x_{ij} = \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \beta_{jk} + \varepsilon_{ij}$. *M. P. Geppert.*

Rasch, G.: On simultaneous factor analysis in several populations. Uppsala Symposium psychological factor analysis, March 17—19, 1953, 65—71 (1953).

Im Hinblick auf die Anwendung der Faktoranalysis auf mehrere Populationen untersucht Verf. Bedeutung und Berechtigung der in der Faktoranalysis gebräuchlichen grundlegenden Annahmen. Er kritisiert vor allem die übliche gleichzeitige Standardisierung der Faktoren und der Meßgrößen und erstrebt die Bestimmung einer Gewichtsmatrix, die für alle Populationen gleich lautet. Dementsprechend formuliert er das Faktorproblem für g Populationen in Matrixform und zeigt, daß seine Lösung eine genau angebbare Mindestzahl von Faktoren erfordert. *M. P. Geppert.*

Kitagawa, Tosio: Successive process of statistical inferences. V, VI. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 7, 81—106; 8, 1—29 (1953).

Mit dem Ziele, die Versuchsplanung und nachfolgende Auswertung von Experimenten auf mehrere hintereinander erfolgende Schritte von entsprechend geplanten Versuchen auszuweiten, baut Verf. im 11. Teil eine Theorie der sukzessiven Varianzanalysen auf. Für den Ein- und Zwei-Faktorenversuch werden verallgemeinerte Modelle betrachtet, Sätze über die dabei auftretenden zentralen und nicht-zentralen χ^2 -Verteilungen von Quadratsummen und deren Unabhängigkeit sowie über nicht-zentrale F -Verteilungen ihrer Quotienten werden und auf die Testung linearer Hypothesen angewandt. Mit dem gleichen Ziel stellt Verf. im 12. Teil das klassische und modernisierte Bayes-Prinzip, Walds Minimax-Prinzip und die eingeschränkte (restricted) Bayes-Lösung im Sinne von J. Hodges und E. L. Lehmann (dies. Zbl. 47, 383) seinen eigenen früheren Ausführungen im 4., 5. und 8. Teil (dies. Zbl. 48, 365) gegenüber, die die Nutzbarmachung früherer Erkenntnisse auf Grund mehrerer Stichproben erstreben. Hierauf baut Verf. eine Theorie sukzessiver Entscheidungsfunktionen auf, die an markanten Beispielen der Punktschätzung, Hypothesenprüfung, Intervallschätzung mittels verallgemeinerter Confidenzintervalle, sequentieller Punktschätzung und Hypothesenprüfung veranschaulicht wird. Der 13. Teil (Voraussagende Verhaltensregeln und Risiko-

funktionen) befaßt sich mit dem durch eine Transformation $h(x; \Theta) = \int_0^\infty f(t; \Theta) K(x, t) dt$ der Verteilung $f(t; \Theta) dt$ des Stichprobenparameters t darstellbaren Halo-Effekt, der beim Transponierungsschluß eine Punktschätzung t für den Populationsparameter Θ in eine Intervallvoraussage für eine künftige Stichprobe überführt, und dessen Anwendung auf Risikofunktionen, ferner mit einem allgemeinen strategischen Prinzip zur sequenzanalytischen Voraussage und den entsprechenden Minimax- und Bayes-Lösungen, und bringt sie in Verbindung mit Students und R. A. Fishers Prinzipien. Der 14. Teil dient wie der 12. der Vorbereitung einer Theorie sukzessiver Versuchsplanung und behandelt hauptsächlich die Bestimmung zweckdienlicher Anzahlen von Wertestufen (levels) der Faktoren eines varianzanalytisch zu behandelnden Versuches unter Benützung geeigneter Systeme von Orthogonalfunktionen und insbesondere Orthogonalpolynomen. Haupt-Effekt- (main effect) und Wechselwirkungs-

(interaction) Funktionen werden nach diesen Orthogonal-Funktionen entwickelt, und die Versuchsanplanung wird als Methode zur Schätzung der Koeffizienten dieser Entwicklungen interpretiert. *M. P. Geppert.*

Lancaster, H. O.: A reconciliation of χ^2 , considered from metrical and enumerative aspects. Sankhyā 13, 1—10 (1953).

Im Falle des Bernoulli-Urnen-Schemas mit Merkmalswahrscheinlichkeit p und n Versuchen ist der auf Grund von m Treffern gebildete χ^2 -Ausdruck mit 1 Freiheitsgrad bekanntlich identisch mit dem Quadrat einer standardisierten, asymptotisch normal verteilten Variablen: $\chi^2 = (m - np)^2/np + (n - m - nq)^2/nq = (m - np)^2/npq$. Diesen Gedanken dehnt Verf. auf χ^2 -Übereinstimmungsprüfungen mit mehreren Freiheitsgraden aus unter Benützung des zu einer theoretischen Verteilung — z. B. beliebiger diskreter Verteilung p_i ($i = 1, \dots, k$),

Binomialverteilung $p_i = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ oder Normalverteilung — gehörenden Systems von

Orthogonalpolynomen. Mit deren Hilfe konstruiert Verf. standardisierte, normal verteilte Variablen, deren Quadratsumme χ^2 ergibt, und deckt auf diese Weise für Unabhängigkeitsprüfung in zweidimensionalen Kontingenztafeln Beziehungen zwischen dem χ^2 -Test und anderen gebräuchlichen Kriterien, z. B. dem Korrelationskoeffizienten einer der Kontingenztafeln zugrunde liegenden Binormalverteilung, auf, die z. T. bereits bekannt waren. Diese Herleitung der asymptotisch gültigen χ^2 -Verteilung beruht nicht wie üblich auf der Stirlingschen Formel. *M. P. Geppert.*

Scheffé, Henry: A method for judging all contrasts in the analysis of variance. Biometrika 40, 87—104 (1953).

A simple answer is found for the following question which has plagued the practitioner of the analysis of variance: Under the usual assumptions, if the conventional F -test hypothesis $H: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ at the α level of significance rejects H , what further inferences are valid about the contrasts among the μ_i (beyond the inference that the values of the contrasts are not all zero)? Suppose the F -test has $k - 1$ and r degrees of freedom. For any c_1, \dots, c_k with $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ write θ for the contrast $\sum_{i=1}^k c_i \mu_i$ and write $\hat{\theta}$ and $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2$ for the usual estimates of θ and the variance of θ . Then for the totality of contrasts, no matter what the true values of the θ 's, the probability is $1 - \alpha$ that they all satisfy $\theta - S^2 \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2 \leq \theta \leq \theta + S^2 \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2$, where S^2 is $(k - 1)$ times the upper α point of the F -distribution with $k - 1$ and r degrees of freedom. Suppose we say that the estimated contrast $\hat{\theta}$ is „significantly different from zero“ if $\hat{\theta} < S^2 \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2$. Then the F -test rejects H if and only if some $\hat{\theta}$ are significantly different from zero, and if it does, we can say just which $\hat{\theta}$. More generally, the above inequality can be employed for all the contrasts with the obvious frequency interpretation about the proportion of experiments in which all statements are correct. Relations are considered to an earlier method of Tukey using the Studentized range tables and valid in the special case where the μ_i all have the same variance and all pairs μ_i, μ_j ($i \neq j$) have the same covariance. Some results are obtained for the operating characteristic of the new method. (From the author's summary). *Z. W. Birnbaum (R.).*

Dumas, Maurice: Épreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1628—1629 (1953).

Soit U l'effectif d'un lot, au sujet duquel on veut choisir entre deux hypothèses H_1 (u_1 blancs et $U - u_1$ noirs) et H_2 (u_2 blancs et $U - u_2$ noirs) avec des risques tolérés α et β . Au moyen d'une représentation graphique où intervient, pour un point figuratif, le rapport de sa vraisemblance dans l'hypothèse H_1 à sa vraisemblance dans l'hypothèse H_2 , on construit deux lignes A et E , qui permettent de choisir entre H_1 et H_2 , avec des risques inférieurs ou au plus égaux aux risques tolérés. *A. Sade.*

Miyasawa, Kôichi: Most stringent tests and invariant tests. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 8, 57—88 (1953).

In the first parts of this paper the author obtains most stringent tests (as defined by Wald) as minimax tests for suitably chosen risk functions. The results are applied to tests of the mean or the variance of normal distributions. He then introduces a new concept of „invariant“ tests and discusses its relation to a similar concept of the same name, introduced by Lehmann (this Zbl. 36, 95).

S. Vajda.

Yates, F. and P. M. Grundy: Selection without replacement from within strata with probability proportional to size. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **15**, 253—261 (1953).

The authors point out that for selection of the type described in the title the usual method (described, e. g., in Yates, *Sampling Methods for Censuses and Surveys*, London 1949, Section 3.10) gives rise to a (usually very small) bias. They study also the bias in the usual formula for the error estimation. Unbiased estimates are developed for sample sizes 2 and 3 and methods proposed by Horvitz and Thompson (this Zbl. **47**, 383) are critically examined. *S. Vajda.*

Durbin, J.: Some results in sampling theory when the units are selected with unequal probabilities. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **15**, 262—269 (1953).

In a treatment based on that suggested by Horvitz and Thompson (this Zbl. **47**, 383) for single-stage sampling, the author discusses the calculation of estimates of sampling error in multi-stage designs. His method is an extension of a rule given by Yates (in section 7.17 of „*Sampling Methods for Censuses and Surveys*“, London 1949). The relation between sampling with and without replacement is investigated and approximate methods are given which have the advantages of unequal probability sampling without replacement but are applicable to large-scale survey work as well. *S. Vajda.*

Boer, J. de: Sequential test with three possible decisions for testing an unknown probability. *Appl. sci. Research, B* **3**, 249—259 (1953).

Grundgedanken und Verfahren des Sequenztestes, den M. Sobel und A. Wald (dies. Zbl. **34**, 230) zur Entscheidung zwischen drei Hypothesen bezüglich der Lage des Mittelwertes einer Normalverteilung entwickelt haben, überträgt Verf. auf die Entscheidung zwischen drei Hypothesen $H_1: p < a_{12}$, $H_2: a_{12} \leq p \leq a_{32}$, $H_3: p > a_{32}$ bezüglich der unbekannten Wahrscheinlichkeit p einer binomischen Verteilung. Unter naheliegenden Vereinfachungen untersucht Verf. die Operationscharakteristik und berechnet den Erwartungswert der zur Entscheidung erforderlichen Versuchszahl n in Abhängigkeit von p . Dieser reine Sequenztest sowie ein durch $n \leq N$ gestützter entsprechender Test werden an speziellen Zahlenbeispielen mit dem entsprechenden klassischen Test mit festem $n = N$ verglichen. *M. P. Geppert.*

Gichman, I. I.: Einige Bemerkungen zu dem Kriterium der Übereinstimmung von A. N. Kolmogorov. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **91**, 715—718 (1953) [Russisch].

Die Arbeit befaßt sich mit der Ausdehnung des Kolmogorov-Kriteriums $K_n = \sup \sqrt{N} \times |F_N(x) - F(x)|$ für die Übereinstimmung der aus einer zufälligen Stichprobe von N unabhängigen Werten gewonnenen empirischen kumulativen Verteilungsfunktion $F_N(x)$ mit einer stetigen empirischen Verteilungsfunktion $F(x)$ auf den Fall, in welchem $F(x)$ einer Klasse von durch den Parameter Θ gekennzeichneten Verteilungen $F(x, \Theta)$ angehört. Bei Einteilung von $-\infty < x < \infty$ in n Intervalle sei $F_i(\Theta)$ die Wahrscheinlichkeit, daß x in eines der ersten i Intervalle falle, und F_i die entsprechende empirische Häufigkeit in der N -gliedrigen Stichprobe, ferner

$$\xi_i = \sqrt{N} \{F_i - F_i(\bar{\Theta})\}, \quad \bar{\xi}_i = \sqrt{N} \{F_i - F_i(\Theta_0) - (\bar{\Theta} - \Theta_0) \partial F_i(\Theta) / \partial \Theta|_{\Theta=\Theta_0}\},$$

wo Θ_0 der wahre Wert von Θ und $\bar{\Theta}$ dessen Schätzung, $t_i = F_i(\Theta_0)$, $x = x(t)$ die Umkehrfunktion von $t = F(x, \Theta_0)$, $q(t) = \partial F(x(t), \Theta) / \partial \Theta$ und schließlich $u_T(t, x)$ Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\partial u / \partial \tau + \frac{1}{2} \partial^2 u / \partial x^2 = 0 \text{ in } 0 \leq \tau < T, \quad a_1(\tau) < x < a_2(\tau), \quad a_i(\tau) = [a_i + \delta z(q(\tau/(1+\tau)))](1+\tau)$$

($a_1 < 0 < a_2$) mit der Randbedingung $u_T(T, x) = 1$, $a_1(T) < x < a_2(T)$ sei, und $u_0(\tau, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} u_T(\tau, x) = u_0(\tau, x|z)$. Der vom Verf. bewiesene Satz 1 besagt, daß, wenn a) für $N \rightarrow \infty$

$N/N' \rightarrow \delta^2$, $\max_i |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$, b) $F(x, \Theta)$ in x stetig ist und eine in Θ gleichmäßig stetige

Ableitung $\partial F(x, \Theta) / \partial \Theta$ hat und $q(t)$ nach t stetig differenzierbar ist, c) die Schätzung $\bar{\Theta}$ von Θ und die der empirischen Verteilungsfunktion aus zwei gegenseitig unabhängigen Folgen von

Beobachtungen gewonnen sind, d) $\sqrt{N'}(\bar{\Theta} - \Theta_0)$ schwach konvergiert, die durch die Hypothese $\sqrt{N'}(\bar{\Theta} - \Theta_0) = z_N$ bedingte Wahrscheinlichkeit für $a_1 < \sqrt{N'}\{F_i - F_i(\bar{\Theta})\} < a_2$, $i = 1, 2, \dots, n$; $a_1 < 0 < a_2$, mit $N \rightarrow \infty$, $z_N \rightarrow z$ im stochastischen Sinn gegen $u_0(0, 0, z)$ konvergiert. Ist $u_0(t, s, \sigma) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha(t, s, \sigma)$, wo $u_\alpha(t, s, \sigma)$ Lösung einer Differentialgleichung vom Typ

$$\partial u / \partial t + A(t, s, \sigma | z) (\partial / \partial s + \psi(t) \partial / \partial \sigma) u + \frac{1}{2} (\partial / \partial s + \psi(t) \partial / \partial \sigma)^2 u = 0$$

ist (wobei sich A und ψ aus den folgenden Voraussetzungen bestimmen), so ergibt sich Satz 2:

Unter Voraussetzung a), b), c') $\sqrt{N'}(\bar{\Theta} - \Theta_0) = N^{-1,2} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) + \eta_N$ mit $E(\varphi(x_i)) = 0$, $\text{var} \varphi(x_i) = \sigma^2$ und für $N \rightarrow \infty$ im stochastischen Sinn gegen 0 konvergierendes η_N , konvergiert die durch die Annahme $\sqrt{N'}(\bar{\Theta} - \Theta_0) = z_N$ bedingte Wahrscheinlichkeit für $a_1 < \sqrt{N'} \cdot \{F_i - F_i(\bar{\Theta})\} < a_2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) mit $N \rightarrow \infty$, $z_N \rightarrow z$ gegen $u_0(0, 0, 0)$.

M. P. Geppert.

Manija, G. M.: Eine praktische Anwendung der Abschätzung des Maximums der beiderseitigen Abweichungen einer empirischen Verteilungskurve in einem gegebenen Wachstumsintervall des theoretischen Verteilungsgesetzes. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskij SSR 14, 521—524 (1953) [Russisch].

Ramachandran, G. and J. Ranganathan: A non-parametric two sample test. J. Madras Univ., Sect. B 23, 79—91 (1953).

Zur Prüfung der Hypothese, daß zwei Stichproben gleichen Umfanges n (X bzw. Y) der gleichen Ausgangsgesamtheit entstammen, ordnen Verff. die durch Vereinigung der beiden Proben entstandene Zahlenreihe der n X - und n Y -Werte nach steigender Größe und zählen Anzahl und Länge der X - bzw. Y -Iterationen aus. Als Kriterium für nicht zufällige Anordnung der X und Y dient die Quadratsumme der Iterationen-Längen: $N = \sum_{j=1}^n j^2 N_{1j} - \sum_{j=1}^n j^2 N_{2j}$

mit N_{1j} bzw. N_{2j} = Anzahl der X - bzw. Y -Iterationen der Länge j . Mit Hilfe von A. M. Moods (dies. Zbl. 24, 53) Formeln für die faktoriellen Simultan-Momente von N_{1j} , N_{2j} und Total-Momente von N_{1j} bzw. N_{2j} berechnen Verff. exakt Erwartungswert $E(N) = 6n^2/(n-2)$, 2. und 3. Schwerpunktsmoment μ_2 , μ_3 und approximativ das 4. Moment μ_4 . Durch Betrachtung von $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$, $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ und der Pearsonschen Typen-Charakteristik $k = \beta_1(\beta_2 - 3)^2/4(4\beta_3 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)$ bestimmen Verff. den asymptotischen Pearson-Kurventyp (VII) für $n \rightarrow \infty$. Für $n = 12$ wird die Verteilung von N genau tabuliert.

M. P. Geppert.

Roy, S. N. and R. C. Bose: Simultaneous confidence interval estimation. Ann. math. Statistics 24, 513—536 (1953).

In den meisten Anwendungen der Theorie der Mutungsgrenzen werden diese nur für einen Parameter oder eine Funktion der Parameter betrachtet. Die Verff. diskutieren hier einen Satz hinreichender Bedingungen, unter denen die simultane Bestimmung von Mutungsgrenzen für eine Menge von parametrischen Funktionen möglich ist, und verbinden diese Betrachtungen mit einer Methode der Testkonstruktion, die von Roy früher veröffentlicht worden ist. Es sei $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ eine beobachtete Menge zufälliger Veränderlicher, deren gemeinsame Verteilung von einer Menge unbekannter Parameter $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m)$ abhängt, ferner $II_k = f_k(\Theta)$ eine Menge von Funktionen der Parameter, wobei der Index k Element einer endlichen oder unendlichen Menge Ω ist. Dann wird das Problem der Bestimmung simultaner Mutungsgrenzen für II_k gemäß $\Phi_{k_1}(y) \leq II_k \leq \Phi_{k_2}(y)$ mit einem bestimmten Überschreitungskoeffizienten betrachtet, und zwar für alle $k \in \Omega$. Diese Fassung des Problems ist zu allgemein, als daß sie praktisch brauchbare Resultate liefern könnte. Die Verff. machen daher die Voraussetzung, daß es möglich ist, eine Menge von Funktionen $\gamma_k(y, II_k)$ zu finden, derart, daß $d_1 \leq \gamma_k \leq d_2$, wobei d_1 und d_2 von k unabhängige Konstante sind. Es folgen Anwendungen auf ein- und mehrdimensionale Verteilungen sowie auf lineare Funktionen von Mittelwerten bei mehrdimensionalen normalen Verteilungen und Ausblicke auf damit zusammenhängende Probleme der Kovarianz und Regression.

P. Lorenz.

Cam, Lucien Le: On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes' estimates. Univ. California Publ. Statist. 1, 277—330 (1953).

The author starts with an introduction surveying the history of the principle of maximum likelihood (M. L.) and connected topics. He then gives what, in his words, „are believed to

rigorous proofs of various asymptotic properties of several classes of estimates". In particular, the following results may be mentioned as illustrations: (i) within the set of asymptotically normal estimates there is no estimate, the asymptotic variance of which is an absolute minimum for all values of the parameter (so that a definition of efficiency based on this property is void); (ii) the set of „superefficiency“, i. e. the most extensive set of the parameter values at which the M. L. estimate can be improved (by finding another asymptotically normal estimate whose asymptotic variance is smaller at that particular parameter value) must be of Lebesgue measure zero, and must satisfy further conditions. Also, if an estimate is superefficient for a certain value, then there exists an infinite sequence of values at which it is worse than the M. L. estimate; (iii) whatever the a priori distribution of the estimated parameter, the a posteriori distribution tends to be normal as the sample size increases.

S. Vajda.

Kamat, A. R.: Some properties of estimates for the standard deviation based on deviations from the mean and variate differences. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **5**, 233—240 (1953).

When a trend is present in a sample x_1, \dots, x_n , the ordinary variance estimate s^2 is more or less seriously biased, and estimates based on successive differences may be preferable. The author investigates variance and bias of estimates based on sums of form $\sum_{p,r} = \sum_i |\Delta^r x_i|^p$ where $\Delta^r x_i$ denotes the r -th difference. He also shows that, in the normal case, the statistic $\omega_{p,r} = \sum_{p,r}/s^p$ — which may be used for testing purposes — is independent of s ; this enables computation of its moments.

G. Elfving.

Rider, Paul R.: Truncated Poisson distributions. *J. Amer. statist. Assoc.* **48**, 826—830 (1953).

Zur Schätzung des unbekannten Parameters λ einer Poisson-Verteilung $e^{-\lambda} \lambda^x/x!$ ($x = 0, 1, \dots$) auf Grund einer N -gliedrigen, von unten her gestützten Stichprobe mit nur für $x = k, k+1, \dots$ bekannten, entsprechenden empirischen Häufigkeiten f_x leitet Verf. den Ausdruck $(T_2 - kT_1)/[T_1 - (k-1)T_0]$ mit $T_j = \sum_{x=k}^{\infty} x^j f_x$ her, welcher in den hier betrachteten numerischen Beispielen sich als der aus der Gleichung

$$r_1^k = [\lambda - e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{k-1} x \lambda^x/x!] / [1 - e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{k-1} \lambda^x/x!]$$

mit r_1^k = erstes Moment der gestützten Stichprobe) zu bestimmenden Maximum-Likelihood-Schätzung von λ überlegen erweist.

M. P. Geppert.

Durbin, J.: A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients. *J. Amer. statist. Assoc.* **48**, 799—808 (1953).

Entsprechend dem Modell $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ mit ε unabhängig voneinander und von den X_i mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2 , liege eine n -gliedrige Stichprobe vor; außerdem eine erwartungstreue Schätzung b_1 von β_1 mit erwartungstreuer Schätzung S_1^2 von deren Varianz σ_1^2 . Die Aufgabe, sodann β_2 optimal zu schätzen, löst Verf. als Spezialfall einer umfassenderen analogen Aufgabe der Schätzung von Koeffizienten-Vektoren auf Grund von A. C. Aitken's (dies. Zbl. **11**, 266) Satz über die besten linearen Schätzungen nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate. Die Lösung wird verglichen mit der weniger effizienten, die sich einfacher durch direktes Einsetzen von b_1 für β_1 ergibt. Anwendung auf ein numerisches Beispiel aus der Ökonometrie.

M. P. Geppert.

Costa, M. A. Fernandes: On the graduation of discrete frequency distributions. *Inst. Actuários Portug., Bol.* **8**, 21—27 (1953).

Der Verf. beschreibt in Verallgemeinerung eines Vorschlages von H. C. Carver die Ausgleichung mittels der Differenzengl. $(1/y_x) \cdot 1/y_{x+1} = P(x)/Q(x)$, wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome, die vom Verf. gemäß einer Momentenbedingung bestimmt werden.

W. Sauer.

Gini, Corrado: La tyrannie des chiffres. *Metron* 17, 3—24 (1953).

In questo articolo vengono illustrate e discusse talune conseguenze del progressivo diffondersi del costume di voler tutto graduare, numerare, valutare, misurare, sia nel campo economico che in quello demografico-sociale. Il lavoro è a carattere sociologico, fondato però sull'esame di fenomeni prevalentemente statistici.

T. Salvemini.

Gini, Corrado: Le basi statistiche delle diagnosi e delle prognosi. *Metron* 17, 127—150 (1953).

L'A. classifica le operazioni dell'organismo umano in tre categorie: spontanee e incontrollabili, spontanee ma controllabili, acquisite per imitazione o per istruzione. Rileva che per le diagnosi mediche (le quali rientrano nella terza categoria) è necessaria la statistica, e delinea le basi sulle quali dovrebbe poggiare la moderna diagnostica medica, estendendo le sue considerazioni anche al campo delle prognosi.

T. Salvemini.

Smith, Cedric A. B.: The detection of linkage in human genetics. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 15, 153—192 (1953).

There are three statistical methods used in practice for the detection of human linkage, namely, the sib-pair method due to Penrose, the method of efficient scores due to Fisher and Finney, and the method of likelihood ratio, or backward odds, due to Haldane and Smith. All are really different forms of the likelihood ratio test. The present paper begins with an expository summary on standard results in human genetics needed for later developments and then aims to make a unified presentation of the subjects, showing the relations between the three methods. — Eta measure of linkage defined by $\eta = 1 - 2\chi$ is used as a fundamental parameter where χ designates the recombination fraction. In case the available data cover at most two generations in each family of a sample, the probability of obtaining any given family becomes an even function of η , and the parameter $\xi = \eta^2$ may then be used as a substitute of η . Explicit formulae for mean and variance are derived concerning several statistics according to the methods enumerated above. — Various discussions by several geneticists are inserted at the end of the paper.

Y. Komatu.

Jecklin, H. und W. Leimbacher: Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlaubt. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 53, 129—139 (1953).

Die Lidstonesche Z-Methode zur gruppenweisen Reserveberechnung geht von der Voraussetzung aus, daß sich die abgekürzte Leibrente in der Form $a_{x:\overline{n}} \sim A_n + q_x B_n$ darstellen läßt. Gefragt wird nach analytischen Absterbeordnungen, welche diese Darstellung exakt erfüllen. Diese müssen offenbar die Bedingungen erfüllen: $l_x < l_{x-1}$ ($x = 1, 2, \dots, \omega$); $l_{x=0} = l_0$, $l_{\omega} = 0$; ${}_t p_x = a_t + q_x b_t$ ($t = 0, 1, \dots, \omega - 1 - x$). Es wird gezeigt, daß diese Absterbeordnungen die Gestalt $l_x = l_0 [\sin z(\omega - x) / \sin z \omega] k^x$ ($0 < x < \omega < \infty$; $|z| > 0$, z reell oder imaginär) haben. Für $z \sim 0$ folgt $l_x = l_0(1 - x/\omega) k^x$. Benutzt man diese Form der Absterbeordnung, so erhält man für die abgekürzte Leibrente $a_{x:\overline{n}} = a_n^* - [1/(\omega - x)] (Ia)_{n-1}^*$ mit $vk = v^*$. An Hand eines Beispiels wird bestätigt, daß die konstruierte Absterbeordnung die Wirklichkeit befriedigend wiedergeben kann. Die erhaltenen Ergebnisse werden auf die Z-Methode angewandt.

G. Reichel.

Lah, Ivo: Die vorteilhafteste Interpolation der Rentenbarwerte. *Inst. Actuários Portug.,* 7, 7—20 (1953).

Der Verf. bestimmt diejenigen Potenzen der Rentenbarwerte, die linear oder parabolisch interpoliert, die besten Näherungswerte für den Rentenbarwert zu irgendeinem Zinsfuß ergeben. Er gelangt zu der schon im Jahre 1947 von ihm bewiesenen verallgemeinerten Formel von Frucht. Der Beweis und die darin enthaltenen Abschätzungen sind nicht in jeder Hinsicht völlig scharf und vollständig.

W. Saxer.

Luízi, Eduardo Grilo: Einige Grundlagen für das Studium von Familienversicherungen. Inst. Actuários Portug., Bol. 8, 77—95 (1953) [Portugiesisch mit französ. Zusammenfassg.].

Dans ce travail l'auteur développe le procédé suivi dans le traitement d'éléments statistiques fournis par quelques associations de secours mutuels à fin de déterminer des coefficients démographiques qu'il a utilisé ensuite dans le calcul — par la méthode collective — les charges de l'assurance par décès des familiers qui dépendent des assurés. *Autoreferat.*

Benktander, Gunnar: On the variation of the risk premium with the dimensions of the house within fire insurance. Skand. Aktuarietidskr. 1953 (36), 203—212 (1953).

Verf. berichtet über einige wesentliche Ergebnisse statistischer Untersuchungen an einem großen Beobachtungsmaterial, das seit dem Jahre 1936 von schwedischen Feuerversicherern zusammengetragen worden ist. Diese Untersuchungen haben vor allem gezeigt, daß nicht allein zwischen der Feuerbruchswahrscheinlichkeit q_s , sondern auch, zumindest für einige wichtige Gruppen von Risiken, zwischen der Risikoprämie p_s selbst und der Versicherungssumme s des vom Brand betroffenen Hauses eine einfache lineare Beziehung $p_s = \alpha_0 + \beta s$ besteht. Die Parameter α_0 und β bestimmt Verf. mit Hilfe der Methode der Momente und diskutiert ihre Abhängigkeit insbesondere vom Geldwert in verschiedenen Zeitabschnitten. *G. Friede.*

Meidell, Birger: Randbemerkungen zum Landrésehen Maximum. Skand. Aktuarietidskr. 1953 (36), 168—181 (1953).

Zur Feststellung des maximalen Selbstbehaltes in der Lebensversicherung hat C. L. Landré das Postulat aufgestellt, „daß keine neue Versicherung angenommen werden darf, durch welche das relative Risiko zunehmen würde“, und daraus gefolgert, daß „das Doppelte des mittleren versicherten Betrages per Person ein sehr sicheres Maximum“ sei (vgl. z. B. „Lebensversicherung“, 5. Aufl., Jena 1921, 447ff.). In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. mit Hilfe der von ihm unter der Annahme einer Paretschen Verteilung als Verteilung der versicherten Summen bereits früher [VII. Congr. Internat. d'Actuaires, Paris 1937, I, 85; Nordisk Forsakringstidskr. 3, 363 (1938)] abgeleiteten und diskutierten Formeln für das Maximum den Geltungsbereich des von verschiedenen Seiten kritisierten Postulats. Er kommt zu dem Ergebnis, daß dieses Postulat nur dann zu durchaus anwendbaren Maxima zu führen scheint, wenn bei der Berechnung dieser Maxima jeweils sämtliche bereits versicherten Summen in voller Höhe berücksichtigt werden. *G. Friede.*

Thépaut, André: Essai de détermination pratique du plein de conservation. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français 64, 371—472 (1953).

Ein Versicherer sollte nach Verf. zwei Risikoreserven v und w bewahren: w , Reserve gegen Wahrscheinlichkeitsschwankungen, wird auf Grund der beobachteten Häufigkeitsstreuung bestimmt; v , Reserve gegen Zufallsabweichungen, soll mit Höchstsumme, Risikobelastung und Ruinwahrscheinlichkeit in der Beziehung stehen, die der kollektiven Risikotheorie entspricht. Diese wird für praktische Anwendungen vereinfacht, indem $e^t - 1 - t$ mit $t^2/2$ bzw. $t^2(1 - t/3)$ begrenzt wird; so werden bequeme Formeln für die verschiedenen Rückversicherungsformen angegeben. *B. de Finetti.*

Wenk, Alfred: Über eine Aufspaltung verschiedener Versicherungsformen nach Risiko- und Sparfunktion. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 53, 189—203 (1953).

Jéquier u. a. haben gezeigt, daß die gemischte und die terme-fixe-Versicherung auf ein Leben in eine reine Sparversicherung und in eine Überlebenszeitrente (Erbrente) aufgespalten werden können. Die Aufspaltung aller Todesfallversicherungen mit unbedingter Leistung in eine Sparversicherung und in so viel Erbrenten, wie (normale und anomale) Leben versichert sind, gelingt Verf. mit Hilfe des Satzes, daß die algebraische Summe der Barwerte von zwei Zeitrenten verschiedenen Betrages und verschiedener Dauer gleich dem Barwert einer Zeitrente über die Summe der Beträge von einer mittleren Dauer ist:

$$R_1 a_{\overline{n_1-t}|} + R_2 a_{\overline{n_2-t}|} = (R_1 + R_2) a_{\overline{n_3-t}|},$$

wobei n_3 das gewogene Mittel aus n_1 und n_2 mit v^a als Wägungsfunktion ist, nämlich $v^{a/3} = (R_1 v^{a_1} + R_2 v^{a_2}) / (R_1 + R_2)$. Mit $R_2 a_{\overline{n_2-t}|} = B$ ergibt sich daraus ein weiterer Hilfssatz, der die Anwendung auf die Risikobasis-Excedenten-Rückversicherung mit Selbstbehalt B ermöglicht (Rückdeckung einer Erbrente auf Dauer k , n , k bestimmt durch $R a_{\overline{n-k}|} = B$). Ferner zeigt Verf., wie die Aufspaltung für die Reservelegung eines ganzen Bestandes (Prämienreserve Ende Rechnungsjahr, zerlegt in eine Spar- und eine Risiko-Rücklage) und für die Gewinnanalyse nutzbar gemacht werden kann. *H. Härlen.*

Jecklin, H.: Beitrag zur technischen Behandlung anormaler Risiken in der Lebensversicherung. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 53, 57—77 (1953).

Bei der Versicherung anormaler Risiken wird die Methode der konstanten multiplikativen Übersterblichkeit bevorzugt. Da diese den tatsächlichen Verlauf nicht zutreffend angeben kann, wird der folgende Weg vorgeschlagen: Die Sterbenswahrscheinlichkeit der Normaltafel habe die Gestalt $q_x = a + b c^x$. Unter der Annahme, daß der Sterblichkeitsverlauf der anormalen Risiken durch Variation der Konstanten a und b erfaßt wird, erhält man $q_x = (1 + \alpha) a + (1 + \gamma) b c^x$. Setzt man $\alpha a = a'$ und $1 + \gamma = c^m$ mit $m = \lg(1 + \gamma)/\lg c$, so erkennt man, daß sich die Änderung von a und b stets durch eine konstante additive Sterblichkeitserhöhung und eine Alterserhöhung ausdrücken läßt. Verf. ermittelt nun die jährliche Nettoprämie der gemischten Versicherung des anormalen Risikos in der Form $\bar{P}_{x, \bar{n}} \sim P_{x+m, \bar{n}} + Z(a')$, wobei $Z(a')$ z. B. in der Form $Z(a') \sim 0.5 a' (1 + 0.25 i n)$ angegeben wird. Es werden Beispiele und Zahlenmaterial angegeben. G. Reichel.

Mises, Ludwig von: Bemerkungen über die mathematische Behandlung nationalökonomischer Probleme. Studium generale 6, 662—665 (1953).

Verf. stellt die mathematische Wirtschaftswissenschaft als Irrweg hin. Dabei geht er von einer zu wörtlichen Auffassung des Satzes „science is measurement“ aus (darauf, daß die Gleichsetzung von „mathematisch“ und „quantitativ“ falsch ist, verweist Kneser in der anschließend veröffentlichten Arbeit, die gegen die meisten Behauptungen des vorliegenden Aufsatzes den Gegenbeweis enthält; siehe folgend. Ref.). Das führt dazu, daß Verf. der mathematischen Nationalökonomie die „logische“ entgegensetzt, also implizit Mathematik und Logik in Gegensatz bringt. — Er geht davon aus, daß Gegenstand der Nationalökonomie menschliches Handeln ist, das von Werturteilen geleitet wird. „Das Werturteil mißt nicht, es skaliert.“ Für das menschliche Handeln gäbe es keine Konstanten. Alle Aussagen über die Zukunft seien spekulativ. Die mathematische Methode erschöpfe sich in der Bearbeitung wirtschaftsgeschichtlicher Daten; statistisch könne nur historische Erfahrung gewonnen werden, die nicht zur Aufstellung theoretischer Sätze führen könne, weil dazu allgemeine Sätze, unabhängig von historischer Erfahrung, erforderlich wären. Die Aufstellung von Differentialgleichungen erweitere nicht die Erkenntnis: es werde nur in Symbolen dargestellt, was vorher in Worten gesagt wurde. — Verf. geht bei allen seinen Feststellungen von dem Glauben aus, daß sich die Anwendung der Mathematik in Wirtschafts- und verwandten Wissenschaften wesentlich von ihrer Anwendung in den Naturwissenschaften unterscheide. H. Härlen.

Kneser, Hellmuth: Soziologie und Wirtschaftswissenschaft in heutiger mathematischer Behandlung. Studium generale 6, 666—678 (1953).

Verf. gibt eine allgemeinverständliche Einführung in die durch v. Neumann-Morgenstern, Theory of games and economic behavior, inaugurierten Forschungen. Die Darstellung ist geeignet, viele Mißverständnisse auszuräumen, die bei Nationalökonomien bestehen, welche mit dem Sinn und der Tragweite mathematischer Verfahren nicht vertraut sind. Im ersten Teil beantwortet Verf. die Frage nach dem Wesen der modernen Mathematik und ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Wirklichkeit. Im zweiten Teil „Ansatz zu einer mathematischen Soziologie“ werden die axiomatisch eingeführte Präferenzen-Skala metrisiert und die Grundgedanken der v. Neumannschen Theorie dargelegt, ferner u. a. gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die Entschlüsse der beteiligten Personen sich nach einer linearen Wertfunktion richten. H. Härlen.

Hildreth, Clifford: Alternative conditions for social orderings. Econometrica 21, 81—94 (1953).

Unter einigen Annahmen bezüglich der n individuellen Ordnungen $\mathfrak{R}_i(S)$ aller denkbaren sozialen Zustände, die an Axiome von J. von Neumann und O. Morgenstern (Theory of games and economic behavior, 2. Aufl. Princeton 1947) anknüpfen, beweist Verf., daß jede auf Grund der v. Neumann-Morgenstern-„Utilitäten“ in bestimmter Weise gewonnene soziale Ordnung $\mathfrak{R}(S) = M \{ \mathfrak{R}_1(S), \dots, \mathfrak{R}_n(S) \}$ eine Reihe vorher vom Verf. aufgestellter, plausibler Bedingungen erfüllt, womit die Existenz von Methoden zur Gewinnung von Gruppenbevorzugungen aus individuellen Bevorzugungen nachgewiesen ist. Sein System von Bedingungen vergleicht Verf. mit dem von K. Arrow (Social choice and individual values, New York 1951) angegebenen. M. P. Geppert.

● Shephard, R. W.: Cost and production functions. Princeton: Princeton University Press 1953. VII, 104 p. \$ 2,00.

Die Produktionsfunktionen $U = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ sind in einem Bereich des n -dimensionalen Raumes mit n Produktionsfaktoren als Koordinaten definierte, positive, stetige Funktionen mit stetiger erster Ableitung. Mit p_i als Preisen der Produktionsfaktoren wird die Kostenfunktion $\lambda = Q(U, p_1, \dots, p_n)$ durch U so bestimmt, daß $\sum_1^n p_i x_i$ zum Minimum wird. Verf. zeigt, daß die in U transformierbare Distanzfunktion $\Psi(U, x_1, \dots, x_n) = 1$ durch das duale Minimum-Problem aus Q bestimmt ist; die Flächen $\Psi = 1$ und $Q = 1$ sind für jedes U polar reziprok zu einander. Aus der Dualität leitet Verf. ab: dafür, daß die Kostenfunktion $Q(U, p_1, \dots, p_n)$ „faktorisierbar“ werden kann, $Q = f(U) \cdot F(p_1, \dots, p_n)$, ist notwendig und hinreichend, daß die Produktionsfunktion U homothetisch ist, d. h. $U = \Phi(\sigma(x_1, \dots, x_n))$, wo σ homogen vom Grade 1 ist, ferner Φ stetig, positiv und monoton steigend. F und σ sind verallgemeinerte Indices für Preise und Mengen, nämlich gewogene, geometrische Mittel der relativen Preise bzw. Mengen. Damit ergibt sich eine Verallgemeinerung der dynamischen Theorien von Evans und Roos, in denen die Kostenfunktion $Q(U)$ nur von U abhängig ist. Die Übertragung auf die faktorisierte Kostenfunktion ist ohne wesentliche Modifikationen möglich, was Verf. an Evans' Dynamik der Monopole zeigt. Er kommt, indem er die Nachfragefunktion als linearen Differentialausdruck annimmt, zu einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, die er unter der Annahme löst, daß F eine lineare Funktion von t ist, $F(t) = \alpha + \beta t$, $\alpha > 0$. (Der Fall $\beta = 0$ ist der von Evans.) H. Härten.

Tinbergen, J. and H. M. A. van der Werff: Four alternative policies to restore balance of payments equilibrium. (A comment and an extension.) *Econometrica* 21, 332—335 (1953).

Die Verf. geben neben einigen Korrekturen eine Ergänzung zu der Arbeit von Tinbergen (dies. Zbl. 48, 128), nach der die dort gewonnenen Ergebnisse im wesentlichen auch dann gelten, wenn die universelle Wohlfahrtsfunktion nicht die einfache arithmetische Summe der Wohlfahrtsfunktionen für die einzelnen Länder ist, sondern eine gewogene Summe. H. Härten.

Malmquist, Sten: Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos Estadíst.* 4, 209—241 u. span. Zusammenfassg. 242 (1953).

Verf. definiert den Preis-Index nach Könyus als Preis-Kompensations-Index $J_{01}^p(S) = \mu(P_1, S) / \mu(P_0, S)$ mit $\mu(P, S)$ als Einkommen, zu dem bei den Preisen $\{P\}$ eine Mengenkombination der Mengen-Indifferenz-Fläche S gekauft wird. Aus dem gegebenen System von Mengen-Indifferenz-Flächen wird ein System relativer Preis-Indifferenz-Flächen abgeleitet. Ist $\{P\}$ ein Punkt der Preis-Indifferenz-Fläche S_0 , $\{x\}$ ein Punkt von S_1 , so ist dann und nur dann jeder Preis-Index bezogen auf S_0 gleich dem entsprechenden Index bezogen auf S_1 , wenn α konstant, also unabhängig von $\{P\}$ ist (Theorem 2). Verf. definiert daraufhin den Mengen-Index $J_{01}^q(S_0) = \alpha$, wenn α so bestimmt ist, daß $\alpha Q_1 = \{x q_1\}$ auf derselben Mengen-Indifferenz-Fläche S_0 wie $Q_0 = \{p_0 q_0\}$ liegt. Die geläufigen Indices werden hiermit verglichen, insbesondere die von Stachle, die obere und untere Grenzen für den Preis-Kompensations-Index darstellen, ferner die von Laspeyres und Paasche und der Ketten-Index von Divisia. Schließlich behandelt Verf. den Preis-Index für den Fall, daß einzelne Waren rationiert sind. H. Härten.

Morrisett, Irving: Some recent uses of elasticity of substitution. A survey. *Econometrica* 21, 41—62 (1953).

Es sind vielerlei Unterscheidungen notwendig: zuerst definieren $d \log(x_1/x_2) / d \log(dx_2/dx_1)$ bzw. $d \log(x_1/x_2) / d \log(p_1/p_2)$ (x_i = Mengen, p_i = Preise) den „echten“ und den „empirischen“ Begriff der Substitutionselastizität, die nur unter Umständen zusammenpassen; ferner muß man das Veränderungsgebiet bestimmen oder Einschränkungen betrachten, die es zu vermeiden gestatten; endlich ändert sich der Sinn in bezug auf: Produktionstheorie, individuelle bzw. gemeinschaftliche Nachfragetheorie. Nach Verf. spielt der Begriff keine wesentliche Rolle. B. de Finetti.

Gorman, W. M.: Community preference fields. *Econometrica* 21, 63—80 (1953).

In einer Reihe von Sätzen stellt Verf. formale Beziehungen auf zwischen „Gemeinschafts-Indifferenz-Mengen“ einerseits und „Utilitäts-Möglichkeiten“

andererseits, die Verf. auf Grund der Verbrauchsvektoren $\{x_{ri}\}$ ($i = 1, \dots, n$) von N Personen ($r = 1, \dots, N$) bezüglich n Warengattungen und entsprechender, in allen Variablen monoton zunehmender Utilitäts-Indices $u_r(x_{r1}, \dots, x_{rn})$ mengentheoretisch definiert. Es wird gezeigt, daß ein gegebenes System persönlicher Indifferenz-Mengen dann und nur dann auf eine einzige Gemeinschafts-Indifferenzmenge führt, wenn die individuellen Engelsen Kurven für verschiedene Individuen bei gleichen Preisen parallele Geraden sind. Es wird eine allgemeine Methode zu ihrer Konstruktion beschrieben; ferner folgen Hinweise auf mögliche praktische Anwendungen.

M. P. Geppert.

Malinvaud, Edmond: Capital accumulation and efficient allocation of resources. *Econometrica* 21, 233—268 (1953).

Die Vektoren des m -dimensionalen euklidischen Raumes der m Produktionsgüter (einschließlich Dienste) stellen Gütermannigfaltigkeiten dar, ihre Komponenten die Quantitäten der einzelnen Güter. Mit „Chronik“ wird im Anschluß an Guilbaud die quantitative Beschreibung eines möglichen Verlaufes der wirtschaftlichen Zustände bezeichnet, der durch die erzeugten, gehandelten und verbrauchten Quantitäten aller Güter bestimmt ist. Eine „Chronik“ C ist in reduzierter Form durch die Folgen $\{x_t\}$ der konsumierten Quantitäten und $\{y_t\}$ des gewerblichen Verbrauches (input) gegeben. Die Zeit wird als Folge diskreter Perioden angenommen, $t = 1, 2, \dots$. Die Menge der technologischen Möglichkeiten T_t wird als $2m$ -dimensionale Menge derjenigen Vektorenpaare (a_t, b_{t+1}) definiert, für die die Transformation von a in b_{t+1} technisch möglich ist. Es wird vorausgesetzt, daß T_t konvex ist. Ferner wird vorausgesetzt, daß mit $(a_t^1, b_{t+1}^1) \in T_t$ auch $(a_t^2, b_{t+1}^2) \in T_t$, wenn $\{a_t^2\} \geq \{a_t^1\}$ ist, d. h. $a_{it}^2 \geq a_{it}^1$ für alle Komponenten (alle i): diese Forderung bedeutet, daß die Produktion nicht gehemmt wird, wenn mehr von einem Gut zur Verfügung steht. C^1 wird als „efficient“ definiert, wenn es keine Chronik C mit $\{x_t\} \geq \{x_t^1\}$ gibt. Es wird schrittweise für $t = h, h$ zunehmend, bewiesen, daß die Effizienz von C^1 mit der Existenz einer Folge von nichtnegativen

Preisvektoren $\{p_t\}$ gleichbedeutend ist, so daß $\sum_{t=1}^h p_t y_t$ für C^1 minimal unter allen C ist. Ferner werden der Begriff der optimalen Chronik eingeführt und dafür entsprechende Sätze aufgestellt, sowie der Fall dezentralisierter Produktion behandelt. Besonders ausführlich wird das Problem des nichtnegativen Zinsfußes diskutiert; u. a. wird gezeigt, daß aus der Existenz eines preiskonstanten Gutes, welches ohne Kosten gelagert werden kann, die Nichtnegativität des Zinsfußes folgt. In einer Wirtschaft mit optimalem Betrag des Kapitals ist der Zinsfuß 0, wenn das Optimum erreicht wird.

H. Härten.

Georgescu-Roegen, Nicholas: Note on Holley's „dynamic model“. *Econometrica* 21, 457—459 (1953).

Kritische Bemerkungen zu Holley, dies. Zbl. 48, 129. — Verf. behauptet 1., es müsse als zusätzliche Bedingung angenommen werden, daß der Ausgaben-Koeffizient e_j konstant in bezug auf die Produktion X_j ist. 2. beweist er, daß das Verhältnis Warenverbrauch/Produktion entgegen der Annahme von Holley nur dann (nicht immer) gleich dem stationären Verbrauchskoeffizienten ist, wenn das System stationär ist oder wenn nur ein „lead“ = 0 vorliegt. Daß die Resultate für eine einzige Vorhandzeit (lead) auf den allgemeinen Fall multipler leads übertragen werden können, gilt also nur — trivialerweise — für den stationären Fall. Schließlich (3. und 4.) weist Verf. darauf hin, daß das Programm für die fünf Jahre 1940—1944 nur so aufgestellt werden konnte, daß auch die Folgejahre berührt werden. Es muß entweder für die Ewigkeit geplant werden oder es sind willkürliche Endbedingungen anzunehmen. — Vgl. folgend. Referat.

H. Härten.

Holley, Julian L.: Comment on Georgescu-Roegen's note on „A dynamic model“. *Econometrica* 21, 460—462 (1953).

Erwiderung auf vorstehend referierten Aufsatz. — Zu 1. liegt ein Irrtum von Georgescu-Roegen vor; Verf. beweist die Konstanz von e_j aus der Konstanz der a_{ij} , $i = 1, \dots, n$. 2. Georgescu-Roegen definiert das output/input-Verhältnis anders als Verf. Bei ihm ist $X'_{ij,t}$ die Menge der Ware i , die in der Periode t der Industrie j zufließt, während Verf. mit demselben Symbol den

für die Produktion (output) der Periode t benötigten Verbrauch bezeichnet; Differenz also um die Vorhandzeit (lead). H. Härten.

Holley, Julian L.: A dynamic model. II. Actual model structures and numerical results. *Econometrica* 21, 298—324 (1953).

Die vom Verf. im ersten Teil der Arbeit (dies. Zbl. 48, 129) an den Mustermustern P 91 und P 92 entwickelten Grundsätze werden von ihm auf die von den US Air Force durchgeführten Modelle M 91 und M 92 angewandt. 40 zivile Industrien, 47 militärische (von denen die ersten 40 mit den zivilen zusammenfallen) und 47 „Kapitalbildungs-Industrien“ (Bevorratungsindustrien, nur von den 40 zivilen Industrien beliefert) sind durch die „input“-Matrizen a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} gegeben; $a_{ii} = b_{ii} = 0$; $b_{ij} = 0$ für $41 \leq i \leq 47$ (die letzten sieben militärischen Industrien erzeugen nur Endprodukte). Die Berechnungen für beide Modelle konnten mit Hollerithmaschinen durchgeführt werden, für das diskrete Modell M 91 mit routinemäßigen Schaltungen. Für das kontinuierliche Modell M 92 war dagegen teilweise „Maßarbeit“ erforderlich; dafür ist M 92 im Gegensatz zu M 91 ohne Schwierigkeiten an geänderte „final demands“ anzupassen, wenn die „input“-Koeffizienten und „leads“ unverändert bleiben. Die Entwicklung der Kapitalbildung nach den Modellen M 91 und M 92 wird tabellarisch und graphisch mit der tatsächlichen Entwicklung für eine Reihe von Industrien verglichen; für andere Industrien findet der Vergleich für den Ausstoß (output) statt. Dabei ergeben sich besonders bei der Kapitalbildung erhebliche Divergenzen, deren Gründe diskutiert werden. Die Entwicklung des output zeigt dagegen bei monoton zunehmender Produktion sehr gute Übereinstimmung zwischen Modellen und Wirklichkeit. H. Härten.

Rajski, G.: On a certain case of calculating planned surpluses. *Zastosowania Mat.* 1, 46—52, russische u. engl. Zusammenfassg. 53, 53—54 (1953) [Polnisch].

The paper describes a method of calculating planned surpluses of item goods in cases where statistical control is applied and the lots found bad are screened. After screening, the lots no longer contain defective items and consequently lower the mean fraction defective of the goods which after a certain number of deliveries accumulate in the consumer's store. In this way screening constitutes a factor which, to a certain degree, secures the consumer against the effects of accidental variations in the fraction defective of goods delivered. This security is not absolute but statistical. It is possible to calculate the probability that the fraction defective of the goods accepted will not exceed a certain limit. Knowing this limit the consumer can calculate the surplus of goods which he should order so that he might — with an arbitrarily assumed probability — obtain at least as many good items as he needs. The paper contains the analytical foundation of the relations described above and a graphical method of finding the quantity of the surplus which should be ordered. Autoreferat.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Lombardo-Radice, Lucio: Sui piani microdesarguesiani affini. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., (I. Ser. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 15, 264—271 (1953).

Eine Translationsebene (das ist eine affine Ebene, in der der kleine affine Satz von Desargues gültig ist) enthält als Teilbereich eine affine Ebene über einem (endlichen oder unendlichen) Primkörper K_p . Man erhält diese Ebene, indem man, von einem Punkt P ausgehend, alle Bildpunkte $\varrho^i \sigma^k P$ (i, k ganz) unter zwei linear unabhängigen Translationen ϱ und σ betrachtet und hiermit das rationale Netz erzeugt. Dies Ergebnis entspricht der Tatsache, daß der zugehörige Koordinatenbereich, mit Veblen-Wedderburn-System oder mit Quasikörper bezeichnet, einen Primkörper enthält. Bemerkung: Nach neueren Untersuchungen von J. André [Math. Z. 60, 156—186 (1954)] enthält ein Quasikörper Q einen Schiefkörper K , der aus den Elementen s von Q besteht, für die $s(x+y) = s x + s y$; $s(xy) = (sx)y$ für alle $x, y \in Q$ gilt. Der genannte Primkörper K_p ist der Primkörper von K . W. Klingenberg.

{ Cundy, H. Martyn: 25-point geometry. *Math. Gaz.* 36, 158—166 (1952).
{ Fletcher, T. J.: Finite geometry by coordinate methods. *Math. Gaz.* 37, 34—38 (1953).

Il Cundy nella sua nota studia una geometria piana euclidea finita di 25 punti, assegnata in modo puramente combinatorio, con 30 allineamenti di 25 lettere; individua delle classi di trasformazioni del piano, introduce delle distanze tra punti, definisce e studia delle coniche

ecc. Ora, il piano finito di Cundy non è altro che il piano euclideo finito sopra il campo di Galois con 5 elementi, GF (5); di ciò si è accorto il Fletcher, nella nota che qui insieme a quella del Cundy si recensisce, ed ha tradotto i risultati combinatori del Cundy nei metodi della geometria analitica di un campo di Galois, generalizzandoli e approfondendoli. È da notare in particolare che il Fletcher, quasi contemporaneamente e indipendentemente dai finlandesi G. Järnefelt e P. Kustaanheimo (questo Zbl. **48**, 371), osserva che è necessario introdurre due tipi di distanze tra punti (che son quelle chiamate dal Cundy „lunghezze in colonna“ e „lunghezze in riga“), a seconda che la espressione che definisce la distanza tra 2 punti è o no un residuo quadratico. Ma, mentre l'osservazione del Fletcher riguarda il caso particolare studiato da Cundy, nella citata nota dei due matematici finlandesi la cosa è sviluppata in modo sistematico, e serve a introdurre una nozione di „congruenza“ in un piano su di un campo di Galois.

L. Lombardo-Radice.

Tits, J.: Étude de certains espaces métriques. Bull. Soc. math. Belgique **1952**, **44**—**52** (1953).

L'A. fait un progrès significatif dans le traitement du problème de Riemann-Helmholtz-Lie. Helmholtz postulait la libre mobilité jusqu'à la dimension $n - 1$, Lie réussissait à se contenter des dimensions jusqu'à la $(n - 2)$ -ième. Un résultat bien connu de H.-C. Wang (ce Zbl. **44**, 196) peut être interprété dans ce sens que, dans les dimensions impaires (et sous quelques conditions supplémentaires), la libre mobilité jusqu'à la dimension 2 implique la restriction aux espaces classiques. L'A. traite toutes les dimensions, en omettant une partie considérable des restrictions. Il suppose l'espace R localement compact, connexe, de dimension finie, et muni d'une structure uniforme invariant par rapport au groupe complet G , transitif en R . G_p étant le sous-groupe qui conserve p , il postule que, ou $G_p(q) = G_p(r)$ ou $G_p(q)$ sépare p de r ou $G_p(r)$ sépare p de q . [C'est la condition la plus faible de Kolmogoroff (Göttinger Nachr. **1930**, 208—210 (1930).] Il est remarquable que cette condition limite considérablement le nombre des paires (R, G) admises. Malheureusement je n'ai pas réussi à vérifier les affirmations de l'A.; il me semble que sa classification doit être complétée (ce qui ne diminue pas la valeur de ses résultats). Sur la base de cette classification l'A. annonce une solution nouvelle du problème de Riemann-Lie-Helmholtz-Kolmogoroff, qui n'est pas assez claire.

H. Freudenthal.

● **Schilling, F.: Die geodätischen Linien und geodätischen Kreise der Rotationsflächen konstanter Krümmung. I. und II. Band.** München: R. Oldenbourg **1953**. XII, 162 S. mit 78 Abb. Bd. I u. II DM 40,—.

Im Anschluß an frühere Werke des Verf. über nichteuklidische Geometrie werden die geodätischen Linien und Kreise auf den verschiedenen Typen von Drehflächen fester Krümmung nacheinander analytisch dargestellt und in Hinblick auf die nichteuklidische Geometrie geometrisch untersucht. Die Behandlung fußt auf der Abbildung dieser Flächen auf eine Ebene mit entsprechender Maßbestimmung, teilweise auch auf einer Abbildung auf die reelle oder imaginäre Kugelfläche. Das Buch ist für Studierende in mittleren Semestern verständlich und stellt eine in viele Einzelheiten liebevoll eindringende Materialsammlung dar.

W. Süß.

Mokrišev, K. K.: Über die Lösbarkeit der Konstruktionsaufgaben zweiten Grades in der Lobačevskischen Ebene mit Hilfe des Hyperzirkels oder des Zirkels und des Horozirkels. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 453—456 (1953) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß man alle elementaren Konstruktionen in der hyperbolischen Ebene auch mit Hilfe eines Hyperzirkels oder des Paars Horozirkel — gewöhnlicher Zirkel ausführen kann, in Analogie zu den Mascheronischen Zirkelkonstruktionen der euklidischen Ebene. Dabei sind unter Hyperzirkel und Horozirkel Vorrichtungen zu verstehen, die es gestatten, Abstandslinien und Grenzkreise zu zeichnen. Bisher (vgl. dazu das Buch von Smogorzevski, dies. Zbl. **45**, 101) war nur bekannt, daß man bei Vorhandensein aller drei Zirkelarten das Lineal entbehren kann.

W. Burau.

Elementargeometrie:

● Hobson, E. W.: Squaring the circle.

Hudson, H. P.: Ruler and compass.

Singh, A. N.: The theory and construction of non-differentiable functions.

Kempe, A. B.: How to draw a straight line. A lecture on linkages.

Reprinted in one vol. 361 p. New York: Chelsea Co. 1953. \$ 3,25.

Die Monographien dieses Bändchens sind wohl für einen größeren Leserkreis bestimmt. In der ersten wird eine von Hobson 1913 verfaßte historische Übersicht über das Problem der Quadratur des Kreises mit Liouvilles Beweis für die Existenz von transzendenten Zahlen und Gordans Beweis für die Transzendenz von π wiedergegeben; die zweite berichtet über Konstruktionen mit dem Lineal allein, mit dem Zirkel allein und mit dem Lineal und dem Zirkel; in der dritten werden vier Vorlesungen, die A. N. Singh an der Lucknow-Universität 1935 über die Theorie und Konstruktion nichtdifferenzierbarer Funktionen gehalten hat, abgedruckt; die letzte handelt von den Konstruktionen einer Geraden mittels Gelenkmechanismen von James Watt, Stekloff, Sylvester u. a.

O. Volk.

Nef, Walter: Konvexe Räume. Arch. der Math. 4, 216—221 (1953).

Der vom Ref. (dies. Zbl. 48, 86) eingeführte Begriff des konvexen Raumes wird ausgearbeitet und auf Fragen der Zerlegungsgleichheit bei Vielfachen des dreidimensionalen euklidischen Raumes angewandt. Eine Teilmenge M eines konvexen Raumes K über einem kommutativen Positivbereich heißt unabhängig, wenn jeder Punkt von K sich höchstens auf eine Weise als Schwerpunkt endlich vieler Punkte aus M darstellen läßt. Es gibt immer eine Basis, d. h. eine maximale unabhängige Menge. Ist B eine Basis und α ein beliebiger Punkt, so gibt es genau eine Identität $\langle \alpha, \alpha; \xi_i, \alpha_i \rangle = \langle \xi_i, \beta_i \rangle$, worin $\beta_i \in B$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha + \sum \alpha_i = \sum \beta_i = 1$, $\alpha \beta_i = 0$ und nur endlich viele α_i und β_i von Null verschieden sind (Zerlegungssatz). Daraus ergeben sich neue Beweise einiger Sätze des Ref. Ist nun E der Einheitswürfel des dreidimensionalen Raumes und betrachtet man nach J.-P. Sydler (Commentarii math. Helvet., 16, 266—273 [1943]) und H. Hadwiger (dies. Zbl. 40, 570) die Klassen mod E zerlegungsgleicher Vielfache, so bilden diese mit den dort eingeführten Verknüpfungen einen konvexen Raum über dem Bereich der positiven reellen Zahlen. Die Existenz einer Basis und der Zerlegungssatz liefern neue Beweise der entsprechenden, a. a. O. von H. Hadwiger bewiesenen Sätze.

H. Kneser.

Analytische Geometrie:

● Kowalewski, Gerhard: Einführung in die analytische Geometrie. 4., verbesserte Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1953. 364 S. mit 112 Fig. DM 26,—.

Die erste Auflage dieses wohlbekannten Lehrbuchs der analytischen Geometrie ist im Jahre 1910 erschienen; die hier vorliegende 4. Auflage ist aus den vorigen durch eine gründliche Revision entstanden. Die freundliche Aufnahme, die dieses Werk des Verf. — wie alle seine Lehrbücher auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik — immer gefunden hat, braucht nicht mehr betont zu werden und gestattet den Inhalt des Buches kurz zu beschreiben. Nach einigen einleitenden Betrachtungen (Kap. 1) über Strecken und über den Begriff des Winkels und seiner goniometrischen Funktionen findet man im Kap. 2 die verschiedenen Koordinatensysteme für die Punkte der Ebene und des Raumes (kartesische, polare, zylindrische) und die Koordinatenverwandlung; die homogene Form der Koordinaten führt zu den uneigentlichen Punkten. Im Kap. 3 werden die Grundbegriffe der projektiven Geometrie auf einer Geraden analytisch entwickelt (projektive Koordinaten, Doppelverhältnisse, projektive Abbildungen, Involutionen). Das Entsprechende leistet das folgende Kap. 4 in der Ebenengeometrie. Kap. 5 enthält eine erste elementare Behandlung der Kegelschnitte und einige Beispiele höherer algebraischer und transzendenter Kurven. Im Kap. 6 findet man eine vollständige analytisch-geometrische Behandlung der

projektiven Theorie der Kegelschnitte und ihrer Büschel und Scharen, welcher die Grundgedanken der Theorie der quadratischen Formen vorausgeschickt werden. Die affinen und die metrischen, insbesondere die Fokaleigenschaften der Kegelschnitte finden im Kap. 7 ihren Platz. Der ebenen Kreisgeometrie, den Inversionen, den tetrazyklischen Koordinaten, der stereographischen Projektion der Kugel ist Kap. 8 gewidmet. Die analytische Geometrie des Raumes und die Grundeigenschaften der Liniengeometrie werden im Kap. 9 behandelt. Kap. 10 enthält schließlich die Theorie der Flächen zweiter Ordnung.

E. Togliatti.

● Sen, R. N.: A course of geometry. Calcutta: Calcutta University 1953. XI, 310 p.

Dieses Lehrbuch enthält die Vorlesungen über Geometrie, die Verf. seit vielen Jahren an der Calcutta University gehalten hat. In einer Einleitung findet man zunächst auf wenigen Seiten diejenigen Grundbegriffe der Algebra über Vektorräume, Matrizen, Determinanten, lineare Gleichungssysteme und lineare Transformationen, die für das Folgende notwendig sind; der Vektorbegriff ist z. B. im ganzen Buch grundlegend. — Das Buch ist in zwei Teile eingeteilt, die bzw. die ebene und die räumliche Geometrie betreffen. Wir geben hier die Titel der verschiedenen Kapitel; sie genügen, um einen genauen Einblick in die Verteilung des Stoffes zu gewinnen: I. Teil: 1. Vektoren und Winkel, 2. Doppelverhältnisse, 3. Starre Bewegungen, 4. Kegelschnitte, 5. Symmetrie und Ähnlichkeit, 6. Der Kreis, 7. Affinität, 8. Involutionen, 9. Erweiterung der kartesischen Ebene, 10. Kollineationen und Korrelationen, 11. Projektive ebene Geometrie. II. Teil: 12. Der Euklidische Raum, 13. Der projektive Raum, 14. Lineare Transformationsgruppen und entsprechende Geometrien, 15. Projektive Theorie der Quadriken, 16. Polarität, 17. Erweiterung des kartesischen Raumes, 18. Orthogonale Transformationen und Affinitäten, 19. Euklidische Theorie der Quadriken. — Zwei Anhänge sind den bilinearen und den Flächenkoordinaten in der Ebene und dem Sylvesterschen Satz über quadratische Formen gewidmet. Am Schluß eine Sammlung von Aufgaben. Die Methoden sind fast überall analytisch und nur teilweise synthetisch. — Man sieht hieraus, daß die Einteilung der Geometrie auf Grund des Erlanger Programms in Euklidische, affine und projektive berücksichtigt ist, und daß Verf. in den zwei Teilen zwei sozusagen entgegengesetzten Wegen folgt: während im I. Teil die Euklidische Geometrie den ersten Platz hat und erst dann die affine und die projektive Geometrie behandelt werden, fängt der 2. Teil mit der projektiven Geometrie an, welcher dann die affine und die Euklidische untergeordnet werden. — Es seien ein paar Bemerkungen gestattet: 1. Die unendlichfernen Elemente der Ebene werden erst im 9. Kap. eingeführt, und dies scheint dem Ref. ein wenig zu spät, da es in den Kap. 4 und 8 schon notwendig gewesen ist, viele ungewöhnliche Ausnahmen zu berücksichtigen. 2. Einige Figuren lassen etwas zu wünschen übrig: So müßte in der Figur zu S. 56 die Gerade P_0P den Kreis über P_1, P_2 berühren, die Hyperbeläste zu S. 84 entfernen sich von den Asymptoten, die zwei Geraden des hyperbolischen Paraboloids zu S. 270 sollten den oberen scheinbaren Umriß berühren.

E. Togliatti.

Nisnevič, L. B. und V. I. Bryzgalov: Über eine Aufgabe der n -dimensionalen Geometrie. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 169—172 (1953) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird folgende Frage gelöst: Wann lassen n wechselseitig orthogonale Vektoren a_1, \dots, a_n des R_n der Längen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sich so auf einen $L_m(m \leq n)$ orthogonal projizieren, daß dabei Vektoren gleicher Länge s herauskommen? Die Antwort lautet: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist die Erfülltheit der Ungleichungen $\alpha_i^2(1/\alpha_1^2 + \dots + 1/\alpha_n^2) \leq m$ ($i = 1, \dots, n$). Der Beweis hierfür ist sehr einfach und übersichtlich.

W. Burau.

Shephard, G. C.: Unitary groups generated by reflections. Canadian J. Math. 5, 364—383 (1953).

Ein unitärer Raum U_n mit n Dimensionen ist ein komplexer Raum, in dem die Punkte durch Vektoren mit n Koordinaten definiert werden und in dem die Entfernung von zwei Punkten als die Norm der Differenz ihrer Vektoren erklärt wird. In einem Raume U_n betrachtet Verf. Spiegelungen der Ordnung p : eine solche ist eine kongruente Transformation, für die alle charakteristischen Wurzeln der zugehörigen Matrix gleich 1 sind, bis auf eine, welche gleich einer primitiven p -ten Einheitswurzel θ ist. Eine Spiegelung der Ordnung p läßt alle Punkte einer Hyperebene invariant und ist zyklisch von der Ordnung p . Mit Spiegelungen der Ordnung p kann man endliche Gruppen erzeugen: Symmetriegruppen von Polytopen des Raumes U_n . Hilfsmittel der Untersuchung ist eine graphische Darstellung der betrachteten Gruppen, welche als Verallgemeinerung derjenigen graphischen Darstellung

erscheint, die von H. S. M. Coxeter (Regular Polytopes, New York 1948, dies. Zbl. **31**, 65) für Gruppen in reellen Räumen in ähnlicher Weise schon benutzt worden ist. In diesen Graphen werden die Spiegelhyperebenen durch Punkte dargestellt, welche miteinander durch Strecken (eignet verbunden oder nicht verbunden werden; die entstehenden Graphen können so konnex oder auch nicht konnex sein, können die Form eines Baumes haben oder auch Zykeln enthalten, usw. Die in dieser Abhandlung betrachteten Gruppen werden mit dem Symbol p, q, r, m bezeichnet; die erzeugenden Spiegelungen sind p, q, r Spiegelungen der Ordnung 2; die gegenseitige Lage der Spiegelhyperebenen wird von einem Graphen definiert, welcher aus einem dreiseitigen Zykel mit drei von den drei Ecken ausgehenden Ästen besteht (mit einigen Besonderheiten, die aus Raumangel hier nicht wiedergegeben werden können). Verf. findet zunächst alle möglichen Werte von p, q, r, m und gibt dann für alle entsprechenden Gruppen eine abstrakte Definition durch Erzeugende und Relationen an. Jede Gruppe ist die Symmetriegruppe verschiedener Polytope; man erhält auch für sie graphische Darstellungen, indem man die Graphen der entsprechenden Gruppe geeignet durch Kreise von Ecken verbessert. Der letzte Teil der Untersuchung beschäftigt sich mit Beispielen und mit Polytopen, deren Ecken ein Teil der Ecken anderer Polytope sind.

E. Togliatti.

Sosnowski, W.: Sur une interprétation géométrique des éléments complexes. Ann. Soc. Polon. Math. **24**, Nr. 2, 35—48 (1953).

Movendo dalla classica introduzione sintetica, dovuta a G. C. von Staudt, degli elementi immaginari (elements complexes) nella Geometria, l'A. osserva come, entro una forma fondamentale reale di prima specie, gli elementi immaginari possano biunivocamente associarsi alle proiettività cicliche (involutions) d'ordine 3, le quali sono ellittiche ed individuali mediante tre elementi reali ciclicamente ordinati. Due elementi immaginario-coniugati rispondono a due proiettività reciproche, e si identificano coll'uno o coll'altro dei loro elementi reali comuni. — La nuova interpretazione offre rispetto alla classica vantaggi anche sotto l'aspetto delle costruzioni grafiche, il che viene messo in evidenza con esempi. — Viene poi stabilita l'equazione della proiettività ciclica d'ordine 3 che ha come elementi doppi $p \pm iq$; pure si svolgono considerazioni analoghe con riferimento a proiettività cicliche degli ordini 4, 5, 6, 8. — Per evitare le rette immaginarie di seconda specie (cioè sghembe colle rispettive immaginario-coniugate) si opera unicamente nel piano. Ma è da osservare che l'atteggiamento dell'A., trasferito nello spazio, apparirebbe anche più proficuo.

V. E. Galafassi.

Pierce, William A.: The impossibility of Fano's configuration in a projective plane with eight points per line. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 908—912 (1953).

Une configuration de Fano, dans un espace projectif, est un quadrilatère complet dont les diagonales sont concourantes. Soit F une telle configuration, supposée exister sur le plan projectif fini portant 8 points par droite et contenant $1 + 7 + 49 = 57$ points. Les 7 points et les 7 droites de F sont les éléments „initiaux“. Les 7 droites initiales portent en outre 35 points nouveaux. Il y a donc 15 autres points, ou „extra-points“, non situés sur les droites initiales. On voit alors que, par tout point initial passent exactement 5 droites nouvelles portant chacune 3 extra-points. Il existe ainsi une correspondance biunivoque entre les 15 extra-points et les 15 demoiselles du problème de Kirkman. Utilisant les énumérations connues des solutions de ce problème et procédant par élimination, l'A. prouve que la configuration de Fano ne peut exister sur le plan projectif avec 8 points par droite.

A. Sade.

Hall jr., Marshall: Uniqueness of the projective plane with 57 points. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 912—916 (1953).

On sait que toute suite complète de carrés $n \times n$ mutuellement orthogonaux est équivalente à un plan projectif fini avec $n + 1$ points par droite. Utilisant les dénombrements connus de H. Norton (ce Zbl. **22**, 111) et du rapporteur (ce Zbl. **35**, 289; **42**, 248), R. C. Bose et K. R. Nair [Sankhyā **5**, 361—382 (1941)] ont observé que les seules séries orthogonales 7×7 sont celles qui sont associées au plan arguésien avec 8 points par droite. S'appuyant sur un résultat de W. A. Pierce (cf. la récénsion précédente), à savoir que la configuration de Fano est impossible dans le plan projectif avec 8 points par droite, l'A. considère dans ce plan un quadrilatère complet quelconque, dont les diagonales ne sont pas concourantes, classe les autres droites du plan en divers types et forme un système d'équations dont les inconnues sont les nombres de droites de chaque type. La résolution et la discussion de ce système fournissent la démonstration du théorème: tout plan projectif avec 8 points par droite est arguésien. La technique employée est applicable pour l'étude du plan de 73 points.

A. Sade.

Cesarec, Rudolf: Über die Inzidenzgleichung in nichtzusammengehörigen projektiven Koordinaten. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 168—173 und deutsche Zusammenfassg. 173—174 (1953) [Kroatisch].

Wylie jr., C. R.: The existence of line involutions of order greater than three possessing a linear complex of invariant lines. Proc. Amer. math. Soc. 4, 807—809 (1953).

In this Note the author, working exclusively on the nonsingular V_4^2 in S_5 into whose points the lines of S_3 are mapped in a 1:1 way by the wellknown interpretation of the Plücker-coordinates of a line in S_3 as point coordinates in S_5 , establishes the existence of line involutions of order greater than 3, and whose invariant lines form a linear complex. *M. Piazzolla-Beloch.*

Devidé, Vladimir: Ein Satz über homothetische Hyperellipsoide im n -dimensionalen Raume. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 194—195 und deutsche Zusammenfassg. 195 (1953) [Kroatisch].

Für zwei ähnliche und ähnlich gelegene $(n-1)$ -dimensionale Hyperellipsoide E_j ($j=1, 2$) im n -dimensionalen Raume gibt es zwei Punkte, die als Scheitelpunkte von Hyperkegeln K_i ($i=1, 2$) aufgefaßt werden können, welche die beiden E_j längs $(n-2)$ -dimensionaler Hyperellipsoide $E'_{i,j}$ berühren, die ihrerseits in untereinander parallelen $(n-1)$ -dimensionalen Hyperebenen H_i liegen. Es wird bewiesen: Die gegenseitige Entfernung der Hyperebenen H_{11} , H_{21} ist gleich der gegenseitigen Entfernung der Hyperebenen H_{12} , H_{22} . Aus der deutschen Zusammenfassung.

Casa, Carlos Federici: Über die analytische Geometrie der „zusammengesetzten Örter“. II. Revista Mat. element. 2, 99—119 (1953) [Spanisch].

Lorent, H.: Courbes engendrées par deux ensembles de lignes planes à deux paramètres. I, II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 22, 317—326, 388—395 (1953).

Seien C, C' zwei ebene Kurven, welche von zwei Parametern a, b abhängen, die einer Relation genügen: es wird der Ort der Schnittpunkte von C, C' studiert, falls C, C' besondere Kurven, wie z. B. Lamésche Kurven, sind und die Gleichung zwischen a, b die Gleichung einer Laméschen oder einer hyperbolischen Kurve ist. *M. Benedicty.*

Algebraische Geometrie:

Chisini, Oscar: Un caratteristico procedimento dimostrativo della geometria algebrica. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 12, 21—36 (1953).

Verf. geht von dem Satze aus, daß eine eindeutige algebraische Funktion rational ist und insbesondere sich auf eine Konstante reduziert, falls sie keine Pole besitzt. Viele mehr oder weniger bekannte geometrische Sätze lassen sich daraus, und zwar zuweilen außerordentlich einfach, ableiten. Der Steinersche Satz z. B., daß 4 Strahlen, welche 4 feste Punkte eines Kegelschnittes aus einem variablen Punkt P desselben projizieren, konstantes Doppelverhältnis besitzen, folgt unmittelbar aus der Überlegung, daß dieses Doppelverhältnis eine algebraische Funktion der Koordinaten des Punktes P ist, die nirgends unendlich wird, weil niemals zwei von den 4 Strahlen zusammenfallen können. Ähnlich der Satz von Salmon über die 4 Tangenten an eine Kubik aus einem ihrer Punkte. Die Schwierigkeit der Beweisführung in diesen und anderen Fällen liegt gewöhnlich im Nachweis, daß keine Pole vorkommen, beziehungsweise daß die Pole der einzelnen Summanden oder Faktoren der zu untersuchenden Funktion sich jeweils gerade aufheben. *W. Gröbner.*

Bonera, Piero: Sui gruppi di livello del cubo della curvatura proiettiva per la cubica ellittica. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 86, 333—345 (1953).

Il cubo C della curvatura proiettiva dello E_7 variabile su una curva piana algebrica I' è funzione razionale del punto, centro dello E_7 , corrente sulla curva: su questa viene con ciò ad introdursi la serie lineare g_N^1 dei gruppi di livello di

detta funzione (v. Galafassi, questo Zbl. 45, 248). — L'A. studia tale serie nel caso in cui F sia una cubica ellittica, calcolandone l'ordine $N = 216$ ed esaminando alcuni gruppi notevoli: quello dei poli, quello degli zeri e quello (contenente i flessi della curva) rispondente al valore $C = 3^3 \cdot 2^8$, cioè al valore che — come l'A. accerta — fornisce il cubo della curvatura proiettiva di un E_7 regolare appartenente ad una cubica cuspidata. — Interviene la circostanza che la g_{216}^1 è composta colla g_{18h}^1 indotta dal gruppo G_{18h} delle collineazioni mutanti in sé la curva ($h = 1, 2, 3$ risp. nei casi generale, armonico, equiarmonico), il che giova anche all'accurato studio del gruppo jacobiano della g_{216}^1 , e pure nel conseguire una espressione di C legata alla nota rappresentazione di F mediante funzioni ellittiche. *V. E. Galafassi.*

Bonera, Piero: Sui gruppi di livello del cubo della curvatura proiettiva per la cubica nodata. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 86, 346—350 (1953).

I problemi trattati per la cubica ellittica della precedente Nota vengono analogamente risolti per la cubica nodata, nel qual caso si ha una g_{24}^1 composta colla g_6^1 indotta dal G_6 delle collineazioni che mutano la curva in sé. — Del cubo C della curvatura proiettiva ora si fornisce una espressione legata alla classica rappresentazione della cubica nodata come curva razionale. *V. E. Galafassi.*

Weitzenböck, R. W.: Die Flachtangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung. Monatsh. Math. 57, 142—169 (1953).

Fallen die vier Punkte, in denen eine Gerade eine ebene Kurve vierter Ordnung C_4 schneidet, zusammen, so heißt dieser Schnittpunkt Flachpunkt der C_4 , die Gerade Flachtangente und das Linienelement Flachelement. Eine C_4 hat im allgemeinen keinen Flachpunkt; zu einem gegebenen Linienelement als Flachelement gibt es ∞^{10} C_4 , zu gegebenem Punkt als Flachpunkt bzw. gegebener Gerade als Flachtangente jeweils ∞^{11} C_4 . Auf einer Flachtangente liegt kein weiterer Flachpunkt, es sei denn, die beiden Flachpunkte fallen zusammen (Doppelflachpunkt). Es gibt auch dreifache Flachpunkte, vierfache Flachpunkte sind nicht möglich. — Verf. gibt eine Klassifikation der nichtzerfallenden C_4 mit mehr als zwei Flachelementen. C_4 ohne mehrfachen Flachpunkt besitzen, falls keine drei Flachtangenten durch denselben Punkt gehen, 3 oder 4, falls genau drei Flachtangenten durch denselben Punkt gehen, 4 oder 5 oder 6, falls genau vier Flachtangenten durch denselben Punkt gehen, 4 oder 12 Flachelemente. C_4 mit einem Doppelflachpunkt können 2, 4, 6 oder 8, C_4 mit einem dreifachen Flachpunkt 3, 4 oder 5 Flachelemente haben. Zahlreiche Sonderfälle sind zu unterscheiden. Sie sind durch die Gleichungen der C_4 in geeigneten Koordinatensystemen und durch die gegenseitige Lage der Flachelemente charakterisiert. *M. Barner.*

Brusotti, Luigi: Fasci reali di curve algebriche. Rend. Sem. mat. fis. Milano 23, 21—35 (1953).

Per lumeggiare l'indole degli studi sulle questioni di realtà riguardanti gli enti algebrici, può giovare accostarsi a taluna delle trattazioni in cui esse trovano concretezza di problemi e di risultati. — L'A. sceglie così come argomento della sua conferenza uno studio particolare, e precisamente quello dei fasci reali di curve algebriche nel piano e sulla superficie algebrica reale, col sussidio della teoria topologica dei fasci di curve grafiche, argomento che peraltro offre un largo interesse anche per i suoi legami con altri studi variamente rivolti. — Si illustrano metodi e si riassumono risultati in gran parte dovuti allo stesso A. *V. E. Galafassi.*

Thalberg, Olaf M.: „Conic involutions“ with a coincident curve of order $4n+2$. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo, I 1953, Nr. 2, 13 p. (1953).

Unter einer „konischen“ Involution versteht Verf. eine ebene Involution $P \rightleftharpoons Q$, bei der P mit Q stets auf einem durch vier feste Punkte A, B, C und D gehenden Kegelschnitt K liegt. Auf K gibt es dann i. A. zwei „Coincidenz-Punkte“ mit $P_0 = Q_0$. Bei veränderlichem K durchlaufen die Punkte P_0 die Coincidenz-Kurve C . In einer ersten Arbeit über diesen Gegenstand (dies. Zbl. 30, 66) wurde der Fall behandelt, daß C von der Ordnung $4n+1$ ist und in A, B, C

und D je einen $2n$ -fachen Punkt besitzt. In einer zweiten Arbeit (dies. Zbl. 48, 377) wird C als Kegelschnitt vorausgesetzt, während in der vorliegenden Arbeit C als eine Kurve sechster Ordnung und eine solche der Ordnung $4n+2$ angenommen wird. Ableitungen und Beweise rein geometrisch. *R. W. Weitzenböck.*

Villa, Mario: Sulle trasformazioni di contatto algebriche. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 6—9 (1953).

Bei einer algebraischen Berührungstransformation zwischen zwei Ebenen entspricht jedem Punkt der einen Ebene eine Kurve der anderen. Diese Kurven bilden algebraische Systeme. Verf. betrachtet nun die kleinsten linearen Kurvensysteme, die jene algebraischen enthalten. Zwischen ihnen ist durch die Berührungstransformation eine Reziprozität hergestellt: Jeder Kurve C des einen Systems entspreche das kleinste lineare System, das die Bilder aller Punkte von C enthält. Umgekehrt kann man zu jedem Paar von linearen Systemen der gleichen Dimension, zwischen denen eine Reziprozität gegeben ist, in einfacher Weise eine algebraische Berührungstransformation konstruieren. Verf. weist noch auf die Schwierigkeit hin, Bedingungen für die linearen Systeme anzugeben, unter denen die Berührungstransformation birational ist. *O.-H. Keller.*

Godeaux, Lucien: Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple. I, II. Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 1013—1023, 1087—1093 (1953).

Dans des travaux antérieurs, l'A. établit que la surface image d'une involution cyclique d'ordre premier p , à points unis isolés, possède un point de diramation dont le cône tangent est composé de quatre cônes rationnels s_1, t_1, t_2, s_2 , chacun rencontrant le suivant selon une seule génératrice et ne rencontrant pas les autres, dans le cas où l'on a:

$$p = A a_1 b_2 + B a_1 + C b_2 - D = a_1 \alpha + b_1 + a_2 \beta + b_2$$

(α et β coefficients de l'homographie au voisinage du point uni): $A = (t+1)U_1U_2 + (u_2+1)U_1 + (u_1+1)U_2$; $B = (t+1)m_2U_1 + U_1 + m_2(u_1+1)$; $C = (t+1)m_1U_2 + U_2 + m_1(u_2+1)$; $D = (t+1)m_1m_2 + m_1 + m_2$; $U_1 = m_1(u_1+1) + 1$; $U_2 = m_2(u_2+1) + 1$. Si l'on a $(t+1)\lambda_1 + 2[(u_2+1)b_2 + 1] < (t+1)\mu_1 + 2[(u_1+1)a_1 + 1]$, λ_1 et μ_1 étant les nombres tels que $\lambda_1 + \alpha\mu_1 = U_1p$, $\mu_1 + \beta\lambda_1 = U_2p$ on a pour $t=0$ un point simple infiniment voisin à celui de diramation sur la génératrice commune à t_1 et t_2 ; pour $t=1$ un point double conique sur cette génératrice et pour $t \geq 2$ un point double biplanair. Il y a de plus des conditions de primitivité, par exemple, si $t=0$, $\lambda_1 + 2M_2$ premier à $\mu_1 - 2M_1$ (en posant $M_1 = (u_1+1)a_1 + 1$ et $M_2 = (u_2+1)b_2 + 1$). *B. d'Orgeval.*

Lévy-Bruhl-Mathieu, Paulette: Étude des surfaces d'ordre $p-2+h$ ($0 \leq h < p$) passant par une courbe canonique de genre p . Application à la classification des courbes algébriques de genre inférieur à 11. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2032—2034 (1953).

L'A. considère les surfaces d'ordre $p-2+h$ ($0 \leq h < p$) passant par une courbe canonique C d'ordre $2p-2$, de genre p , de S_p . Une telle surface est normale et rationnelle, réglée ou réferable à une réglée. Après avoir étudié ces différents cas, l'A. en déduit la classification des courbes de genre inférieur à 11.

L. Godeaux.

Rosina, B. A.: Sulle superficie algebriche di ordine $2n$ con una conica (almeno) doppia all'infinito (quadriche generalizzate). Ann. Univ. Ferrara 2, 141—149 (1953).

Dans cette note, l'A. étudie une famille de surfaces algébriques (qu'il appelle quadriques généralisées), qui présentent des propriétés analogues aux propriétés diamétrales des quadriques. Une telle famille, d'ordre $2n$ ($n > 1$) rencontre le plan à l'infini suivant une conique K de multiplicité 2 (au moins) comptée n fois. Un cas particulier de ces surfaces est celui par exemple des surfaces cyclides de Darboux, desquelles ainsi les résultats établis par l'A. donnent

le nouvelles propriétés. Dans le cas général, selon la nature de la conique K , imaginaire ou réelle (irréductible ou réductible) on peut donner une classification parfaitement analogue à celle des quadriques. On aura ainsi les quadriques généralisées F^{2n} elliptiques, hyperboliques et paraboliques, et les cas particuliers qui correspondent aux quadriques dégénérées. Pour les quadriques généralisées F^{2n} les plans diamétraux passent, en général par un même point (point principal), situé à distance finie pour les F^{2n} elliptiques et hyperboliques, à distance infinie pour les F^{2n} paraboliques. Dans les deux premiers cas la F^{2n} présente, en général, trois plans principaux à deux à deux perpendiculaires; dans le troisième cas il y en a deux rectangulaires (s'il y en a infinis par un point la F^{2n} est une sphère généralisée). Dans les cas particuliers qui correspondent aux quadriques dégénérées, le point principal est indéterminé, appartenant 1) à une droite donnée pour laquelle passent tous les plans diamétraux; 2) à un même plan qui est alors le seul plan diamétral de la surface. *M. Piazzolla-Beloch.*

Andreotti, Aldo: *Sopra il gruppo della torsione unidimensionale delle varietà algebriche.* Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **12**, 239–264 (1953).

Le résultat fondamental de ce travail est exprimé par le théorème suivant: Soit $V_d (d \geq 2)$ une variété algébrique sans singularités du S_r et soit $\Theta_1(V_d)$ le groupe de torsion unidimensionnel de V_d . Pour tout sousgroupe de $\Theta_1(V_d)$ il existe une variété W_d , ayant comme groupe $\Theta_1(W_d)$ le sousgroupe considéré, qui a la même variété de Picard que V_d et qui admet V_d comme transformée rationnelle. Le corps $K(W_d)$ des fonctions rationnelles sur W_d est une extension normale abélienne de $K(V_d)$ dont le groupe de Galois est isomorphe à $\Theta_1(V_d)/\Theta_1(W_d)$. L'A. fait des applications à la détermination du groupe de torsion de la surface d'Enriques et à celle de Kummer et aussi à une variété de Wirtinger qui est une sorte de généralisation de la surface de Kummer. Il prouve aussi l'existence de variétés algébriques dont la dimension, l'irrégularité, la variété de Picard et le groupe de torsion (abélien et fini) sont donnés a priori d'une façon arbitraire. Des applications aux surfaces elliptiques terminent le mémoire.

G. Ancochea.

Caputo, Michele: *Sugli spazi totali dei sistemi algebrici di spazi.* Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII **2**, 45–52 und französ. Zusammenfassg. 52 (1953).

Soit $G(h, r)$ la grassmannienne des h -espaces de S_r et soit V la variété d'intersection de $G(h, r)$ avec m hypersurfaces algébriques génériques (dans le sens classique) du S_N déterminé par les coordonnées de Grassmann. L'A. établit la condition nécessaire et suffisante pour que V contienne des $S_t (h \leq t \leq r)$ totaux.

G. Ancochea.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Schmidt, Harry:** *Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung. Überarbeitet von Hans Kaiser.* Berlin: VEB Verlag Technik 1953. 116 S.

Inhaltsübersicht: Seiten 1 bis 32 Vektoralgebra, 33 bis 92 Vektoranalysis, 93 bis 112 elementare Tensorrechnung. Das Buchlein gibt genau das, was der Titel anzeigt, wobei auf eine möglichst exakte mathematische Formulierung Rücksicht genommen wird. Bemerkenswert ist die überall durchgeführte Beschränkung auf den Euklidischen Raum, wodurch wohl der sog. klassischen Formulierung Genüge geleistet wird, aber der allgemein affine Standpunkt in Vektor- und Tensoralgebra nicht zur Sprache kommt. So erscheint z. B. das äußere Produkt zweier Vektoren wieder als Vektor und nicht als Bivektor, und Analoges gilt für die mit den Operationszeichen \wedge und \vee dargestellten Bildungen in der Vektoranalysis. In der Tensorrechnung werden, ausgehend vom Spannungsbegriff der Elastomechanik, nur der Tensor zweiter Stufe und dessen einfachste Euklidische Kovarianten behandelt.

R. W. Weitzenböck.

● **Spain, Barry:** *Tensor calculus.* Edinburgh-London: Oliver and Boyd; New York: Interscience Publishers, Inc. 1953. VIII, 125 p. \$ 1,55.

This is a compact exposition of the fundamentals of the tensor calculus very much in the spirit of Eisenhart's „Riemannian geometry“ (Princeton 1949), with applications to ordinary differential geometry Cartesian tensors and elasticity (very much like Jeffreys' Cartesian tensors) and the theory of special

and general relativity. The merit of the exposition is above all in its clarity and simplicity. There are some exercises and literature references. The book can be highly recommended for a survey course or a rapid introduction into the field; size and printing also make it a very attractive book. *D. J. Struik.*

Yûjôbô, Zuiman: On a sufficient condition for a tensor to be harmonic. Proc. Japan Acad. 29, 96—98 (1953).

Extension of Besicovitch theorems (Besicovitch and Walker, this Zbl. 1, 328). Let α be a p -form on an n -dimensional Riemannian space C_∞ , and $a_{i_1 \dots i_p}$ be its bounded coefficients which are defined and continuous except at most at the points of a set E_1 of $(n-1)$ -dimensional measure 0 and further which is totally differentiable and satisfies $d\alpha = \delta\alpha = 0$ at every point except at most those of a set E_2 expressible as the sum of an enumerable infinity of sets of finite $(n-1)$ -dimensional measure; then α is harmonic. *Th. Lepage.*

Kawaguchi, Akitsugu: Generalizzazioni del calcolo tensoriale e delle sue applicazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 255—261 (1953).

In dieser Arbeit gibt Verf. eine übersichtliche Darstellung der verschiedenen Verallgemeinerungen von Tensoren. Zuerst werden definiert Extensoren, deren Komponenten vom Kurvenelement g -ter Ordnung einer Kurve abhängig sind, und Extensoren, deren Komponenten vom Flächenelement g -ter Ordnung einer Fläche abhängen. (Vgl. auch M. Kawaguchi, dies. Zbl. 47, 403.) Sodann die P -Extensoren [A. Kawaguchi, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I 10, 77—156 (1941)] und die R -Extensoren, deren Bestimmungszahlen von $x^i, u^\mu, \partial x^i / \partial u^\mu, \partial^2 x^i / \partial u^\mu \partial u^\nu, \dots$ abhängen und sich unter den Transformationen $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j, u^\nu), \bar{u}^\lambda = \bar{u}^\lambda(u^\nu)$ auf eine bestimmte Weise transformieren. *J. Haantjes.*

Pidek, H.: Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre. Ann. Soc. Polon. Math. 24, Nr. 2, 111—128 (1953).

Verf. betrachtet in einer X_1 geometrische Objekte nullter Klasse mit einer Komponente. Es seien x_1, \dots, x_n die Komponenten von n geometrischen Objekten mit derselben Transformationsweise. Wenn nun nicht triviale Funktionen $y = f(x_1, \dots, x_n)$ existieren derart, daß y die Komponente eines geometrischen Objektes bildet, so wird gesagt, daß die Objekte x_1, \dots, x_n eine Algebra gestatten. Für den Fall $n = 2$ werden die Transformationen der Objekte, welche eine Algebra gestatten, angegeben und die möglichen Funktionen $f(x_1, x_2)$ abgeleitet. *J. Haantjes.*

● **Grodzinskij, P.:** Getriebelehre. I.: Geometrische Grundlagen. (Sammlung Götschen Bd. 1061.) 2. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1953. 159 S. DM 2,40.

Neubearbeitete Auflage unter Beibehaltung der Art der Darstellung und der behandelten Aufgaben. Gliederung: I. Bewegungsgeometrie: Punkt, zwei und drei Ebenen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei Kurbel- und Kurvengetrieben. II. Geometrische Zusammenhänge: Beweglichkeit und Zwanglaufbedingungen, Konstruktion von Gelenkgetrieben und Kurventrieben, Koppelbewegungen, Verzahnung, Wälzhebeltriebe. *Th. Pöschl.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Cano Caravaca, Juan Antonio: Die natürlichen Gleichungen einiger Kurven. Gac. mat., Madrid 5, 190—193 (1953) [Spanisch].

Equations intrinsèques, par rapport au groupe des déplacements, des coniques et des paraboles cubiques. *G. Ancochea.*

Fava, Franco e Francesco Alberto Parodi: Coppie di elementi differenziali curvilinei riferiti isometricamente per proiezione. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 12, 145—157 (1953).

Fra due curve piane γ e $\bar{\gamma}$ riferite ai rispettivi archi s e \bar{s} si ponga una corrispondenza

$\bar{s} = f(s)$ per proiezione da un centro A e si scelgano le origini degli archi in punti corrispondenti P, \bar{P} : tale corrispondenza è un'isometria di ordine n fra gli elementi differenziali di centri P e \bar{P} se la differenza $\bar{f}(s) - s$ è infinitesima di ordine $n + 1$. Gli AA. determinano i possibili centri, proiettando dai quali si stabilisce una corrispondenza isometrica e trovano le condizioni (relative alle curvature e loro derivate) perchè l'ordine dell'isometria raggiunga un valore prefissato. Esaminano poi il problema analogo per una coppia di curve sghembe, nel qual caso al centro di proiezione occorre sostituire un asse di proiezione: a seconda dell'ordine più o meno elevato di isometria che si vuole conseguire, i possibili assi risultano in numero finito, oppure formano una schiera o una congruenza caratterizzate geometricamente. I risultati vengono pure utilizzato per la costruzione di isometrie fra calotte superficiali e posti in relazione con altro di E. Bompiano (questo Zbl. **31**, 269). *P. Buzano.*

Scharff, Heinrich: Zur Darstellung der Krümmungen einer Flächenkurve mit Pfaffschen Formen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 71—74 (1953).

L'A. utilise la méthode du repère mobile et des formes différentielles d'E. Cartan pour l'étude de la courbure et de la torsion des courbes tracées sur une surface de R^3 . *P. Dedecker.*

Wunderlich, Walter: Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien. Monatsh. Math. **57**, 199—216 (1953).

Verf. zeigt: Jeder beliebigen Drehfläche lassen sich zwei einparametrische Scharen koaxialer Drehflächen Φ, Ψ derart zuordnen, daß alle Tangenten jeder geodätischen Linie einer Fläche Φ zugleich eine Fläche Ψ berühren u. u.; die Ausgangsfläche gehört einer der beiden Scharen an. Aus dieser (bisher nur für die konfokalen Drehflächen 2. O. bekannten) Tatsache folgt u. a., daß sowohl die Meridiansysteme der Flächenscharen als auch die in jeder beliebigen (jedoch zur gemeinsamen Achse z aller Systemflächen nicht normalen) Ebene befindlichen Normalumrisse der Flächen Φ, Ψ ein orthogonales Netz bilden. Die Flächensysteme rufen zwischen den auf z liegenden Punkten ihrer Meridiantangenten und -normalen eine geometrische Verwandtschaft hervor und können umgekehrt durch diese Verwandtschaft definiert werden; zu ihrer Bestimmung ist diesfalls eine einfache Integration erforderlich. Die durch projektive Zuordnungen definierten Systeme werden näher untersucht, involutorische Verwandtschaften führen auf die eingangs erwähnten Flächen 2. O. Schließlich wird gezeigt, daß die einer bestimmten Meridianebene angehörigen Flächenkurven das zyklographische Bild zweier normal affiner, aufeinander korrelativ bezogener ebener Kurvenscharen sind. *H. Horninger.*

Rybakov, V. N.: Binormale Familien von Kongruenzen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **93**, 13—14 (1953) [Russisch].

Verf. nennt eine Regelfläche Binormalenfläche, wenn die Erzeugenden derselben Binormalen ihrer Striktionskurve sind. In einer beliebigen Kongruenz lassen sich auf viele noch von einer willkürlichen Funktion abhängige Weisen ∞^1 Scharen von Binormalenflächen erklären. Hat man eine gegebene Kongruenz derart in ∞^1 Binormalflächen geschichtet, so bilden die Tangenten an die Striktionskurven wiederum eine Kongruenz, die in bemerkenswerter Beziehung zur Ausgangskongruenz steht. Es werden ohne Beweis einige Beziehungen zwischen den differentialgeometrischen Größen zweier derart zugeordneten Kongruenzen angegeben. *W. Burau.*

Bouligand, Georges: Sur quelques types d'équations $f(\tau, z, p, q) = 0$. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2193—2195 (1953).

Bouligand, Georges: Une forme donnée à la recherche des systèmes triples orthogonaux. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2462—2463 (1953).

Bouligand, Georges: Équations du premier ordre liées à un système triple orthogonal. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 772—774 (1953).

Durch zwei dreifache Orthogonalsysteme ist im allgemeinen genau ein quadratischer Kegel gegeben, der alle 6 Normalenrichtungen der Flächen in einem Punkt enthält. Die 6 Flächenscharen genügen also einer Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt

$$\alpha(p^2 - 1) + \beta(q^2 - 1) + 2\gamma pq + 2A p + 2B q = 0.$$

Sollen speziell x, y, z Integrale sein, so muß $\alpha = \beta = 0$ gelten. Im Falle, daß jedoch $x + y, x - y, z$ Lösungen sind, gilt $\alpha = -\beta, \gamma = 0$. So ergeben sich zwei spezielle Gleichungen (*) $A p + B q + p q = 0$ und (**) $G p + H q + \frac{1}{2}(p^2 - q^2) = 0$. Genügen die 4 Koeffi-

zienten der Bedingung $2(GB - HA) + 1 = 0$, so ist in jedem Punkt des Raumes durch den Schnitt der zwei Kegel ein orthogonales Dreiein bestimmt. Bestehen noch weitere differentielle Integrierbarkeitsbedingungen, so existiert ein dreifaches Orthogonalsystem mit diesen Richtungen für die Normalen. — (Gleichung (*)) kann durch $p = (u - 1) B$, $q = (1 - u) A/u$ ersetzt werden. Dabei muß u einer quasilinearen Differentialgleichung 1. Ordnung genügen, damit $p = z_x$, $q = z_y$ besteht.

Joachim Nitsche.

Hopf, Heinz: Sulla geometria riemanniana globale delle superficie. Rend. Sem. mat. fis. Milano **23**, 48—63 (1953).

Verf. gibt einen Bericht über die Zusammenhänge, die zwischen den lokalen metrischen und den globalen topologischen Eigenschaften einer Fläche bestehen. Insbesondere handelt es sich dabei um folgende Fragestellung: Welchen Einfluß hat der topologische Typus einer vollständigen Fläche auf das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung? Der Bericht schließt mit Bemerkungen darüber, wie die Ergebnisse und Methoden auf n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen werden können.

W. Rinow.

Dalla Volta, Vittorio: Geometria differenziale in grande. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **1**, 113—124 (1953).

Referat über Ergebnisse der Differentialgeometrie im Großen im Anschluß an eine Vorlesung von H. Hopf in Princeton 1950/51.

W. Blaschke.

Efimov, N. V.: Untersuchung der vollständigen Fläche negativer Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **93**, 393—395 (1953) [Russisch].

Efimov, N. V.: Untersuchung der eindeutigen Projektion einer Fläche negativer Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **93**, 609—611 (1953) [Russisch].

In der ersten Arbeit zeigt Verf., daß für die Krümmung einer durch $z = f(x, y)$ definierten Fläche nicht $K \leq -a^2 < 0$ mit einer Konstanten a für alle x, y bestehen kann. Dazu konstruiert Verf. Kurvenzüge, die aus Charakteristiken der für f geltenden Differentialgleichungen $r t - s^2 = K(1 + p^2 + q^2)$ bestehen. Bei passender Numerierung ist q auf den Charakteristiken der 1. Schar bei wachsendem x monoton wachsend, auf denen der 2. Schar monoton abnehmend. Ausgehend von M_0 , wo die 1. charakteristische Richtung nicht parallel der y -Achse sei, wird die Charakteristik nach rechts bis zu dem Punkt M_1 (oder ∞) verfolgt, in welchem die Richtung parallel der y -Achse wird. Durch M_1 wird die Charakteristik der 2. Schar gelegt und M_2 sei der auf ihr und links von M_1 liegende Punkt, in welchem diese Charakteristik wieder parallel der y -Achse wird usw. Die Summe der Beträge der Projektionen auf die x -Achse aller dieser Kurvenzüge ist nicht größer als π (falls $K \geq -1$ gilt). Da in zwei benachbarten Punkten M_i und M_{i+1} nun $t = 0$ gilt und s entgegengesetzte Vorzeichen hat, läßt sich die Existenz mindestens zweier Schnittpunkte einer Linie $q = \text{konst.}$ mit einer so konstruierten Kurve erschließen im Gegensatz dazu, daß q längs der ganzen Kurve streng monoton wachsend ist. — In der zweiten Arbeit untersucht Verf. die Größe des Regularitätsgebietes der Funktion $f(x, y)$, falls daselbst $K \leq -a^2 < 0$ besteht, und zwar ergibt sich: Enthält das Gebiet D der (x, y) -Ebene ein Quadrat von der Seitenlänge 14, so gibt es keine in D reguläre Funktion $f(x, y)$, so daß $K \leq -1$ in D gilt. Der Beweis stützt sich auf die vorangehende Arbeit und eine Reihe von Hilfssätzen über die Kurven $p = \text{konst.}$ bzw. $q = \text{konst.}$ (z. B. ist q auf den Kurven $p = \text{konst.}$ monoton).

Joachim Nitsche.

Rembs, Eduard: Zur Verbiegbarkeit konvexer Kalotten. Arch. der Math. **4**, 366—368 (1953).

Verf. beweist die Vermutung des Ref., wonach eine von einer Lichtgrenzkurve berandete Flächenkalotte nicht infinitesimal verbiegbar ist unter Erhaltung der Randkurve als Lichtgrenzkurve. Der Beweis stützt sich auf folgende Integrallformel, die mit Formeln verwandt ist, welche K.-P. Grottemeyer mehrfach erfolgreich bei Verbiegungsfragen angewandt hat: Ist η der Drehriß einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{x} + t \delta$, also $\eta_u = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v$, $\eta_v = \gamma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v$, ist ferner ξ der Einheitsvektor der Flächennormalen, so gilt für den Verschiebungsriß $\tau = \delta - (\eta \times \mathfrak{x})$ die Formel:

$$\oint (\mathfrak{x} \times d\mathfrak{x}) + 2 \iint (\alpha^2 + \beta \gamma) (\mathfrak{x} \xi) \mathfrak{x} d\sigma$$

bei Integration über den Rand bzw. die Kalotte. Anderer Beweis des Verf. s. Math. Ann. **127**, 251—254 (1954).

W. Süss.

Sauer, Robert: Differenzengeometrie der infinitesimalen Flächenverbiegung. Monatsh. Math. 57, 177—184 (1953).

Brauchbare Modelle zur differenzengeometrischen Illustration infinitesimaler Verbiegungen von Flächen negativer Krümmung stellen die „ebeneckigen Viereckshäute“ dar, d. h. Viereckshäute, deren Vierecksfacetten windschief sind, während die von einer inneren Ecke ausgehenden 4 Seiten in einer Ebene liegen. Den infinitesimalen Verknüickungen der Häute, bei denen die Vierecksfacetten starr bleiben, entsprechen die infinitesimalen Verbiegungen der Asymptotenliniennetze. Den Drehrissen der infinitesimalen Verbiegungen, auf denen den Asymptotenlinien ein konjugiertes Netz entspricht, werden „ebenfacettige“ Viereckshäute gegenübergestellt, die ihrerseits den ebeneckigen parallel-reziprok zugeordnet sind. Auf diese Art lassen sich Sätzen über die infinitesimale Verbiegung der Asymptotenliniennetze solche über die infinitesimale Verknüickung der ebeneckigen Viereckshäute an die Seite stellen. Der Fall der ebeneckigen Viereckshäute, bei denen die Vierecksfacetten windschiefe „Parallelogramme“ bilden, und das Analogon der pseudosphärischen Flächen mit Voß-Flächen als Drehrissen sind vom Verf. und anderen Autoren schon früher behandelt worden.

E. Rembs.

Nice, Vilko: Über die isotropen Strahlenpaare zweiter Art der Strahlenkongruenzen erster Ordnung dritter, zweiter und erster Klasse. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 8, 293—294 und kroatische Zusammenfassg. 295—296 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit und eine Bemerkung des Ref. dazu (dies. Zbl. 43, 362) beschäftigt sich Verf. hier mit den hochimaginären isotropen Geraden, die in einer Kongruenz 1. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse enthalten sind, und den von ihnen gebildeten Regelflächen.

K. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Kurita, Minoru: Generalized evolute in Klein spaces. J. math. Soc. Japan 5, 355—364 (1953).

Let G be the fundamental Lie group of a Klein space and H a closed subgroup of G . Let us consider the figure F consisting of a one-parametric set of points of the homogeneous space G/H and let $S_a R$, $S_{a+da} R$ be the Frenet's frames (R = fundamental frame, S_a = element of G , according to the theory of E. Cartan) defined at two consecutive points of F (a = parameter of F). The frames whose relative displacements are each given by S_i with respect to $S_a R$ and $S_{a+da} R$ are $S_a S_i R$ and $S_{a+da} S_i R$ and the infinitesimal relative displacement between these frames is given by $S_i^{-1} (S_a^{-1} S_{a+da}) S_i$. If S_i is chosen so that $S_i^{-1} (S_a^{-1} S_{a+da}) S_i$ is an infinitesimal element of a certain fixed subgroup K of G for all a , the author says that the elements of G/K belonging to $S_a S_i R$ form a „central figure“. The set of central figures as the parameter a varies is called an evolute E of F . If ω_i and $\omega_i^{(0)}$ are the principal relative components of the relative displacements of $S_a S_i$ and S_i respectively, then the fundamental theorem states that $\omega_i = \omega_i^{(0)}$. This theorem is applied to the cases of curves on the affine and projective plane and to ruled surfaces in the euclidean 3-space. In addition the same idea is applied to give a very general extension to Klein spaces of the classical Euler-Savary theorem referring to the curvature of the roulettes generated when a curve C_1 rolls without slipping on another curve C_2 .

L. A. Santaló.

Grincevicius, K. I.: Geradenkomplex im affinen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 695—698 (1953) [Russisch].

Verf. wendet die Cartansche Methode der Normierung des begleitenden Dreibeins für die Konstruktion der mit dem Geradenkomplex in einem affinen Raume verbundenen differentialgeometrischen Grundbegriffe an. Dabei werden die besonderen Geradenkomplexe (der Tangentenkomplex einer Fläche, der Komplex, dessen parallele Geraden in einer Ebene liegen u. a.) nicht betrachtet.

W. Wrona.

Kruppa, Erwin: Eine projektive Invariante von drei Linienelementen n -ter Ordnung mit einem gemeinsamen Linienelement $(n-1)$ -ter Ordnung. *Monatsh. Math.* **57**, 134—139 (1953).

Bei drei ebenen Kurven c_i ($i = 1, 2, 3$) $y = C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n + \dots$, die im Ursprung längs der x -Achse eine Berührung $(n-1)$ -ter Ordnung haben, ist der Quotient $J^{(n)} = (C_{n,3} - C_{n,1})/(C_{n,3} - C_{n,2})$ eine projektive Invariante. Für $n = 2$ ist dies bekannt. Verf. gibt eine geometrische Deutung von $J^{(n)}$ für $n = 3, 4, 5, 6$ und 7 , dabei von den drei Affin- und Projektivnormalen Gebrauch machend.

R. W. Weitzenböck.

Bereis, R.: Eine Bemerkung zur projektiven Invariante J^n in der voranstehenden Arbeit von E. Kruppa. *Monatsh. Math.* **57**, 140—141 (1953).

Im Anschluß an die vorstehende Arbeit wird eine einfache geometrische Deutung der projektiven Invariante $J^{(n)}$ mit Hilfe der $(n-1)$ -ten Krümmungsmittelpunkte gegeben, die für $n = 4$ besonders anschaulich ist.

R. W. Weitzenböck.

Terracini, Alessandro: Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi spazi osculatori. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* **12**, 265—281 (1953).

L'A. considera in S_{n+1} due rami lineari di uguale origine O , aventi ivi comuni gli spazi osculatori di ordine $\leq n$ (con gli stessi ordini di contatto con ciascuno di essi) e li rappresenta

rispettivamente con gli sviluppi: $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,i+k} x^{p_i+k}$, $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{i,i+k} x^{p_i+k}$ dimostra quindi che se esiste un intero m tale che $a_{i,i+k} = a'_{i,i+k}$ ($i = 1, \dots, n$) ($0 \leq k \leq m$) le espressioni:

$$\gamma_{ij} = [(a_{i,i+m+1} - a'_{i,i+m+1}) a_{jj}^{-1}] / [(a_{j,j+m+1} - a'_{j,j+m+1}) a_{jj}^{-1}] \quad (i, j \leq n)$$

sono invarianti proiettivi. Di ciascuno di questi assegna un significato proiettivo come limite di un quoziente di birapporti. Per quanto concerne il significato metrico si osserva che gli invarianti γ_{ij} ($2 \leq i \leq n$) sono già sufficienti a definire i rimanenti e sono esprimibili come combinazioni lineari di altri $n-1$ invarianti proiettivi interpretabili a loro volta come limiti dei rapporti $[(k'_i - k_i) k_i^{-1}] / [(k'_j - k_j) k_j^{-1}]$ ove k_i e k'_i sono le i -esime curvatures dei due rami nei due punti prossimi ad O in cui essi sono segati da un iperpiano parallelo all'iperpiano normale in O . Nel caso $n = 2$ dell'invariante γ_{12} si dà pure un altro significato proiettivo collegandolo a una coppia di omografie, una nella stelle di centro O e una nel piano osculatore ω (comune) in O , entrambe le quali trasformano in sè il fascio (O, ω) .

P. Buzano.

Gentile, Maria Luisa: Una formula sull'incidenza di piani infinitamente vicini, con applicazione alle linee principali di una superficie. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **87**, 43—50 (1953).

Verf. findet die Bedingung dafür, daß in einem einfach unendlichen System von Ebenen im Raum 5. Dimension S_5 zwei unendlich benachbarte Ebenen in einem Punkt nach einer Annäherungsordnung $\sigma \geq 8$ inzidieren. Sie benutzt das Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen: Wenn längs eines mindestens vierfachen Systems von nicht ebenen Hauptlinien einer Fläche des S_5 zwei Tangentialebenen inzident sind nach einer Annäherungsordnung $\sigma \geq 8$, so ist das System fünffach. Verf. beantwortet damit eine Frage, die A. Terracini in seiner Arbeit, dies. Zbl. **48**, 395, offen gelassen hat.

M. Zacharias.

Demaria, Davide Carlo: I sistemi di superficie con la proprietà proiettiva o conforme in prima approssimazione. *Boll. Un. mat. Ital.* **III**, Ser. **8**, 409—413 (1953).

Let (1): $r = r(x, y, z; p, q, s)$; $t = t(x, y, z; p, q, s)$ be a system of partial differential equations of the second order, fulfilling the conditions of complete integrability, and for which $(\partial r / \partial s)(\partial t / \partial s) \neq 1$; (1) defines then a sytem of ∞^4 surfaces. According to A. Terracini (this Zbl. **35**, 224) the integral surfaces of (1) (that are assumed to be analytic) have the projective (conformal) property in the 1st order of approximation if, for the ∞^2 surfaces through two infinitely near points, A and B , the bundles of the tangent planes at A, B are projectively (conformally) related. — The author shows that the integral surfaces of (1) fulfil the projective property in the 1st order of approximation if and only if (1) has the form: (2): $r = A s + B$; $t = C s + D$, where A, B, C, D are any functions of x, y, z, p, q , so that (1) is completely integrable, and $AC \neq 1$. — The author studies then the conformal property, and finds that it is satisfied if and only if (1) has the form: $r = (1 + p^2) s / p q + B$; $s = (1 + q^2) s / p q + D$, and is completely integrable.

V. Dalla Volta.

Laktanova, N. V.: Ein stratifizierbares Paar von Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 473—474 (1953) [Russisch].

Es wird in dieser kurzen Note der Begriff des schichtbaren Paares von Flächen F_1, F_2 eingeführt. Dies sind Flächen, zwischen deren Punkten sich eine derartige Korrespondenz herstellen läßt, daß es eine dreiparametrische Schar von W -Kongruenzen gibt, deren Brennpunkte sich je auf die Tangentialebenen geordneter Punkte verteilen. Es wird gezeigt, wie hierdurch der bekannte Begriff des schichtbaren Paares von Kongruenzen verallgemeinert wird. *W. Burau.*

Muracchini, Luigi: Sulle trasformazioni puntuali involuppi di omografie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 390—398 (1953).

Si considerino fra due spazi S_n e \bar{S}_n una trasformazione puntuale T e una famiglia ∞^s ($s < n$) di omografie $K(u_1, u_2, \dots, u_s)$: T si dice involuppo delle omografie K se a ciascuna esse è associata una varietà V_{n-s} di S_n per modo che se \bar{V}_{n-s} è la varietà di \bar{S}_n che corrisponde a V_{n-s} nell'omografia K , le due varietà si corrispondono allo stesso modo anche nella T e K deve risultare tangente in tutte le coppie di punti corrispondenti; inoltre al variare dei parametri u_i le due varietà devono descrivere due famiglie riempienti rispettivamente di S_n e \bar{S}_n . L'A. dimostra che perchè tutto ciò si verifichi è necessario che V_{n-s} e \bar{V}_{n-s} siano spazi s -ari e che si corrispondano punto per punto sia nell'omografia K che nelle $\partial K / \partial u_i$. Indica una via per la costruzione delle trasformazioni puntuali involuppi di omografie partendo da due sistemi ∞^s di spazi a $n-s$ dimensioni assegnati rispettivamente in S_n e in \bar{S}_n e da una conveniente corrispondenza fra detti sistemi. *P. Buzano.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Berger, Marcel: Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 472—473 (1953).

L'A. étudie l'algèbre d'holonomie $d\sigma$ d'une variété riemannienne irréductible non symétrique. Sa méthode repose sur les travaux d'E. Cartan concernant les groupes linéaires irréductibles et consiste à étudier le tenseur dérivé du tenseur de courbure (tenseur qui définit des éléments de $d\sigma$) pour les différentes structures d'algèbre de Lie qui peuvent se présenter. A l'aide des identités de Bianchi, on déduit que, dans un grand nombre de cas, ce tenseur est nul et la variété symétrique. La présente note est consacrée aux groupes σ de seconde classe (au sens de Cartan); dans les hypothèses faites σ est nécessairement simple ou simple par T^1 . *A. Lichnerowicz.*

Berger, Marcel: Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes non symétriques. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1306—1308 (1953).

Dans cette note qui complète la précédente (voir référéat précéd.), l'A. applique la même méthode à un groupe d'holonomie de première classe. En écartant les cas des groupes simples exceptionnels, il donne, selon la dimension de la variété, une liste exhaustive des groupes d'holonomie homogènes restreints possibles pour une variété riemannienne irréductible non symétrique. Cette intéressante méthode est susceptible d'extensions. *A. Lichnerowicz.*

Nomizu, Katsumi: Application de l'étude des transformations affines aux espaces homogènes riemanniens. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1386—1387 (1953).

Ein homogener Riemannscher Raum G/H ist ein homogener Raum einer zusammenhängenden Liegruppe G (H kompakt) mit einer positiv-definiten Metrik, die unter G invariant ist. Verf. untersucht die Reduzibilität von G/H , die kanonische Aufspaltung von G/H nach de Rham und Formen mit verschwindenden kovarianten Ableitungen. Wir erwähnen: „(1) Si G est simple et effectif sur un espace homogène riemannien G/H , alors G/H est irréductible non euclidien. (2) Si G/H est simplement connexe, alors chaque facteur de la décomposition canonique de G/H est homogène. (3) Si G est simple sans centre, toute forme à dérivée covariante nulle sur G/H est invariante par G .“ *W. Klingenberg.*

Chern, Shiing-shen and Nicolaas H. Kuiper: Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space. *Ann. of Math.*, II. Ser. 56, 422—430 (1952).

Es handelt sich in dieser Arbeit um längentreue (isometrische) Einbettung eines gegebenen kompakten Riemannschen Raumes V_n in einen euklidischen Raum R_{n+N} . Eine geometrische Idee von C. Tompkins ausnützend [Isometric embedding of flat manifolds in Euclidean space, *Duke Math. J.* 5, 58—61 (1939)] stellen die Verff. fest, daß die Möglichkeit einer solchen Einbettung gewisse Beziehungen für die Krümmung der V_n nach sich zieht, Beziehungen, welche zu einigen Fragen von algebraischer Natur führen, die für $N > 1$ keineswegs einfach sind. Die Verff. führen zunächst zwei Begriffe ein, und zwar die des relativen Indexes $\nu(P)$ und des absoluten Indexes $\mu(P)$, welche mit dem laufenden Punkt des V_n , der in den R_{n+N} eingebettet ist, verknüpft sind. Zwischen diesen Indizes besteht die Beziehung $\nu \leq \mu \leq 1 + N$, woraus insbesondere das negative Resultat gefolgert werden kann, daß der V_n in einen $R_{n+\mu_0-1}$ nicht einbettbar ist, falls $\mu(P) \geq \mu_0$ in jedem Punkte P besteht. Dieser Satz bildet eine Verallgemeinerung des Resultates von Tompkins, auf Grund dessen ein „locally flat“ V_n in einen R_{2n-1} nicht eingebettet werden kann. Die Verff. beweisen weiter den folgenden Satz. Wenn in jedem Punkte P eines V_n ein linearer q -dimensionaler Unterraum ($q = 2$ oder $q = 3$) existiert von der Eigenschaft, daß die Krümmung der zweidimensionalen Durchschnitte durchweg ≤ 0 ist, so läßt sich der V_n isometrisch in einen R_{n+q-1} nicht einbetten. Die Richtigkeit des Satzes für $q > 3$ wird von den Verff. als Vermutung ausgesprochen (s. folgend. Referat). Durch Einführung des Begriffes des lokalen tangentialen Raumes $L(P)$ von der Dimension $\mu(P)$, welcher „space of nullity“ genannt wird, wird von den Verff. gezeigt, daß die Ungleichung $\mu(P) > 0$ für den Krümmungstensor des V_n gewisse Beschränkungen algebraischer Natur erzwingt. St. Golab.

Ôtsuki, Tominosuke: On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application. *Proc. Japan Acad.* 29, 99—100 (1953).

Zwecks Verallgemeinerung eines Satzes von S. S. Chern und N. H. Kuiper über die Einbettung eines kompakten Riemannschen Raumes in einen euklidischen Raum (vgl. vorangehend. Referat) beweist der Verf. den folgenden algebraischen Hilfssatz: Es sei ein System von homogenen Gleichungen zweiten Grades gegeben (*): $A_{\lambda i j} x^i x^j = 0$; $\lambda = 1, \dots, m$;

$i, j = 1, \dots, n$, wo $m < n$, $A_{\lambda i j} = A_{\lambda j i}$. Ist $\sum_{\lambda=1}^m (A_{\lambda i k} A_{\lambda j k} - A_{\lambda i k} A_{\lambda j k}) x^i x^k y^j y^k \leq 0$ für alle x^i, y^j , so besitzt das System (*) nicht triviale reelle Lösungen. Der Beweis wird auf analytischem Wege erledigt. Der obengenannte Hilfssatz ermöglicht die Verallgemeinerung des Satzes von Chern und Kuiper auf den Fall, daß q beliebig (und nicht notwendig ≤ 3) ist. St. Golab.

Ôtsuki, Tominosuke: Some theorems on a system of matrices and a geometrical application. *Math. J. Okayama Univ.* 3, 89—94 (1953).

Let $\mathfrak{M}_{n,m}$ be a set of (n, m) -matrices, and multiplication be defined by $\mathfrak{M}_{n,m} \ni M_1, M_2, M_1 \circ M_2 = M_1 M_2' (\in \mathfrak{M}_{n,n})$ where M_2' is the transpose of M_2 . Let $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_{n,m}$ be a linear subspace with base M_1, \dots, M_r ; $N_{ij} = M_i \circ M_j - M_j \circ M_i (\in \mathfrak{M}_{n,n})$ and $\Phi(\mathfrak{M}, u) = \sum N_{ij} u_i \wedge u_j$ be an exterior form of the vector space $\mathfrak{M}_{n,n}$ over the real field. Then, if r is the dimension of \mathfrak{M} and k the minimum of numbers of variables such that Φ can be expressed by them, then the dimension $r - k$ of a system in \mathfrak{M} for which $M_1 \circ M_2 = M_2 \circ M_1$ is $\leq m$. If V_n is a Riemannian manifold with

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k = \omega_i(x, dx) \omega_i(x, dx), \quad i, j = 1, \dots, n;$$

$$d\omega_j = \sum \omega_j \wedge \omega_{ji}, \quad d\omega_{ij} = \sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij};$$

if $k(p)$ be the minimum number of linear differential forms in terms of which the curvature forms Ω_{ij} at $p \in V_n$ can be expressed, and if $k = \max k(p) = k(V_n)$ for $p \in V$, then the index of nullity is $n - k(p)$ (S. S. Chern-N. H. Kuiper, this Zbl. 48, 118). Now the theorem holds: a compact Riemannian manifold V_n cannot be isometrically imbedded in an Euclidean space of dimension $2n - k(V_n) - 1$.

D. J. Struik.

Chern, Shiing-shen: Relations between Riemannian and Hermitian geometries. *Duke math. J.* 20, 575—587 (1953).

A hermitian metric on a complex manifold is determined by $ds^2 = h_{jk} dz^j d\bar{z}^k$, $j, k = 1, \dots, n$, where the z^k are local coordinates, and the $h_{jk} = h_{kj}$ have their real and imaginary

parts real analytic in the arguments. The ds^2 is supposed to be positive definite. It is called Kählerian if for its corresponding exterior differential form $d(h_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta) = 0$. An analytic Riemannian metric of $2n$ dimensions is locally hermitian if in every neighborhood there exist complex analytic functions z^k in the local coordinates x^α , $\alpha = 1, 2, \dots, 2n$, such that the metric takes the hermitian form. It is called locally Kählerian if the corresponding exterior differential form vanishes. Then the necessary and sufficient condition that a Riemannian metric is locally hermitian is the existence of a submanifold in the space B of all its rectangular frames on which the Pfaffian system $\Theta_k = \omega_k - i\omega_{\bar{k}} = 0$, is completely integrable and $\Theta_1 \wedge \dots \wedge \Theta_n \wedge \bar{\Theta}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\Theta}_n \neq 0$. Here $ds^2 = \omega_\alpha \omega_\alpha$, $\Theta_k = a_{\alpha k} dz^\alpha$, $ds^2 = \Theta_i \bar{\Theta}_i$, and the $\Theta_k = \xi_k + i\eta_k$ are to be selected such that $\omega_k = \xi_k$, $\omega_{\bar{k}} = \eta_k$. The integrability conditions are studied, from which can be followed that in order that an analytic Riemannian metric of even dimension $2n$ be locally hermitian it is necessary and sufficient that there is a family of rectangular frames relative to which

$$0 = R'_{lmjk} + R'_{lm'jk} + R'_{lmj'k} + R'_{lmjk'} - R'_{lmj'k'} - R'_{lm'j'k} - R'_{lm'jk'} - R'_{lm'j'k'},$$

$$0 = R'_{lmj'k'} + R'_{lm'j'k} + R'_{lm'jk'} + R'_{lmjk'} + R'_{lm'jk'} + R'_{lmj'k'} - R'_{lmjk} - R'_{lm'j'k'}.$$

The terms are parts of the curvature tensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ with $k' = n + k$ etc. Necessary and sufficient conditions that such a metric be locally Kählerian are also established. A corollary is that a Riemannian metric of constant curvature is only locally Kählerian if the curvature is zero. The paper ends with some examples. *D. J. Struik.*

Suguri, Tsuneo: On deformed Riemannian spaces. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 8, 43—55 (1953).

In V_n ist eine infinitesimale Deformation gegeben. Dabei werde das Feld g_{ij} mitgeschleppt. Selbstverständlich wird dann auch der Krümmungstensor mitgeschleppt. In dem deformierten Raum gibt es ja ein Koordinatensystem, eben das mitgeschleppte, in bezug auf welches der mitgeschleppte Fundamental-tensor und ebenso sämtliche andere eventuell mitgeschleppten Felder genau dieselben Bestimmungszahlen haben wie die alten Felder in bezug auf das alte Koordinatensystem. Jedes mitgeschleppte Feld behält also sämtliche Eigenschaften, auch die metrischen. Es braucht also gar nicht bewiesen zu werden, daß ein harmonisches Feld harmonisch bleibt, daß eine S_n eine S_n mit derselben Krümmung bleibt, daß die Holonomiegruppe ihre Eigenschaften behält usw. Die Arbeit enthält nur Sätze dieser Art bis auf einen, der besagt, daß die Lie-Ableitung jedes harmonischen Feldes dann und nur dann stets harmonisch ist, wenn die infinitesimale Transformation eine Bewegung ist. *J. A. Schouten.*

Takeno, Hyôitirô: Theory of the spherically symmetric space-times. II. Group of motions. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 67—73 (1953).

(Cf. Part I, this Zbl. 45, 111.) The author studies groups of motions of spherically symmetric space-times. First he considers the problem by means of classical spherically symmetric coordinate systems (i.e. those for which the fundamental forms are of the form [*]), studies solutions of Killing equations and classifies spherically symmetric space-times by their groups of motions to 11 types. Then he restates the classification by means of his characteristic system. *S. Sasaki.*

Takeno, Hyôitirô: Theory of the spherically symmetric space-times. III. Class. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 291—298 (1952).

(Cf. part II, preceding review.) J. Eiesland [Trans. Amer. math. Soc. 27, 213—245 (1925)] proved that every spherically symmetric space-time can be imbedded as a subspace in 5 or 6 dimensional flat space (i.e. the former is of class 1 or 2). The author studies the condition under which the spherically symmetric space-time in consideration is of class 1, first by means of the classical spherically symmetric coordinate system and then he expresses it in invariant form by means of his characteristic system. *S. Sasaki.*

Takeno, Hyôitirô: Theory of the spherically symmetric space-times. IV. Conformal transformations. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 299—307 (1952).

(Cf. part III, preceding review.) When we apply a conformal transformation $g^*_{ij} = e^{2v} g_{ij}$ to a spherically symmetric space-time, the new space-time is not in

general spherically symmetric. If the latter is spherically symmetric, we call the transformation a spherically symmetric conformal transformation. The author studies the general form of spherically symmetric conformal transformations and the transformation of characteristic systems by such transformation.

S. Sasaki.

Takeno, Hyôitirô: Theory of the spherically symmetric space-times. V. n dimensional spherically symmetric space-times. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 497—506 (1953).

(Cf. part IV, preceding review.) The author generalizes the notion of spherically symmetric space-times to n dimensions, however assuming that the fundamental form of the space-time is positive definite for the sake of simplicity. The defining tensor equations of an n dimensional spherically symmetric space-time have the same forms as those given in his paper I of the same title (cf. this Zbl. 45, 111) except the signs of $+$ and $-$ which are caused by the signature of the fundamental form. Many theorems analogous to those of 4 dimensional spherically symmetric space-times (cf. I—IV) are given. For example, the fundamental form of any n dimensional spherically symmetric space-time can be reduced to the form

$$(**) \quad ds^2 = A(r, t) dr^2 + B(r, t) dl^2 + C(r, t) dt^2, \quad (A, B, C > 0)$$

where dl^2 is the fundamental form of $(n-2)$ dimensional space of constant curvature whose scalar curvature is equal to 1. The necessary and sufficient condition that the fundamental form of a spherically symmetric space-time can be reduced to the form $(**)$ with constant B is that $2(n-2)$ of the principal invariants of K_{AB} ($= K_{i+km}$) are equal to zero and other $n-2$ C_2 are equal to a non-vanishing constant (the remaining one is arbitrary). *S. Sasaki.*

Takeno, Hyôitirô: Theory of the spherically symmetric space-times. VI. Form-invariant tensors under group of motions and parallel tensors. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 507—523 (1953).

In his paper II of the same title (cf. the preceding reviews), the author studied groups of motions of spherically symmetric space-times and classified such space-times into eleven types by their groups of motions. In this paper he first gives a general form of form-invariant tensors under the group of motions of the spherically symmetric space-time in consideration and then gets explicit forms of general form-invariant tensors for every one of the eleven types of space-times. He then studies parallel field of tensors and classifies spherically symmetric space-times into five types from the stand point of parallel field of tensors. *S. Sasaki.*

Takeno, Hyôitirô and Mineo Ikeda: Theory of the spherically symmetric space-times. VII. Space-times with corresponding geodesics. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 17, 75—81 (1953).

(Cf. part VI, preceding review.) Let S and S^* be space-times with corresponding geodesics. The main theorem of this paper is then stated in the following way: If S is spherically symmetric, then S^* is also spherically symmetric. Many other theorems which concern with spherically symmetric spaces which have corresponding geodesics with spherically symmetric spaces satisfying one of the conditions $B = 0$, $\neq 0$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}^3$ or $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}^3$ are proved too. *S. Sasaki.*

Lamson, K.W.: On the curvature tensor of Einstein's generalized theory of gravitation. Canadian J. Math. 5, 297—300 (1953).

Der Krümmungstensor $R_{\beta\sigma\epsilon}^{\alpha}$ ist äquivalent mit der Größe $\epsilon\lambda_{\alpha\beta\gamma} R_{\lambda}^{\alpha}\epsilon_{\sigma}$ der Valenz 6 und diese Größe kann nach der von Schouten (Der Riccialkül, 1. Auflage, Berlin 1924, S. 258ff.) angegebenen Methode invariant zerlegt werden. In diesem Falle entstehen dann zwei Bivektoren $a_{\epsilon\sigma}$, $b_{\epsilon\sigma}$, ein symmetrischer Tensor $c_{\epsilon\sigma}$, eine symmetrische Tensordichte $d^{\epsilon\sigma}$ und eine Größe $h_{\beta\epsilon\sigma}^{\alpha}$ der Valenz 4, die den Identitäten $h_{\beta\epsilon\sigma}^{\alpha} = 0$; $h_{[\beta\epsilon\sigma]}^{\alpha} = 0$; $\bar{h}_{\beta\epsilon\sigma}^{\alpha} = 0$ genügt und 64 Bestimmungszahlen hat. Zusammen sind damit die 96 Bestimmungszahlen von $R_{\beta\sigma\epsilon}^{\alpha}$ verantwortet. Alle invarianten Gleichungen und also auch die Feldgleichungen lassen sich ganz mit Hilfe dieser fünf Größen schreiben.

J. A. Schouten.

Golab, S.: On Finsler's measurement of an angle. Ann. Soc. Polon. Math. 24, Nr. 2, 78—84 (1953).

O désigne un point du plan affine orienté. A tout rayon r issu de O correspond un point $P = P(r) \neq 0$ situé sur r et fonction continue de r . Le lieu (I) de P est donné en chaque point d'une demi-tangente positive $t = t(r)$ ne passant pas par O . (I) étant envisagé comme indicatrice (ou courbe d'étalonnage), la

mesure finslérienne (minkowskienne) q de l'angle du rayon r avec le rayon r_1 est définie par la relation $(R): \cos q = OP/OQ$, Q désignant le point de rencontre de r et de $t_1 = t(r_1)$. Théorème: S'il existe un $\varepsilon^0 > 0$, tel que pour tout rayon r_1 , quel que soit r se déduisant de r_1 par une rotation positive d'amplitude $< \varepsilon^0$ dans une métrique euclidienne auxiliaire), (R) définisse un angle réel, alors (I) est convexe.

Chr. Pauc.

Flanders, Harley: Development of an extended exterior differential calculus. Trans. Amer. math. Soc. **75**, 311—326 (1953).

This paper contains an algebraic apparatus for the theory of affine connections on differentiable manifolds \mathcal{M} of class C^∞ . Then there is a space $C(\mathcal{M})$ of all infinitely differentiable real-valued functions in \mathcal{M} . A tangent vector at a point P of \mathcal{M} is then defined as a real-valued function v on $C(\mathcal{M})$ for which $v(f + g) = v(f) + v(g)$, $v(af) = av(f)$, $v(fg) = v(f)g(P) + (P)v(g)$, if $f, g \in C(\mathcal{M})$ and a real. These v form a linear space T_P of which a base e_1, \dots, e_n can be found. Then there exist two important bundles: the tangent bundle \mathcal{T}_1 and the frame bundle of \mathcal{M} (consisting of all frames e_1, \dots, e_n). An affine connection is defined as an exterior differentiation operator d on \mathcal{T}_1 into \mathcal{T}_1 for which $d(v + w) = dv + dw$, $d(fv) = dfv + f dv$. Here \mathcal{T}_q is the product of \mathcal{T}_1 , the linear space of all q -forms, and \mathcal{T}^p , the linear space of all vector fields on \mathcal{M} , \mathcal{F} being the ring of all C^∞ functions. The affine calculus obtained in his way is compared to the ordinary tensor calculus and applications are made to Riemannian geometry.

D. J. Struik.

Cossu, Aldo: Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., **VIII. Ser. 14**, 29—35 (1953).

Sur une variété différentiable V_n , l'A. suppose données une métrique riemannienne et une connexion affine. Poursuivant des recherches de Bompiani (ce Zbl. **44**, 374), il étudie certaines liaisons entre ces deux éléments géométriques; si S_{jk} est le tenseur de torsion, il appelle la direction de torsion associée au 2-plan $(dx^i, \delta x^k)$ la direction du vecteur $S_{jk}^i dx^i \delta x^k$. Pour que la connexion affine, supposée euclidienne pour la métrique donnée, admette comme courbes autoparallèles les géodésiques de cette métrique, il faut et il suffit que la direction de torsion associée à tout 2-plan soit normale à ce 2-plan. Dans le cas d'une connexion affine générale l'A. étudie les vecteurs dont le module est conservé par transport (par un élément linéaire donné) relatif à la connexion envisagée et à la connexion symétrique associée. Il détermine la connexion la plus générale conservant le module d'un vecteur par transport associé à un élément linéaire appartenant à un champ de $(n-1)$ -plans donnés. Il en déduit des caractérisations géométriques simples des connexions métriques, au sens de Schouten, et de celles de ces connexions dont les autoparallèles coïncident avec les géodésiques de la métrique. En particulier une connexion métrique jouissant de cette propriété admet un vecteur de torsion S_{jk}^i nul.

A. Lichnerowicz.

Bompiani, Enrico: Connessioni affini e geometria riemanniana. Boll. Un. mat. Ital., **III. Ser. 8**, 363—368 (1953).

Etant donnée sur une variété différentiable, une connexion affine (non symétrique) L_{jk}^i et la torsion Ω_{jk}^i , l'A. se propose d'étudier dans le voisinage du premier ordre d'un point \hat{x} les métriques riemanniennes reliées à la connexion par certaines conditions intrinsèques. Ce problème est en liaison étroite avec des travaux de l'A. (ce Zbl. **44**, 374) et de A. Cossu (voir le rapport précéd.). Une connexion affine et une métrique \hat{g}_{jk} étant données au point \hat{x} , pour que la connexion soit euclidienne en \hat{x} relativement à la métrique, il faut et il suffit que le champ métrique (dans le voisinage du premier ordre de \hat{x}) soit déterminé pas transport parallèle de la métrique relativement à la connexion. Une autre métrique peut être déterminée dans ce voisinage par la condition que la connexion symétrique associée à L coïncide avec la connexion riemannienne. Les deux H_{jk} géodésiques relativement à ces métriques et associés à une direction dx^i définissent un 2-plan „principal“ déterminé par cette direction et par la direction $p^i = \Omega_{jk}^i \hat{g}^{jk} \hat{g}^{ii} dx^i dx^k$ orthogonale à dx^i . La direction p^i est indéterminée pour tout dx^i si $\Omega_{jk}^i \hat{g}^{jk} = 0$ condition étudiée antérieurement. L'A. recherche les directions dx^i pour lesquelles p^i coïncide en direction avec $\Omega_i \neq 0$ (vecteur de torsion). Il établit qu'il ne peut en être ainsi pour toute direction dx^i à moins que p^i ne soit toujours indéterminé. Les directions dx^i pour lesquelles $p^i \Omega_i = 0$ sont aussi étudiées. A. Lichnerowicz.

Suguri, Tsuneo: On pseudo harmonic tensor fields. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A **7**, 61—68 (1953).

Bochner hat 1949 (dies. Zbl. **39**, 176) eine V_n betrachtet, die außer der gewöhnlichen Übertragung noch eine zweite metrische Übertragung trägt, die zwar denselben Fundamental-

tensor besitzt, aber nicht symmetrisch ist. In dieser V_n betrachtete er „pseudoharmonische Tensorfelder“, das sind Multivektorfelder, deren in bezug auf die zweite Übertragung definierte Rotation und Divergenz verschwinden. Es werden hier zunächst einige Ungenauigkeiten berichtet, die durch Nichtbeachtung des Einflusses von $S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta}$ entstanden sind, die aber, wie aus einer später hinzugefügten Fußnote hervorgeht, auch schon von Bochner und Yano (dies. Zbl. 48, 158) verbessert wurden. Ein p -Vektorfeld heißt „pseudo-restrained“ (p. r.), wenn entweder die Überschiebung φ des Feldes mit sich selbst konstant ist oder $\tilde{J}\varphi = 0$, wo \tilde{J} den Laplaceschen Operator in bezug auf die zweite Übertragung darstellt. Es wird bewiesen, daß ein allgemeines p -Vektorfeld in einer allgemeinen kompakten V_n dieser Art nicht stets, im Gruppenraum einer nicht Abelschen halbeinfachen geschlossenen Gruppe dagegen stets p. r. ist. Es folgt der Beweis eines Theorems über die Beziehung zwischen pseudo-harmonischen und p. r. Feldern in besagtem Gruppenraum.

J. A. Schouten.

Legrand, Gilles: Connexions définies sur une variété presque hermitique. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1626—1627 (1953).

Study of connexions associated to a Hermitian form in terms of a Riemannian „repère mobile“.

H. Guggenheimer.

Ambrose, W. and I. M. Singer: A theorem on holonomy. Trans. Amer. math. Soc. 75, 428—443 (1953).

Ce Mémoire débute par un exposé extrêmement clair de la théorie des connexions de E. Cartan, sous la forme moderne que lui ont donnée Ehresmann et Weil, [voir H. Cartan, Centre Belge Rech. math., Colloque Topologie, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 15—27 (1951), C. Ehresmann, ibid. p. 29—55, S. S. Chern, Topics in differential geometry, Princeton 1951], et établit ensuite une relation entre la courbure et le groupe d'holonomie d'une connexion. Soient E un espace fibré principal indéfiniment différentiable, de base B et de groupe structural G . Une connexion se définit par exemple par la donnée en tout point $x \in E$ d'un sous-espace H_x de l'espace tangent en x qui soit supplémentaire de l'espace tangent à la fibre passant par x , le système des H_x étant invariant par les opérations de G . A une connexion on associe une dérivation covariante et une forme de courbure $\Omega(s, t)$; cette dernière est une forme différentielle extérieure de degré deux, à valeurs dans l'algèbre de Lie de G . Le groupe d'holonomie $G(a)$ en a ($a \in E$), de la connexion est l'ensemble des $g \in G$ tels que le transformé $g \cdot a$ de a par g puisse se relier à a par une courbe, différentiable par morceaux, „horizontale“ c'est à dire qui, en chaque x , est tangente à H_x ; en se restreignant aux g pour lesquels la courbe a une projection dans B qui est homotope à zéro on obtient un sous-groupe $G(a)^\circ$ de $G(a)$, connexe par arcs, et qui est par conséquent un sous-groupe de Lie de G (Yamabe, ce Zbl. 39, 21). Le résultat principal de ce travail est que l'algèbre de Lie de $G(a)^\circ$ est engendrée par les transformations $\Omega(s, t)$ où s et t parcourent les vecteurs tangents à E en les points qui peuvent être reliés à a par des courbes „horizontales“. — Erratum: p. 436, remplacer K^j par W^j à la ligne 16 et dans l'égalité de la ligne 17.

A. Borel.

Wong, Y. C.: Fields of parallel planes in affinely connected spaces. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 241—253 (1953).

Ein E_r -Feld in A_n heißt parallel, wenn die tangierende r -Richtung kovariant konstant ist. Mit jedem parallelen E_r -Feld ist ein Tensor $A_{\beta kl}^{\alpha}$ invariant verbunden. Der Tensor ist Null, wenn und nur wenn es in E_r ein System von r kovariant konstanten Vektorfeldern gibt. Es werden A_n mit zwei parallelen E -Feldern betrachtet. In einer nicht notwendig gewöhnlichen V_n gibt es zu jedem parallelen E_r -Feld ein $E_{r'}$ -Feld, das aufgespannt wird von den r' zu E_r senkrechten Richtungen. Es werden kanonische Formen aufgestellt. Der letzte Abschnitt bringt einiges über die V_{2r} mit zwei nicht schneidenden parallelen E_r -Feldern. Die Arbeit vervollständigt einige Resultate von Walker (dies. Zbl. 33, 131; 36, 383, 384).

J. A. Schouten.

Lenoir, Marcel: Une généralisation du théorème de Gauss. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 384—385 (1953).

Dans le cadre de la théorie unitaire d'Einstein, l'A. considère un champ stationnaire: il existe un groupe à 1 paramètre à trajectoires orientées dans le temps laissant invariant le tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$ et par suite la connexion affine. Il établit, dans ce cas, une généralisation du théorème classique de Gauss de la relativité générale: il construit un vecteur d'espace \vec{h} ne dépendant que

les $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées premières tel que (en notations d'Einstein) $\kappa^{\lambda}_{\lambda;\lambda} = g^{\lambda\lambda} R_{\lambda\lambda} + g^{\lambda\lambda} \tilde{R}_{\lambda\lambda}$.

A. Lichnerowicz.

Picasso, Ettore: Alcune osservazioni sull'uso delle connessioni proiettive nello studio delle superficie di S_1 . Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 23, 1—8 (1953).

Data in S_4 una V_2 $x^2 = x^2(u^1, u^2)$ si consideri la piramide di riferimento determinata dai punti $x^2, \partial x^2 / \partial u^1, \partial x^2 / \partial u^2, c^2, c^2$; assunta la congiungente i due ultimi come S_1 -polo di una connessione proiettiva sulla superficie, la totalità delle rette cc dà luogo ad una varietà Y'_2 di cui la superficie suddetta è la varietà direttrice. La V_2 risulta caratterizzata rispetto al gruppo delle omografie di S_4 mediante due connessioni proiettive (relative a V_2 e Y'_2) e due tensori affini. Tali enti però determinano insieme la V_2 e la Y'_2 per il tramite di un sistema di equazioni a derivate parziali; volendo una rappresentazione univoca della V_2 occorre o eliminare le c^2 dalle equazioni fondamentali oppure farne una scelta determinata intrinsecamente dalla superficie. L'A. si sofferma sulla scelta che si ottiene riferendo anzitutto a V_2 al suo doppio sistema coniugato (u, v) e assumendo poi c^2 nell'intersezione dei piani x, x_u, x_{uu} e $(\bar{z}, \bar{z}_v, \bar{z}_{vv})$ e c^2 in quella dei piani (x, x_v, x_{vv}) e (z, z_u, z_{uu}) dove con z e \bar{z} si indicano i trasformati di Laplace di $x(u, v)$ nel senso della u e della v rispettivamente.

P. Buzano.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Künneht, Hermann: Eine Kennzeichnung lokal konvexer Kurven. J. reine angew. Math. 191, 158—164 (1953).

Definitionen und Bezeichnungen: Ein Bogen bzw. ein einfacher Bogen ist das eindeutige bzw. eineindeutige Bild einer abgeschlossenen Strecke. Die Kurve $C: P(K)$ ist eindeutiges, stetiges, von Konstantbogen freies Bild der Kreislinie K in der euklidischen Ebene E . Eine Pseudokurve ist ein mehrfach durchlaufener einfacher Bogen. Eine Umgebung einer Stelle (eines Kurvenpunktes) $P: P(x)$ auf C ist das P -Bild einer Umgebung von x in K . Eine Umgebung des Punktes P von C auf C ist die zusammenhängende, P enthaltende Komponente von $V(P) \cap C$, wobei $V(P)$ eine Umgebung von P in E ist. C ist in der Stelle bzw. im Punkte P lokal bzw. punktal konvex, wenn es eine Umgebung der Stelle bzw. des Punktes auf C gibt, die konvex ist. C ist lokal bzw. punktal konvex, wenn sie in jeder Stelle lokal bzw. punktal konvex ist. Der Index $J(S)$ eines Punktes S außerhalb C bezüglich C ist die Zahl der Stützstellen der aus S an C gehenden lokalen Stützgeraden. Die Charakteristik $\psi(S)$ ist der Winkel, den die Halbgerade SP beschreibt, wenn P die Kurve C durchläuft. Satz I. Hat eine Kurve C , die nicht Pseudokurve ist, mit einer Geraden drei Punkte gemeinsam oder zwei und darunter einen lokalen Stützpunkt, so ist sie nicht punktal konvex. Satz II. Ist C eine lokal konvexe Kurve, so ist für jeden zu C fremden Punkt S der Ebene die Zahl $J(S) + (\psi(S)/\pi)$ endlich und konstant (und gleich der Klasse der Kurve). Satz III. Es gilt die Umkehrung von Satz II. Andeutungen zu den Beweisen: (I) Hauptsatz Kontraktionssatz (dies. Zbl. 7, 29, insbesondere S. 29 dieser Arbeit). (II) Die endlich vielen lokalen Stützstellen B_i und entsprechend die Stützhalfgeraden s_i aus S an C werden zyklisch geordnet. Wenn die Drehung von s_i bis $s_{i+1} \leq \pi$ ist, heißt der Teilbogen $C_i = B_i B_{i+1}$ Bogen erster Art; wenn die Drehung $> \pi$ ist, heißt er Bogen zweiter Art. Die Bogen zweiter Art sind konkav bezüglich S . Die Teilbogen C_i sind abwechselnd konvex und konkav bezüglich S . Auf einem C nicht treffenden Weg ändert sich $J(S)$ nicht. Bei (einmaligem) Überschreiten von C vermindert sich entweder $J(S)$ um zwei und erhöht sich dafür $(\psi(S)/\pi)$ um 2, oder es treten zwei neue Stützstellen auf und dafür vermindert sich $(\psi(S)/\pi)$ um 2.

Chr. Pauc.

Valentine, F. A.: Minimal sets of visibility. Proc. Amer. math. Soc. 4, 917—921 (1953).

Die Teilmenge S der Punktmenge T eines n -dimensionalen euklidischen Raumes heißt eine Sichtmenge von T , wenn jeder Punkt t von T einer ganz in T liegenden Strecke \overline{ts} mit $s \in S$ angehört. $S(x)$ bezeichne eine x enthaltende, zusammenhängende, beschränkte abgeschlossene Sichtmenge. 1. Satz: Ist T abgeschlossen und gibt es zu jedem $x \in T$ genau ein minimales $S(x)$, so ist entweder T konvex, oder $\bigcap \{S(x): x \in T\}$ ist ein nichtleeres Kontinuum. 2. Satz: Ist T eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge der Ebene mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $x \in T$ genau ein minimales konvexes $S(x)$ gibt, dann ist T konvex oder ein Sternbereich bezüglich eines einzigen Punktes.

G. Aumann.

Bouligand, Georges: Sur les transformations ponctuelles conservant les aires. *Gaz. Mat., Lisboa* **14**, Nr. 56, 1—4 (1953).

In Betracht gezogen werden topologische, stetig differenzierbare Abbildungen aus einer (x, y) -Ebene in eine (u, v) -Ebene. Ein (verallgemeinertes) Linienelement ds (etwa in der (x, y) -Ebene) sei definiert durch $ds = f(x, y; dx, dy)$, wobei $f > 0$ und $f(x, y; r dx, r dy) = r f(x, y; dx, dy)$ für alle $r > 0$, und entsprechend für gewisse Mengen R ein Flächeninhalt durch $\iint_R a^{-1} dx dy$, unter $a(x, y) = a$ den (elementaren) Inhalt der Indikatrix $f(x, y; \xi, \eta) = 1$ verstanden. Ist etwa $v = g(x, y)$ vorgegeben, so führt die Forderung der Inhaltstreue der Abbildung zur Differentialgleichung $u'_x g'_y - u'_y g'_x = a(u, g)/a(x, y)$; die Bestimmung von u wird geometrisch gedeutet. Sodann werden weitere Möglichkeiten der Gewinnung inhaltstreuer Abbildungen, die Übertragung der Frage auf den Fall nicht-ebener Flächen sowie der Zusammenhang mit der Theorie der additiven Mengenfunktionen besprochen.

Otto Haupt.

Aleksandrov, A. D. und V. V. Strel'cov: Abschätzungen der Länge einer Kurve auf einer Fläche. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **93**, 221—224 (1953) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit schließt sich in den Bezeichnungen und in der Forschungsrichtung eng an frühere Arbeiten an [vgl. Alexandrov, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **63**, 349—352 (1948); dies. Zbl. **38**, 351, 352; **39**, 390]. Die Sätze betreffen durchweg Kurven L , die in einem Flächenstück G beschränkter Krümmung liegen, das mit seinem Umfang p , Durchmesser d und den positiven und negativen Teilen ω^+ und ω^- der Totalkrümmung in die Formeln eingeht. Es lassen sich dann Sätze etwa folgender Art aussprechen: Die Länge s einer Kurve L in einem Gebiet G mit $\omega^+ < 2\pi$ ist durch eine nur von p , σ und ω^+ abhängige Größe beschränkt, wobei die Winkelgröße σ die früher (s. dies. Zbl. **39**, 390) eingeführte „Schlängelung“ der Kurve L bedeutet. Bei $\omega_0 = \omega^+ - \sigma \leq \pi$ gilt z. B. $s \leq p/[1 + \cos(\omega_0/2)]$. Die Beweise dieser und ähnlicher Ungleichungen werden nicht vollständig durchgeführt, sondern es wird das in der Alexandrov-schen Schule übliche Approximationsverfahren skizziert, womit man sie erhält.

W. Burau.

Buck, R. C.: Unique segments in metric spaces. *Amer. math. Monthly* **60**, 100—102 (1953).

Es sei M ein metrischer Raum, in dem die Distanz zwischen den Punkten x, y mit (x, y) bezeichnet wird. Der Verf. sagt, daß ein vollständiger und konvexer Raum M (im Sinne von Menger) „eindeutige Abschnitte gestattet“ („unique segments“), wenn die Menge $[x, y]$, d. h. die Menge aller Punkte p von der Eigenschaft $(x, p) + (p, y) = (x, y)$, einen einfachen Bogen dargestellt. Verf. gibt eine neue hinreichende Bedingung an dafür, daß M die Eigenschaft U. S. (unique segments) besitzt. Zuerst wird der folgende Hilfssatz ausgesprochen. Für jedes Quadrupel von Punkten a, b, c, d besteht die Ungleichung $(ab)^2 + (cd)^2 \leq (ac)^2 + (bd)^2 + 2(bc)[(ab) + (bd)]$. Ersetzt man den Wert in der Klammer durch die nicht größere Zahl (ad) , so braucht die Ungleichung im allgemeinen nicht mehr zu gelten. Nun stellt Verf. folgende Definition auf: „ M besitzt die Eigenschaft Q , wenn für alle Punkte a, b, c, d die Ungleichung

$$(*) \quad (ab)^2 + (cd)^2 \leq (ac)^2 + (bd)^2 + 2(bc)(ad)$$

erfüllt ist.“ Es wird nachher bewiesen, daß die Eigenschaft Q hinreichend für die Eigenschaft U. S. ist. Es stellt sich heraus, daß die euklidischen Räume die Eigenschaft Q besitzen, und zwar besagt das Bestehen des Gleichheitszeichen in (*), daß die Punkte a, b, c, d komplanar sind. Auch manche nichteuklidischen Räume besitzen die Eigenschaft Q . Die Eigenschaft Q kann im Kleinen erfüllt sein, was ihr Vorhandensein im Großen nicht notwendig nach sich zieht (Gegenbeispiel: Kugelfläche). Verf. spricht die Vermutung aus, daß die Eigenschaft Q gewisse Beschränkungen für die Krümmung des Raumes erzwingt. St. Golab.

Beckman, F. S. and D. A. Quarles jr.: On isometries of Euclidean spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 810—815 (1953).

Es wird bewiesen: Eine Punktabbildung des euklidischen $R_n (n \geq 2)$ auf sich, die je zwei Punkte mit dem Abstand a ($a > 0$, fest vorgegeben) in Punkte

desselben Abstandes überführt, ist eine Bewegung. (Für $n = 1$ ist dieser Satz nicht richtig.) Zum Beweis setzt man $a = 1$ und zeigt für $n = 2$ der Reihe nach: Die Abbildung ist eindeutig, sie erhält die Abstände $A \cdot 2^{-B}$ (A, B ganzzahlig), sie ist stetig. Entsprechend für $n = 3$. Hier zeigt man ferner: Einheitskreise und deren Mittelpunkt gehen in Einheitskreise und deren Mittelpunkt, Ebenen gehen in Ebenen über. M. Barner.

Hadwiger, Hugo: Über additive und schwachstetige Polyederfunktionale. Verhdt. Schweizer. naturforsch. Ges. 132. Versammlung, Bern 1952, 101—102 (1953).

Henstock, R. and A. M. Macbeath: On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 182—194 (1953).

Der Hauptsatz der Brunn-Minkowskischen Theorie konvexer Mengen ist von L. Lusternik auf beliebige meßbare Mengen erweitert worden (dies. Zbl. 12, 272). Verff. machen auf Versehen in jener Arbeit aufmerksam und geben hier einen strengen Beweis für die Sätze von Lusternik: 1) A, B seien zwei nicht leere meßbare Mengen im euklidischen E_n : μ, μ_*, μ^* sei das n -dimensionale Lebesguesche, das innere bzw. äußere Maß, $A(A) = [\mu(A)]^{1/n}$. Dann ist $A_*(A + B) \geq A(A) + A(B)$. Ist $\mu_*(A) > 0$, so gilt sogar $A_*(A + B) \geq A_*(A) + A(\bar{B})$, wobei \bar{B} die abgeschlossene Hülle von B ist. Ist $\mu^*(A) > 0$, so ist $A^*(A + B) \geq A^*(A) + A(\bar{B})$. 2) Im Falle des Gleichheitszeichens in der ersten Ungleichung in 1) und für $0 < \mu(A) \cdot \mu(B) < \infty$ ist $\mu[H(A) \cap A'] = \mu[H(B) \cap B'] = 0$ und die konvexen Hüllen $H(A)$ und $H(B)$ sind homothetisch. Diese beiden Eigenschaften sind für jenes Gleichheitszeichen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. 3) Für $\mu(A) = 0$ und $0 < \mu(B) < \infty$ ist für das Gleichheitszeichen notwendig und hinreichend, daß A nur aus einem Punkt besteht. — W. Süss.

Rešetnjak, Ju. G.: Eine Extremalaufgabe aus der Theorie der konvexen Kurven. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 6 (58), 125—126 (1953) [Russisch].

Gegeben seien eine ebene Minkowski-Metrik und diejenige konvexe zentral-symmetrische Kurve K , die die Rolle des Einheitskreises bezüglich dieser Metrik spielt. Durch äußerst einfache Überlegungen (Betrachtung gewisser K einbeschriebener Sechsecke und umbeschriebener Vierecke) wird gezeigt, daß für die Minkowskilänge π_M von K gilt: $3 \leq \pi_M \leq 4$, wobei diese Schranken nicht verbessert werden können. W. Burau.

Grotmeyer, Karl-Peter: Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel. Arch. der Math. 4, 230—233 (1953).

Es wird gezeigt: Auf einer Eifläche, die keine Kugel ist, ist die mittlere Krümmung niemals eine monoton-abnehmende Funktion des Stützabstands P . Als Hilfsmittel wird ein Integralsatz verwendet: $\int (H^2 - K) P \, d\sigma = \frac{1}{4} \int g^{ik} H_k (x^2)_i \, d\sigma$. W. Blaschke.

Eggleston, H. G.: On Rado's extension of Crum's problem. J. London math. Soc. 28, 467—471 (1953).

An ein Ergebnis von Besicovitch anschließend hat R. Rado (dies. Zbl. 30, 265) gezeigt, daß zu jeder natürlichen Zahl $k \leq \frac{1}{2}(n+1)$ eine unendliche Folge von nicht übereinandergreifenden konvexen Polycopen im R_n so angegeben werden kann, daß je k Polytope der Folge einen $(n-k+1)$ -dimensionalen Durchschnitt besitzen. Es wird hier gezeigt, daß im Falle $k \geq \frac{1}{2}(n+1)$ höchstens $n-2$ Polytope mit der obigen Eigenschaft existieren. L. Fejes Tóth.

Zalgaller, V. A.: Über ein notwendiges Kriterium der dichtesten Lagerung von Figuren. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 4 (56), 153—162 (1953) [Russisch].

Gesucht wird dasjenige rechtwinklige Parallelogramm vom kleinstmöglichen Inhalt, in das eine endliche Anzahl von vorgegebenen (nicht unbedingt konvexen) Scheiben eingelagert werden kann. Es wird mit Hilfe mechanischer Betrachtungen eine notwendige Bedingung angegeben, die das extremale Parallelogramm in mehreren interessanten Sonderfällen eindeutig bestimmt. L. Fejes Tóth.

● **Fejes Tóth, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.** (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LXV.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. X, 197 S. mit 124 Abb.

Es ist eine ganz besonders bunte und anziehende Geometrie der Figuren der elementaren Räume, des gewöhnlichen Raumes, der Ebene und der Kugeloberfläche, der Verf. in seiner Arbeit seit über einem Dezennium verpflichtet blieb und die er durch seine zahlreichen Resultate außerordentlich bereichert hat. Insbesondere sind es Extremalprobleme, welche sich bei Lagerungen, Überdeckungen und Zerlegungen in diesen Räumen aufdrängen, und die trotz ihres elementargeometrischen Habitus nur zum kleinen Teil schulmäßig angegangen werden können; viele dieser Fragen sind auch heute noch ungeklärt. Mit dem vorliegenden Buch ist erstmals eine Zusammenfassung der mannigfaltigen einschlägigen Studien geschaffen und so in der äußeren Einheit einer Gesamtdarstellung ein neues Sachgebiet geschaffen worden. — Dieses bildet in gewissem Sinne eine Erweiterung der klassischen Lehre der regulären Punktsysteme, der regelmäßigen Figuren und regulären Körper, der gesetzmäßigen Raumteilungen und der geometrischen Kristallographie in den umfassenderen Bereich des Regellosen. Allerdings erweist sich in vielen Fällen wieder das Regelmäßige als extreme Lösung gewisser Probleme im übergeordneten Bezirk des Unregelmäßigen. Oft sind die Schwierigkeiten noch nicht restlos überwunden, aber gerade die zahlreichen erörterten Vermutungen und erwogenen Indizienbeweise vermögen einen ganz besonderen Anreiz und lebhaften Anregung zu eigenem Suchen und Finden zu vermitteln. — Man kann überzeugt sein, daß dieses Werk über neuzeitliche Elementargeometrie viele Freunde gewinnt. Höhere Kenntnisse sind für Verständnis und Mitarbeit in diesem Gebiet in der Regel nicht erforderlich. In vielen Fällen dürften solche auch nicht viel nützen; meistens sind es individuell erfundene Konstruktionen, welche weiterhelfen. Die ansprechende Ausstattung des Buches, das eine übersichtliche Stoffgliederung aufweist und mit über hundert sorgfältig gezeichneten und suggestiv wirkenden Figuren versehen ist, darf besonders hervorgehoben werden. Am Schlusse der Kapitel befinden sich geschichtliche Anmerkungen, welche dem Nachschlagenden eine willkommene Führung durch die Spezialliteratur ermöglichen. — Die sieben Teile des Buches (mit stichwortmäßiger Wiedergabe ausgewählter Einzelheiten): I. Einige elementargeometrische Sätze: Mit ebenen konvexen Bereichen werden insbesondere die konvexen Polygone betrachtet und elementare Beweise der Ungleichung von Lhuilier gegeben; die Bonnesesche Ungleichung $L^2 - 4\pi F > (L - 2\pi r)^2$ (F und L Flächeninhalt und Umfang, r Inkreisradius) ergibt sich im Zuge der Beweisführung nach der Methode der inneren Parallelbereiche. In der räumlichen Geometrie wird der Eulersche Polyedersatz abgeleitet; ferner werden die regulären und halbregulären Polyeder besprochen und in einer Tafel zusammengestellt. II. Sätze aus der Theorie der konvexen Körper: Der Auswahlatz von Blaschke wird für Eibereiche bewiesen. Einige Grundtatsachen der Integralgeometrie in der Ebene werden skizziert. Ergebnisse von Dowker und Sas, wonach z. B. im Falle, daß T den Flächeninhalt eines Eibereichs bzw. T_n denjenigen eines größten einbeschriebenen n -Ecks bezeichnet, die Ungleichung $T_n/T \geq (n/2\pi) \sin(2\pi/n)$ besteht; Gleichheit gilt für Ellipsen. Enthält ein n -Eck vom Flächeninhalt T einen Eibereich vom Affinumfang λ , so gilt $\lambda^3 \leq \pi T n^2 \sin^2(\pi/n)$. III. Lagerungs- und Überdeckungsprobleme in der Ebene. Die Dichte eines Bereichssystems ist wie üblich definiert als der im Mittel auf die Flächeneinheit der Ebene entfallende Flächeninhalt der dem System angehörenden Bereiche (Existenz eines Grenzwertes vorausgesetzt). Für die Dichte d eines Systems beliebig angeordneter, aber nicht übereinandergreifender kongruenter Kreise gilt $d \leq \pi/\sqrt{12} = 0.906 \dots$; für die Dichte D eines Systems kongruenter Kreise, welche die Ebene vollständig überdecken, ergibt sich dagegen $D \geq \pi/\sqrt{27} = 1.209 \dots$; in beiden Fällen besteht Gleichheit für die regulären Kreisanordnungen. Verf. behandelt analoge Fragen auch bei Zulassung inkongruenter Kreise. IV. Packungs- und Deckungswirtschaftlichkeit einer Scheibenfolge: Die Gesamtheit der Eibereiche, die aus einem vorgegebenen durch die Translationen einer ebenen Gittergruppe hervorgehen, heißt Bereichsgitter. Dieses wird separiert genannt, wenn die Gitterbereiche nicht übereinander greifen; wird die Ebene dagegen vollständig überdeckt, so handelt es sich um ein Deckgitter. Ist d die Dichte eines dichtesten separierten Gitters, das sich mit einem fest vorgegebenen Eibereich erzeugen läßt, so gilt $d \geq 2/3$, und Gleichheit wird nur für das Dreieck erreicht. Ist D dagegen die Dichte eines dünnsten Deckgitters, so gilt analog $D \leq 3/2$, wobei wieder Gleichheit für das Dreieck steht. Diese Ergebnisse von Fary zeigen die Eigenschaft des Dreiecks, extremstes Gegenstück zu einem Pflasterbereich ($d = D = 1$) zu sein. Für zentralsymmetrische Bereiche ergeben sich Verschärfungen. So gilt $D \leq \pi/\sqrt{27}$, wobei Gleichheit für Ellipsen beansprucht wird. Wie Reinhardt und Mahler entdeckt haben, ist dagegen beim dualen Problem des schlechtesten dichtesten separierten Gitters nicht die Ellipse extremal, sondern wahrscheinlich ein mit Hyperbelbögen abgerundetes Achteck. Nach dieser Vermutung gilt $d \geq (9 - \sqrt{32} - \ln 2)/(\sqrt{8} - 1) = 0.902 \dots$. Verf. betrachtet noch Überdeckung und Lagerung mit zerstückelten Scheiben. V. Extremaleigenschaften der regulären Polyeder: Hilfszahl $\omega_n = n\pi/(6n - 12)$; sind auf der Kugelfläche $n \geq 3$ kongruente Kugelkappen eingelagert, so gilt für

Die Dichte $D \leq (2 - \operatorname{cosec} \omega_n) n/4$. Ist die Kugel­fläche dagegen durch $n \cdot 3$ Kugelkappen überdeckt, so gilt $D \geq (3 - \operatorname{ctg} \omega_n) n/3$. Für die Radien r und R der Minimalkugel­schale eines konvexen Polyeders mit n Ecken oder n Seiten­flächen gilt $R/r \geq 1/3 \operatorname{tg} \omega_n$. Für das Volumen eines konvexen Polyeders mit n Seiten­flächen, das eine Einheitskugel umschließt, gilt $V \geq (n-2)(3 \operatorname{tg}^2 \omega_n - 1) \sin 2\omega_n$. Wird dagegen ein konvexes Polyeder mit n Ecken von einer Einheitskugel umschlossen, so gilt $V \leq \frac{1}{6}(n-2)(3 - \operatorname{ctg}^2 \omega_n) \operatorname{ctg} \omega_n$. Analoge schärfere Ungleichungen bei vorgegebener Ecken-, Flächen- und Kantenzahl, wobei ein Teil der Aussagen wohl sehr plausibel gemacht, aber noch nicht streng bewiesen werden konnte. Ein hübsches Resultat ist durch $R/r \geq \operatorname{tg}(\pi/p) \operatorname{tg}(\pi/q)$ gegeben, wo $p = 2k/f$ und $q = 2k/e$ die durchschnittliche Seitenzahl der Flächen und die durchschnittliche Kantenzahl der Ecken bezeichnen; Gleichheit besteht für die regulären Polyeder. Als Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe n -Fläche gilt $F^3/V^2 \geq 54(n-2) \operatorname{tg} \omega_n (4 \sin^2 \omega_n - 1)$, wo das Gleichheitszeichen von den regulären Dreikantspolyedern beansprucht wird. Der Fall des Ikosaeders ist noch ungeklärt, doch gibt es starke Indizien dafür, daß sich auch in diesem Fall die diesbezügliche Vermutung Steiners bestätigt. Einen vollkommenen Abschluß des Problems würde der noch ausstehende Nachweis der Ungleichung $F^3/V^2 \geq 9k \sin(2\pi/p) \operatorname{tg}^2(\pi/p) \operatorname{tg}^2(\pi/q) - 1$ geben, wobei Gleichheit für alle regulären Polyeder besteht. Besitzt ein konvexes n -Flach der Oberfläche F inhaltsgleiche Seiten­flächen, so gilt für die Gesamt­länge L aller Kanten $L^2 \geq 6(n-2) \operatorname{tg} \omega_n F$; Gleichheit besteht nur für die regulären Dreikantspolyeder. VI. Irreguläre Lagerungen auf der Kugel: Gesucht wird eine Anordnung von n Punkten auf der Einheitskugel, für welche der kleinste Wert der sphärischen Distanzen der Punktepaare den größtmöglichen Wert a_n annimmt. Die niedrigsten nichttrivialen Fälle $n = 7, 8$ und 9 werden nach den neuerdings von Schütte und van der Waerden mit Erfolg angewendeten Methoden bearbeitet, wobei die Resultate $\cos a_7 = \operatorname{ctg} 80^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ$, $\cos a_8 = 1/8 - 1/7$ und $\cos a_9 = 1/3$ zu vermerken sind. Für $n = 9$ ist die extremale Punktverteilung nur für $n = 12$ bekannt; sie ist durch die Eckpunkte des Ikosaeders realisiert. In den Fällen $n = 8$ und $n = 20$ werden die extremalen Punktverteilungen nicht durch die entsprechenden regulären Polyeder realisiert, was von Rutishauser durch Konstruktion besserer Verteilungen bewiesen wurde. Für $n = 20$ hat van der Waerden auch die zweite Rutishausersche Verteilung weiter verbessert. Merkwürdig ist noch die Feststellung, daß $a_5 = a_6$ und wahrscheinlich auch $a_{11} = a_{12}$ ist. Mit dem Nachweis, daß $a_{13} < 60^\circ$ ausfällt, haben Schütte und van der Waerden kürzlich das Problem der 13 Kugeln gelöst, womit entschieden ist, daß 13 Kugeln nicht eine mit ihnen kongruente von außen berühren können, ohne sich zu durchdringen. VII. Lagerungen im Raum: Sind im Raum in beliebiger Weise kongruente Kugeln eingelagert, so gilt für die Dichte D vermutlich $D \leq \pi/18 = 0,740 \dots$, wobei das Gleichheitszeichen beispielsweise für die dichteste gitterförmige Kugelpackung besteht, wo die Kugelmittelpunkte ein flächenzentriertes Würfelgitter bilden. Es konnte bis heute noch nicht gezeigt werden, daß die regelmäßige Lagerung nicht durch eine regellosere, aber dichtere übertroffen wird. Immerhin konnte der Verf. den Schätzungen von Blichfeldt und Rankin $D < 0,828 \dots$ die bedeutende Verschärfung $D < 0,754 \dots$ gegenüberstellen, die dem idealen Ziel bereits recht nahe kommt. Allerdings kann er hierfür zunächst nur einen „zwar nicht ganz exakten, aber von einem gewissen Standpunkt aus doch ziemlich befriedigenden Beweis“ vorlegen.

H. Hadwiger.

Karlin, S. and L. S. Shapley: Geometry of moment spaces. Mem. Amer. math. Soc. 12, 93 S. (1953).

Die Theorie der Verteilungsfunktionen und ihrer Momente sowie der zugehörigen Orthogonalpolynome wird hier auf dem Weg über die konvexen Körper entwickelt. Einleitend werden die einschlägigen Sätze über konvexe Körper – meist mit Beweisen – zusammengestellt; die Dimensionscharaktere der Randpunkte und die Dualität werden besonders beachtet. Der n -dimensionale Momentenraum D^n ist die konvexe Hülle des Einheitsbogens $0 \leq t \leq 1$ der Normkurve $x_i = t^i$ ($i = 1, \dots, n$); dual dazu ist der Polynomraum P^n der in $[0, 1]$ nicht negativen, durch $\int_0^1 P(t) dt = 1$ normierten Polynome bis zum Grade n . Beide konvexen Körper werden mit der vorher bereitgestellten Mitteln genau untersucht. Ein hübsches Ergebnis ist: Jedes nicht „extreme“ (insbesondere jedes innere) Polynom aus P^n läßt genau eine Darstellung

$$\alpha \prod_{j=1}^m (t - t_{j-1})^2 + \beta t(1-t) \prod_{j=1}^{m-1} (t - t_j)^2 \quad (n = 2m),$$

$$\alpha t \prod_{j=1}^m (t - t_j)^2 + \beta(1-t) \prod_{j=1}^m (t - t_{j-1})^2 \quad (n = 2m+1)$$

mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq 1$ zu. Ferner findet man die Parameterdarstellung von D^n , die bei $n = 2$ und $n = 3$ besagt, daß die Sehnen durch einen Endpunkt des Einheitsbogens

bzw. die Sehnen des Einheitsbogens überhaupt D^n einfach bedecken. Sie erlaubt es, den Inhalt von D^n zu $\prod_{k=1}^n \Gamma(k)^2 \Gamma(2k)$ zu berechnen. Das Schmiegsimplex S^n des Einheitsbogens und sein duales Gegenstück werden eingeführt und ihre bemerkenswerten Beziehungen zu den Körpern D^m und P^m ($m = n$ oder $\neq n$) erörtert. Die Zugehörigkeit eines Punktes zu D^n wird durch Determinantenungleichungen ausgedrückt, die den semidefiniten Charakter quadratischer Formen aussagen: die bekannten Bedingungen dafür, daß eine Zahlenfolge die Momentenfolge einer Verteilungsfunktion ist. Eine solche Verteilungsfunktion wird explizit dargestellt. Dabei benutzte Determinantenausdrücke liefern auch die zur Verteilungsfunktion gehörigen Orthogonalpolynome und Aussagen über diese. Schließlich wird die durch $t \rightarrow 1 - t$ gegebene Symmetrie des Einheitsbogens in ihrer Auswirkung auf die Punkte des Momentenkörpers D^n untersucht.

H. Kneser.

● Vidal Abascal, E.: Über die Grundlagen der Integralgeometrie. Mem. Real Acad. Ci. exact., fis. nat. 4, Nr. 4. Madrid: 1953. 29 p. [Spanisch].

Es werden einige Sätze über geodätische Linien auf einer Fläche hergeleitet, die sich aus bekannten Formeln der Variationsrechnung ergeben. W. Blaschke.

Frostman, Otto: A theorem by Fáy with elementary applications. Nordisk mat. Tidskrift 1, 25–32 und engl. Zusammenfassg. 64 (1953) [Schwedisch].

Ein Dreieck ABC im Raum habe bei A den Winkel α . Man projiziert diesen Winkel auf die Tangentenebene im Punkt S der Einheitskugel und integriert das Resultat $\alpha'(S)$ über alle S . Es gilt $\int \alpha' S = 4\pi\alpha$. Dieser (typisch integralgeometrische) Satz von I. Fáy (dies. Zbl. 37, 236, insbesondere S. 113 dieser Arbeit) wird benutzt, um elementare Sätze (insbes. Ungleichungen) der Raumgeometrie auf neue Weise herzuleiten.

W. Maak.

Topologie:

Sonner, H.: Die Polarität zwischen topologischen Räumen und Limesräumen. Arch. der Math. 4, 461–469 (1953).

Die Arnoldschen Ergebnisse zum Birkhoffschen Problem 20 (dies. Zbl. 44, 194) erfahren hier unter Verwendung des Filterbegriffes (an Stelle der gerichteten Mengen) eine klare Abrundung. In einer Menge T werden betrachtet einerseits Systeme \mathfrak{G} von Teilmengen von T , andererseits Mengen \mathfrak{N} von Paaren (\mathfrak{G}, a) , wo \mathfrak{G} einen Filter und a einen Punkt in T bezeichnen. Erfüllt \mathfrak{G} die Axiome der „offenen Mengen“, so ist $(T; \mathfrak{G})$ topologischer Raum, genügt \mathfrak{N} den Axiomen der „konvergenten Filter“, so ist $(T; \mathfrak{N})$ ein Limesraum. Es läßt sich jedem beliebigen System \mathfrak{G} eine die Limesraumaxiome erfüllende Menge \mathfrak{N} , und jeder beliebigen Menge \mathfrak{N} ein die Axiome des topologischen Raumes erfüllendes System \mathfrak{G} zuordnen. Diese Zuordnungen sind dann und nur dann zueinander reziprok, wenn der Ausgangspunkt $(T; \mathfrak{G})$ bzw. $(T; \mathfrak{N})$ bereits ein topologischer bzw. ein Limesraum ist. Wenn dabei speziell $(T; \mathfrak{G})$ ein separierter topologischer Raum (d. h. mit Hausdorffschem Trennungsaxiom) ist, so ist das zugeordnete $(T; \mathfrak{N})$ ein separierter Limesraum (d. h. mit Eindeutigkeit des Limes), und umgekehrt.

G. Aumann.

Wada, Junzo: Lattices and spaces. Osaka math. J. 5, 1–12 (1953).

The author considers a fixed set of points X and all the closure operations defined in X . The set X with a closure operation is called a space if $0 = 0$ and $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$. If moreover $M \subset M$ for each subset M , then X is called a space with additive topology. The author examines the lattices L , L_A , L_T of all spaces, of all spaces with additive topology, and of all topological spaces respectively (all the spaces have the same basic set of points X). The typical results are: Every space in L is the join of two compact spaces in L . Every space in L is the meet of two T_0 -spaces in L . Every T_1 -space is the join of two compact T_1 -topological spaces. Every T_1 -topological space is homeomorphic to the diagonal of the Cartesian product of two compact T_1 -topological spaces. The subject of the last section of the paper is the study of I -spaces and C -spaces. A space R is called an I -space if all convergent sequences $x_n \in R$ are trivial (i. e. $x_n = \text{const.}$ for $n > n_0$). A space is said to be a C -space if each infinite subset contains the closure of an infinite subset.

R. Sikorski.

Geymonat, Ludovico: Analisi della validità degli assiomi di separazione in uno spazio non- T . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 262–264 (1953).

Es soll ein Raum angegeben werden, der die Trennungsaxiome T_2 und T_4 ,

nicht aber T_1 und T_3 erfüllt. Dies ist, wenn man die gewohnte, hier nicht gegebene Definition von Berührungspunkt (vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, p. 30 unten, Topologie, Bd. I, Berlin 1935, dies. Zbl. 13, 79) voraussetzt, in der hier wie l. c. gegebenen Formulierung von T_1 und T_2 zumindest für diese T -Axiome nicht möglich.
G. H. Müller.

Michael, Ernest: A note on paracompact spaces. Proc. Amer. math. Soc. 4, 331—338 (1953).

L'A. démontre d'abord un critère pour qu'un espace régulier E soit paracompact, qui est plus faible que la définition des espaces paracompacts: il suffit que tout recouvrement ouvert de E admette un recouvrement plus fin, qui soit réunion dénombrable de familles localement finies d'ensembles ouverts. Il en déduit d'abord, pour les espaces réguliers, l'identité des espaces paracompacts et des espaces „strongly screenable“ de R. Bing (ce Zbl. 42, 413); d'autre part le critère de métrisabilité de Nagata-Smirnov, joint au théorème de l'A., donne une nouvelle démonstration du th. de A. Stone affirmant que tout espace métrisable est paracompact. Enfin, l'A. déduit encore de son résultat principal l'intéressante proposition sur les sous-espaces et espaces produits d'espaces paracompacts: il montre par exemple que tout F_σ dans un espace paracompact est paracompact, ainsi que le produit d'un espace paracompact et d'un espace régulier réunion dénombrable d'ensembles compacts.
J. Dieudonné.

Papy, Georges: Sur les compactifications d'Alexandroff. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 937—941 (1953).

Verf. zeigt, daß, im Unterschied zu den lokal kompakten Hausdorffschen Räumen, die Topologie eines kompaktifizierten Fréchet'schen Raumes nicht eindeutig bestimmt ist. (Kompakt bedeutet hier bikompakt im Sinne von Alexandroff-Hopf, Topologie, Bd. I, Berlin 1935, dies. Zbl. 13, 79.) G. H. Müller.

Novák, Josef: Über die bikompakte Hülle einer isolierten abzählbaren Menge. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. I.—18. I. 1953, 280—283 (1953).

Mittels der bekannten Čech'schen Bikompaktisierung $\beta(S)$ eines vollständig regulären Raumes S wird die Lösung einiger topologischen Probleme angegeben. 1. Das cartesische Produkt zweier kompakten Räume braucht nicht kompakt zu sein [vgl. J. Novák, Fundam. Math. 40, 106—112 (1953)]. 2. N. N. Luzin hat (dies. Zbl. 29, 347) einige Probleme bezüglich orthogonaler Mengensysteme und auf- oder absteigender Mengenfolgen gestellt. Es wird hier eine neue Formulierung dieser Probleme gegeben, und hinreichende Bedingungen für ihre Lösbarkeit werden aufgestellt. 3. Wenn ein topologischer Raum R die Eigenschaft hat, daß jede auf R stetige Funktion beschränkt ist, so wird gezeigt, daß R nicht notwendig kompakt ist.
A. van Heemert.

Padmavally, K.: On a characterization of minimally bicom pact spaces. Corrections and additions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 143—149 (1953).

The theorem (i) of the earlier paper (this Zbl. 47, 162) is corrected now, to show that the condition given there is only necessary: an example is given of a T_1 -bicom pact space which is not minimally bicom pact though it satisfies the condition. An example of a T_1 -bicom pact space in which all points do not have a convergence character makes it necessary to add „Hausdorff“ to „bicom pact space“ in line 10 of page 1 of that earlier paper. It is now shown, however, that every bicom pact space has at least one point with convergence character and also that by suitable weakening of the topology one can get a bicom pact space in which each point has a convergence character.
V. S. Krishnan.

Krishnan, V. S.: On uniconvergence spaces. J. Madras Univ., Sect. B 23, 174—181 (1953).

The author introduces, after a recapitulation of some of the main properties of spaces with uniform structure in the sense Bourbaki, the concept of a uniconvergence in a set R

over a directed set D (order relation „ $<$ “). By a convergence in R over D is meant a pair $\{x(d), x\}$ of a function $x(d)$ of D in R and a point $x \in R$. It is said that $x(d)$ converges to x in this case. If, then, a family $C(D)$ of such convergences is given, this family is said to be a uniconvergence if, putting $x(d) \rightarrow x, C(D)$, to signify that the convergence $\{x(d), x\}$ belongs to $C(D)$, C_1 : $x(d) = x$ (for all $d \in D$ and each fixed $x \in R$) implies $x(d) \rightarrow x, C(D)$; C_2 : if r maps D in D such that $d < r(d)$ and $x(d) \rightarrow x, C(D)$, then $y(d) \rightarrow x, C(D)$, where $y(d) = x(r(d))$; C_3 : a mapping $s D \subset D$ exists such that, for any $x, y \in R$, if y is near x of order $s(d)$, then x is near y of order d (where it is said that z is near w of order d' , if there is a $w(d) \rightarrow w, C(D)$, with $z = w(d')$); C_4 : a mapping $t D \subset D$ exists such that for any functions $x(d), x_a(e)$ of D in R and any $x \in R$, the relations $x_a(e) \rightarrow x(d), C(D)$, for each $d \in R$ and $x(d) \rightarrow x, C(D)$, imply $x_{a(a)}(t(d)) \rightarrow x, C(D)$. — The uniconvergence is called normal, if further C^* : when $x(d) \in R$ is close to x of order d , for each $d \in D$, then $x(d) \rightarrow x, C(D)$. — The independence of C_1 — C_4 is proved. A uniconvergence in the above sense determines a topology in R if the closure of $A \subset R$ is taken to consist of the limits x of convergences $x(d) \rightarrow x, C(D)$, for which $x(D) \subset A$. It is shown that starting from one of the notions of uniconvergence and of uniform structure, the other one can be defined in terms of the first and that both determine the same topology in R . It is, further, shown that a uniconvergence is equivalent to a normal uniconvergence. Finally, it is stated that a Hausdorff uniconvergence space is metrisable if, and only if, there is an equivalent uniconvergence over the ordered set of positive integers. *A. van Heemert.*

Nagata, Jun-iti: On relations between lattices of finite uniform coverings of a metric space and the uniform topology of the space. *J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A.* **4**, 35—41 (1953).

A method used in an earlier paper by the author to characterise complete uniform spaces by certain lattices of uniform coverings is utilised here to characterise complete metric spaces and completions of metric spaces by certain lattices of finite uniform coverings. For a complete metric space R we denote by $L(R)$ a lattice of finite uniform coverings of R (ordered by the relation of one covering being a refinement of the other) which is a basis for the family of all finite uniform coverings and which contains, for any pair of disjoint open sets U, V , a covering containing U but not V (if $V \neq \emptyset$). The space R is shown to be uniformly homeomorphic with a space consisting of equivalent Cauchy sequences of μ -ideals of $L(R)$ maximal with respect to the property of not containing a certain element of $L(R)$. The definition of these Cauchy sequences and their equivalence involves only the lattice structure of $L(R)$, and hence this lattice characterises R upto a uniform homeomorphism. In case R is not complete such a lattice characterises the completion of R upto uniform homeomorphism. Two minor corrections seem called for: on page 35, the 2nd line from below: for „ $\mu' \supseteq \mu''$ “ read „ $\mu' \not\supseteq \mu''$ “; and correct the spelling of the name „Cauchy“ which is rendered „Chauchy“ right through.

V. S. Krishnan.

Mrówka, S.: Solution d'un problème d'Urysohn concernant les espaces métriques universels. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **1**, 233—234 (1953).

Ein metrischer Raum E heißt universal für eine Klasse K metrischer Räume, wenn jeder Raum $R \in K$ mit einer Untermenge $R' \in E$ isometrisch ist. Ein metrischer Raum E heißt homogen in bezug auf eine Klasse K seiner Untermengen, wenn es für beliebige isometrische Mengen $A, B \in K$ eine Isometrie f gibt, so daß $f(E) = E$ und $f(A) = B$. — Es wird bewiesen, daß jeder Raum E , der für die Klasse aller abzählbaren Räume universal ist und in bezug auf die Klasse aller abzählbaren Untermengen homogen ist, nicht separabel ist. Der Urysohnsche separable Raum [P. Urysohn, *Bull. Sci. math., II. Sér.* **51**, 1—38 (1927)], der für die Klasse aller separablen, metrischen Räume universal ist und in bezug auf die Klasse endlicher Untermengen homogen ist, ist also nicht homogen in bezug auf die Klasse der abzählbaren Untermengen. Diese Bemerkung ist die Antwort auf ein Problem von Urysohn.

R. Sikorski.

Noguchi, Hiroshi: A generalization of absolute neighborhood retracts. *Kōdai math. Sem. Reports* **1953**, 20—22 (1953).

Der Relativraum $B \subset A$ heißt ε -Retrakt des metrischen A , falls es für jedes $\varepsilon' > 0$ eine solche stetige Abbildung $r_{\varepsilon'}$ von A in B gibt, so daß die Entfernung zwischen b und $r_{\varepsilon'}(b)$ für alle $b \in B$ kleiner als ε' ist. ε -Umgebungsretrakt von A heißt B , falls es ein in A offenes U gibt derart, daß $B \subset U$ und B ε -Retrakt von U ist. Bekannte Sätze von Borsuk werden verallgemeinert, z. B. besitzt jeder ε -absolute Retrakt die Fixpunkt-Eigenschaft.

T. Ganea.

Homma, Tatsuo and Shin'ichi Kinoshita: On the regularity of homeomorphisms of E^n . *J. math. Soc. Japan* 5, 365—371 (1953).

The homeomorphism $h: X \rightarrow X$ (X compact and metric) is called regular at $p \in X$ if for each $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ exists such that for each $x \in X$, $d(p, x) < \delta$, for each integer m it is true that $d(h^m(p), h^m(x)) < \varepsilon$. It is proved that h is regular at every $p \in X$ if two points $a, b \in X$ exist such that for $m = 1, 2, \dots$ the sequence $\{h^m(x)\}$, $x \in X - b$, converges to a and the sequence $\{h^{-m}(x)\}$, $x \in X - a$ converges to b . As corollaries, similar theorems for homeomorphisms of the n -dimensional sphere and of E^n (n -dimensional euclidian space) are proved. Defining, for a continuous mapping $f: X \subset X$ (X separable and metric), $P(f)$ as the set of all those $x \in X$ for which $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ is everywhere dense in X and $Q(f) = X - P(f)$, it is proved that $Q(f)$ is everywhere dense in X provided X is locally compact and non compact.

A. van Heemert.

Kinoshita, Shin'ichi: A solution of a problem of R. Sikorski. *Fundamenta Math.* 40, 39—41 (1953).

The author gives an example of two compact 0-dimensional sets A and B such that: 1) A is not homeomorphic to B , 2) A is homeomorphic to an open subset of B , and B is homeomorphic to an open subset of A . This example which is the solution of a problem of the reviewer [*Colloq. Math.* 1, 242 (1947)], is a modification of Kuratowski's (this *Zbl.* 39, 401) example of two 1-dimensional compact sets with an analogous property. — The classes \mathfrak{A} and \mathfrak{B} of all open-closed subsets of A and B respectively are examples of two Boolean algebras such that: 1) \mathfrak{A} is not isomorphic to \mathfrak{B} , 2) \mathfrak{A} is isomorphic to a principal ideal of \mathfrak{B} , and \mathfrak{B} is isomorphic to a principal ideal of \mathfrak{A} .

R. Sikorski.

Tumarkin, L. A.: Über rationale eindimensionale Kompakta. *Vestnik Moskovsk. Univ.* 8, Nr. 8 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 5), 73—78 (1953) [Russisch].

Eine Menge M heißt homogen rational, wenn $\dim(M - A) < \dim M$ für jede abzählbare dichte Untermenge A . Eine Menge M heißt inhomogen rational, wenn sie zwei dichte abzählbare Untermengen A_1, A_2 enthält derart, daß $\dim(M - A_1) = \dim M > \dim(M - A_2)$. Eine Menge M heißt irrational, wenn $\dim(M - A) = \dim M$ für jede abzählbare Untermenge A . — Sei K ein eindimensionales Kompaktum. Es wird bewiesen, daß K dann und nur dann homogen rational ist, wenn K kein nirgends dichtes Kontinuum enthält. K ist inhomogen rational dann und nur dann, wenn 1) K ein nirgend dichtes Kontinuum enthält und 2) es keinen Punkt der Ordnung ϵ gibt. K ist irrational dann und nur dann, wenn K einen Punkt der Ordnung ϵ hat.

R. Sikorski.

Padmavally, K.: An example of a connected irresolvable Hausdorff space. *Duke math. J.* 20, 513—520 (1953).

To construct such an example the author first shows that under the N -topology a T_1 -space which is also an SI -space becomes a MI -space [where the N -topology of a space is obtained by replacing at each point p the neighbourhood system (U) by $((U - L) \cup p)$, where L ranges over the non dense subsets of the space]. An MI -space is constructed which is connected and satisfies the Urysohn separation condition (by characteristic functions of any point from a closed set not containing it). Being MI , the space is irresolvable, and it is a Hausdorff, connected space also. Examples are given to show that a connected, Urysohn SI -space may be locally connected at a single point, or at each point of an isolated set, while a Hausdorff MI -space cannot be locally connected at any point.

V. S. Krishnan.

Strebe, David D.: Irreducibly connected spaces. *Duke math. J.* 20, 551—561 (1953).

A connex (connected Hausdorff space) M is irreducibly connected about a subset A , or shortly is an i -connex about A , if no proper subconnex of M contains A ; if M is an i -connex

about a subset B , but not an i -connex about any proper subset of B , then B is called a basic set for M . This paper considers connexes having a basic set, finite or countable. When p is a point of a basic set B of the connex M , $B(p)$ is defined as the set of points q of B such that no point of M separates p, q ; while $A(p)$ is defined as the set of points of M which cut M between p and $B - p$. Typical results proved are: M is an i -connex about a dense subset D if, and only if, D contains all non-cut points of M ; an i -connex M about A is an i -connex about a proper subset of A if, and only if, A contains some cut-points of M . When p is a point of a basic set B of M , r of B belongs to $B(p)$ only if $B(r) = B(p)$; $M = B$ if $B(p) = B$ for some p in B . $A(p) = 0$ is the necessary and sufficient condition that $M - p$ be an i -connex about $B - p$; and when $A(p) = 0$, $B - p$ is a basic set of $M - p$ if, and only if, no point of $B(p)$ cuts $M - p$. When M has a finite basic set B of n points, $M - p$ is connected if $B(p) = p$ for each p in B . If $n > 1$, then M can be expressed as a sum of $n - 1$ or less subconnexes each of which is an i -connex about two points of B and such that each point of B is a point of irreducibility of at least one of these subconnexes. When the connex M is separable, metric, locally compact and has a countable basic set B , then M is locally connected and any two points of M can be joined by a simple arc in one and only one way; it follows that a continuum with a countable basic set is an acyclic curve.

V. S. Krishnan.

Hamstrom, Mary-Elizabeth: Concerning continuous collections of continuous curves. Proc. Amer. math. Soc. 4, 240—243 (1953).

En complément et généralisation d'un résultat dû à E. E. Moise (ce Zbl. 35, 392) l'A. démontre d'abord que tout compact métrique M , réunion de courbes continues disjointes non toutes dégénérées, [les éléments de M dépendant continuellement d'un paramètre] est nécessairement réductible entre deux quelconques de ses points. Dans le cas particulier où M est situé dans le plan, c'est un domaine fermé; celui-ci étant jordanien si M est localement connexe. — Les démonstrations s'appuient sur un lemme assurant, dans certaines conditions, l'existence d'un continu K , vrai sous-ensemble de M , joignant deux des éléments de celui-ci.

S. Stoilow.

Fáry, István: Sur une nouvelle démonstration de l'unicité de l'algèbre de cohomologie à supports compacts d'un espace localement compact. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 552—554 (1953).

Inhaltsangabe des Verf.: Soit $H(X, A)$ l'algèbre de cohomologie à supports compacts de l'espace (localement compact) X à coefficients dans A . Désignons par $\text{kat}(h)$, $h \subseteq H(X, A)$ le plus petit entier m , tel qu'il existe m fermes F_1, \dots, F_m recouvrant X , et tels que h soit annulé par les homomorphismes naturels $H(X, A) \rightarrow H(F_i, A)$, pour $i = 1, \dots, m$. Dans le cadre de la théorie de J. Leray (ce Zbl. 38, 363) cette fonction peut servir de paramètre d'induction dans la démonstration de l'unicité de $H(X, A)$.

W. Gaschütz.

Čogošvili, G. S.: Über spektral-singuläre Homologiegruppen. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 14, 583—588 (1953) [Russisch].

Hurewicz, Dugundji und Dowker (dies. Zbl. 31, 283) haben singuläre Homologie- und Kohomologiegruppen eines Raumes Y als Limesgruppen gewisser Spektren erklärt. Dabei haben die Homologiegruppen diskrete, die Kohomologiegruppen bikompakte Koeffizientenbereiche. Will man in derselben Weise umgekehrt Homologiegruppen mit bikompakten Koeffizientenbereichen erklären, so stößt man auf ein direktes Spektrum bikompakter Gruppen. Verf. definiert die Limesgruppe dieses Spektrums im Sinne seiner (hier etwas zu verallgemeinernden) Theorie (vgl. z. B. dies. Zbl. 42, 169) als Homologiegruppe mit bikompakten Koeffizienten. Sie ist verallgemeinert-dual zu der entsprechenden Kohomologiegruppe mit diskreten Koeffizienten. Es wird auch der relative Fall betrachtet.

E. Burger.

Nakaoka, Minoru: Note on cohomological operations. J. Inst. Polytechn. Osaka, Ser. A 4, 51—58 (1953).

L'A. établit pour les complexes simpliciaux une théorie axiomatique des carrés de Steenrod (analogue à celle de H. Cartan en théorie des faisceaux), fondée sur un système d'axiomes imposé aux cup- i -produits. L'opération $g_i: H^p(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2p-i}(K; \mathbb{Z})$, $p - i$ impair, définie par Shimada-Uehara, se

rouve décomposé en un cup-carré (appliqué au cocycle mod $2t$ réduit mod 2) suivi de l'homomorphisme de Bockstein $1/2$; utilisant son axiomatique, l'A. tablit à nouveau les formules donnant le Sq^i d'un cup-produit et, chose nouvelle, le carré de Pontrjagin et le carré de Postnikov d'un cup-produit.

R. Thom.

Adem, José: Relations on iterated reduced powers. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 636—638 (1953).

En appliquant un principe de N. E. Steenrod aux puissances réduites étudiées par N. E. Steenrod (ce Zbl. 50, 394, 395), l'A. obtient pour les puissances réduites itérées des relations analogues à celles qu'il a établies pour les carrés de Steenrod. On en déduit une base pour les puissances itérées. Il en résulte aussi que si l'anneau de cohomologie d'un complexe est engendré par les puissances ordinaires d'une classe de cohomologie u , jusqu'à une certaine puissance u^{n-1} (la suivante u^n étant 0), u est de dimension 2^{k+1} ; de plus, $n \leq 3$ si $\dim u \geq 8$. Il résulte de là que, outre les cas déjà connus de sphères fibrées en sphères, le seul cas qui serait possible est celui où $S^{2^{k-1}-1}$ est fibrée en S^{2^k-1} (la base ayant même homologie en coefficients entiers que S^{2^k}).

G. Hirsch.

Griffiths, H. B.: Local topological invariants. Proc. London math. Soc., II. Ser. 3, 350—367 (1953).

Verf. beginnt mit dieser Arbeit eine Untersuchung über lokale Homologie- und Homotopiegruppen, die in weiteren Arbeiten fortgesetzt werden soll. Alle topologischen Räume werden als lokalkompakt, metrisch, separabel vorausgesetzt. Die zu definierenden lokalen Homologie- und Homotopiegruppen des topologischen Raumes M im Punkte q von M sind so beschaffen, daß folgendes gilt: Wenn X ein Polyeder ist und M der Kegel über X mit der Spitze q ist, dann sind die lokalen Homologie- und Homotopiegruppen von M in q mit den entsprechenden Gruppen von X isomorph. Die Definition von lokalen (Homologie- oder Homotopie-) Gruppen erfolgt immer so: Es wird die dreistellige Relation $\mathfrak{R}(M, q, G) [= \text{„}M \text{ at im Punkte } q \text{ die lokale Gruppe } G\text{“}]$ definiert. Dann wird unter gewissen Voraussetzungen über M und q bewiesen, daß es zu M und q (bis auf Isomorphie) genau eine Gruppe G mit $\mathfrak{R}(M, q, G)$ gibt. Hier im Referat soll die Definition von $\mathfrak{R}(M, q, G)$ nur für die lokalen Homologiegruppen angegeben werden. Auf die Frage nach der Existenz von G wird nicht eingegangen, sondern auf die Arbeit selbst verwiesen. Lokale Homologiegruppen: Verf. verwendet die Vietoris'sche Homologietheorie. Der Koeffizientenbereich ist eine feste abelsche diskrete Gruppe, die in den Bezeichnungen weggelassen wird. Für $A \subset B$ wird mit $H_r(A|B)$, ($r \geq 0$), das Bild von $H_r(A)$ in $H_r(B)$ bei der Einbettungsabbildung $i: A \rightarrow B$ verstanden. Mit U, V, \dots werden Umgebungen von q in M bezeichnet. „Überstreichen“ deutet die Hüllenbildung an. \approx bedeutet Isomorphie. „ M hat im Punkte q die lokale Homologiegruppe $\mathfrak{L}_r(q) = G^r$ “ wird durch die folgende Aussage definiert, die Ref. in der Schreibweise des Logikkalküls angibt: $\mathfrak{L}_r(q)$ gibt: $\forall U \forall U_1 (U_1 \subset U \rightarrow \exists V (V \subset U_1 \wedge \forall U_2 (U_2 \subset V \rightarrow H_r(\overline{U_2} - q, \overline{U_1} - q) \approx G))$. (\exists : es gibt, \forall : für alle, \wedge : und, \rightarrow : wenn, so), — Die Definition der lokalen Homotopiegruppen erfolgt analog, nur muß durch zusätzliche Voraussetzungen dafür gesorgt werden, daß die Definition von der Wahl der Basispunkte der Homotopiegruppen unabhängig wird. Verf. beweist ein lokales Hurewicz'sches Theorem.

F. Hirzebruch.

Griffiths, H. B.: A mapping theorem in „local“ topology. J. London math. Soc. 28, 269—278 (1953).

Verf. hat in früheren Arbeiten lokale Homologie- und Homotopiegruppen definiert. Verf. hat zwei verschiedene Definitionen (\mathfrak{L} -Gruppen und \mathfrak{D} -Gruppen) angegeben. Für die \mathfrak{L} -Definition siehe vorsteh. Referat. Die \mathfrak{D} -Gruppen wurden in einer Arbeit eingeführt, die Ref. nicht zugänglich ist. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die lokalen Homotopiegruppen und ist von den anderen Arbeiten unabhängig, da die wesentlichen Definitionen wiederholt werden. Die Definition der lokalen \mathfrak{D} -Homotopiegruppe $\mathfrak{D}_r(q)$ des topologischen Raumes M im Punkte q von M kann hier im Referat nur grob angedeutet werden: Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über M und q ist für „hinreichend kleine“ Umgebungen U_1, U_2, U_3, U_4 von q mit $U_4 \subset U_3 \subset U_2 \subset U_1$, die noch gewisse Bedingungen erfüllen müssen, die Gruppe $\pi_r(U_2 - U_3 | \overline{U_1} - U_4, y)$ isomorph mit $\mathfrak{D}_r(q)$. ($U \subset V$ steht für $U \subset V$). Dabei ist y ein innerer Punkt von $\overline{U_2} - U_3$, und $\pi_r(A|B, y)$ bezeichnet für $y \in A \subset B$ das Bild von $\pi_r(A, y)$ in $\pi_r(B, y)$ bei der Einbettung $i: A \rightarrow B$. — Das Hauptergebnis der Arbeit ist folgender Satz, der ein Analogon des Satzes darstellt, daß Räume von gleichen Homotopietyp isomorphe Homotopiegruppen haben. Let $f: (M, x) \rightarrow (N, y)$ and $g: (N, y) \rightarrow (M, x)$

be mappings satisfying $y \in \text{Int}(f(M))$, $x \in \text{Int}(g(N))$, and such that fg and gf are r -neutral near y and x respectively. If $\mathfrak{D}^{\sim}(y)$ exists and is finitely generated Abelian, then $\mathfrak{D}^{\sim}(x)$ exists, and $\mathfrak{D}^{\sim}(x) \approx \mathfrak{D}^{\sim}(y)$. — Die in diesem Satz auftretende Eigenschaft „ r -neutral near x “ wird für Abbildungen $p: (M, x) \rightarrow (N, x)$ definiert und besagt ungefähr, daß für „hinreichend kleine“ Umgebungen U_1, U_2, U_3, U_4 von x mit $U_4 \subseteq U_3 \subseteq U_2 \subseteq U_1$, die gewisse Bedingungen erfüllen müssen, die Abbildung p die Menge $\bar{U}_2 - U_3$ in das Innere von $\bar{U}_1 - U_4$ abbildet und dabei denselben Homomorphismus von $\pi_r(\bar{U}_2 - U_3)$ in $\pi_r(\bar{U}_1 - U_4)$ erzeugt wie die identische Abbildung $i: (\bar{U}_2 - U_3) \rightarrow (\bar{U}_1 - U_4)$. — Verf. beweist einen analogen Satz für die lokalen \mathbb{C} -Homotopiegruppen.
F. Hirzebruch.

Morita, Kiiti: Cohomotopy groups for fully normal spaces. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 251—261 (1953).

Die Kohomotopiegruppen, die für kompakte Räume von E. Spanier (dies. Zbl. 32, 124) eingehend untersucht worden sind, werden hier auf abzählbar voll-normale Räume verallgemeinert. Dabei heißt ein Raum abzählbar voll-normal, falls er normal ist und jede seiner abzählbaren offenen Überdeckungen eine lokal endliche Verfeinerung besitzt. — Es sei S^n die n -dimensionale Sphäre und $p \in S^n$ ein fest gewählter Punkt. Ist X ein abzählbar voll-normaler Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $\dim(X - A) < 2n - 1$, so kann man aus den Homotopieklassen modulo A stetiger Abbildungen $\alpha: (X, A) \rightarrow (S^n, p)$ eine abelsche Gruppe, die n -te Kohomotopiegruppe $\pi^n(X, A)$ von X modulo A bilden. Für $\pi^n(X, \Phi)$, wo Φ die leere Menge ist, schreibt man $\pi^n(X)$. Jede stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induziert einen Homomorphismus von $\pi^n(Y, B)$ in $\pi^n(X, A)$. Gilt $\dim A < 2n - 1$ und $\dim(X - A) < 2n + 1$, so gibt es einen Korand-Homomorphismus $\Delta: \pi^n(A) \rightarrow \pi^{n+1}(X, A)$. Es wird in der Arbeit untersucht, in wie weit durch die obigen Begriffe, mit den selbstverständlichen dimensionalen Einschränkungen, die Axiome von Eilenberg-Steenrod [Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 117—120 (1945)] für die Kohomologietheorie erfüllt sind. Gewisse Beziehungen zwischen Kohomotopie- und Kohomologiegruppen werden auch aufgestellt.
T. Ganea.

Burger, Ewald: Bemerkungen zu einem Homotopieproblem. Arch. der Math. 4, 470—476 (1953).

On connaît le théorème classique de Hurewicz, qui, généralisé, donne la classification des applications d'un complexe K de dimension n dans un espace asphérique pour les dimensions $< n$. Utilisant la formule des coefficients universels, ainsi que la dualité, l'A. s'ingénie à énoncer le résultat sous toutes les formes possibles, en homologie et cohomologie, dans tout domaine de coefficients.
R. Thom.

Whitehead, J. H. C.: On certain theorems of G. W. Whitehead. Ann. of Math., II. Ser. 58, 418—428 (1953).

Cet article, extrait d'une lettre de l'A. à G. W. Whitehead, a pour objet de rectifier quelques formules du destinataire en y introduisant un signe moins que seule une démonstration extrêmement minutieuse pouvait permettre d'apercevoir. L'article contient de plus de très pertinentes observations sur la définition de l'opérateur bord en homologie, et, par voie de conséquence, sur celle de l'opérateur E de Freudenthal: ces opérateurs ne sont pas canoniquement définis, et leur signe dépend de la convention faite suivant laquelle la coordonnée (t) suivant laquelle on „suspend“ est placée en première ou en dernière position.
R. Thom.

Hilton, P. J. and J. H. C. Whitehead: Note on the Whitehead product. Ann. of Math., II. Ser. 58, 429—442 (1953).

Cet article donne quelques propriétés du produit de Whitehead $[\alpha, \beta]$ entre groupes d'homotopie, et en particulier traite des opérateurs $P(a) = [a, \iota_n]$, où ι_n désigne l'élément unité générateur de $\pi_n(S^n)$. Soient $\xi \in \pi_m(X)$, $\eta \in \pi_n(X)$ deux éléments tels que $[\xi, \eta] = 0$; alors, pour tout $\alpha \in \pi_p(S^m)$, $\beta \in \pi_q(S^n)$, on a $[\xi \circ \alpha, \eta \circ \beta] = 0$. Cas particulier: si S^{m+1} admet une application $S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$ d'invariant de Hopf 1, alors $[\iota_n, \iota_n] = 0$, et $[\alpha, \beta] = 0$, pour tout $\alpha \in \pi_q(S^m)$, $\beta \in \pi_q(S^n)$; pour n impair quelconque, $2[\alpha, \beta] = 0$, si α ou β est une suspension. Les AA. énoncent quantité d'autres résultats sur les opérateurs $P(a)$ en liaison avec l'existence de m champs sur S^n , avec applications au cas particulier des

phères parallélisables. D'autres résultats se rapportent au produit de Whitehead à la suspension E , qui ne peuvent être tous cités ici. La méthode repose essentiellement sur l'emploi des opérateurs E . [J. H. (invariant de Hopf généralisé) et de leurs relations respectives. *R. Thom.*

Bott, R. and H. Samelson: On the Pontryagin product in spaces of paths. *Commentarii math. Helvet.* **27**, 320—337 (1953).

Soient X un espace topologique connexe par arcs, A un point de X , E l'espace des arcs de X se terminant en A , Ω l'espace des lacets issus de A et p l'application de E sur X qui associe à tout arc son origine. Le triplet (E, p, X) est un espace fibré au sens de Serre (ce *loc. cit.* **45**, 260), de „fibre“ Ω , et il lui correspond une suite spectrale (E_*) en homologie singulière (ce *loc. cit.*). Par ailleurs, Ω possède une loi de composition (succession des lacets), qui (à une homotopie près) est associative et munie d'un élément neutre; cela permet d'introduire un produit, ajoutant les degrés, dans le groupe d'homologie singulière $H_*(\Omega)$ de Ω , nommé produit de Pontryagin, car ce dernier a considéré l'effet sur l'homologie d'un groupe de Lie compact de la loi de composition du groupe: $H_*(\Omega)$ devient ainsi une algèbre graduée avec unité. Plus généralement Ω opère à droite sur E (faire suivre un arc se terminant en A par un lacet d'origine et extrémité A , en commutant à p ; les AA , en déduisent un accouplement $(E, *)$ et $H_*(\Omega)$ à $(E, *)$, dont ils étudient les propriétés, au moins lorsque X est simplement connexe. Cela nécessite une modification de la notion de cube dégénéré introduite par Serre (il faut considérer comme dégénéré tout cube singulier constant suivant une variable quelconque, et non pas seulement suivant la dernière variable), et les AA s'assurent tout d'abord que les constructions et résultats de Serre s'étendent à ce cas; en passant ils montrent que l'homologie singulière d'un produit cartésien s'obtient par la „règle de Künneth“, (résultat d'abord démontré par Eilenberg-Zilber, ce *Zbl.* **50**, 173). La 3^e partie est consacrée aux applications et établit notamment que si X est formé de n sphères de dimensions $n_i > 1$ ayant un point commun, alors $H_*(\Omega)$ est une algèbre associative libre à n générateurs de degré -1 . — [Rem.: Des considérations analogues ont été développées antérieurement en homologie de Čech et pour les groupes de Lie compacts par J. Leray (ce *Zbl.* **35**, 296—297), reprises par le rapp. [Ann. of Math., II. Ser. **57**, 115—207 (1953); Amer. J. Math. **76**, 73—342 (1954)]; voir aussi Kudo, J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **2**, 101—140 (1952). *A. Borel.*

Moore, John C.: Some applications of homology theory to homotopy problems. *Ann. of Math.*, II. Ser. **58**, 325—350 (1953).

Après une introduction consacrée à la théorie des suites spectrales (avec les cas particuliers des suites exactes de Wang et de Gysin), l'A. établit une généralisation de la suite spectrale des espaces fibrés de Serre à l'homologie relative, ainsi que quelques théorèmes relatifs aux homomorphismes de suites spectrales induits par des homomorphismes d'espaces fibrés. L'A. expose ensuite la méthode — maintenant classique — de calcul de l'homotopie d'un complexe par construction d'un complexe homotopiquement équivalent fibré en complexes d'Eilenberg-Mac-Lane. Il l'applique ensuite à la généralisation en coefficients mod p du théorème de Hurewicz, théorie développée simultanément par J. P. Serre. Ces résultats lui servent au calcul des groupes de triade, ramené par une construction d'espaces de lacets associés, à un calcul de groupes d'homotopie relatifs. Le théorème fondamental de Eakkers-Massey se trouve ainsi démontré. Dans une dernière partie, l'A. étudie l'homologie d'espaces auxiliaires utiles en homotopie: espaces i -asphériques associés aux sphères, espaces de lacets (successifs) sur les produits de sphères, espaces $Q^{m,n}$ des chemins de $S^m \times S^n$ d'origine fixée, d'extrémité libre sur $S^m \times S^n$. Parmi les nombreux résultats obtenus citons: pour n impair, la composante p -primaire de $\pi_q(S^n)$ est nulle pour $n < q < n + 2p - 3$; $-2p - 3 < q < n - 4p - 6$; $n - 4p - 5 < q < n - 6p - 9$; elle vaut Z_p pour $-n + 2p - 3$, et est $\neq 0$ pour $n - 4p - 5$. La double suspension E^2 induit un isomorphisme de la composante p -primaire de $\pi_q(S^n)$ sur celle de $\pi_{q-2}(S^{n+2})$ pour $q < p(n+1) - 3$. Enfin l'homologie de l'espace $Q^{n,n}$ est déterminée, pour $n > 2$, jusqu'à $5n - 5$. *R. Thom.*

Serre, Jean-Pierre: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. of Math.*, II. Ser. **58**, 258—294 (1953).

Ein klassischer Satz von Hurewicz besagt: Wenn die Homotopiegruppen $\pi_i(X)$ des Raumes X für $i < n$ verschwinden, dann verschwinden auch die Homologiegruppen $H_i(X)$ (ganzzahlige Koeffizienten) für $i < n$, und der natürliche Homomorphismus $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ ist ein Isomorphismus auf. Verf. gibt (in dem folgenden grob angedeuteten Sinne) eine für die Berechnung von Homotopiegruppen wesentliche Verallgemeinerung des Satzes von Hurewicz: „verschwinden“ wird durch „verschwinden modulo einer gewissen Klasse C von abelschen Gruppen“ und „isomorph“ durch „isomorph bis auf Gruppen von C “ ersetzt. Zu diesem Zwecke wird zunächst in Kapitel I der Begriff einer Klasse von abelschen Gruppen eingeführt. Eine „collection“ C von abelschen Gruppen heißt eine Klasse, wenn mit jeder Gruppe G auch jede zu G isomorphe Gruppe zu C gehört und wenn die folgenden Axiome

erfüllt sind: a) Die Null-Gruppe gehört zu C . b) Wenn eine Gruppe G zu C gehört, dann gehört jede Untergruppe von G und jede Quotientengruppe von G zu C . c) Wenn $G_3 = G_1/G_2$ ist und G_2, G_3 zu C gehören, dann gehört auch G_1 zu C . — Nun lassen sich gruppentheoretische Begriffe mod C einführen: Eine Gruppe ist C -Null, wenn sie zu C gehört. Es sei f ein Homomorphismus von A in B , dann ist der Kern von f , das Bild von f und der Cokern von f [= $B/\text{Bild}(f)$] definiert. Man hat daher die folgende exakte Sequenz: $0 \rightarrow \text{Kern}(f) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \text{Cokern}(f) \rightarrow 0$. Der Homomorphismus f heißt C -Homomorphismus auf, wenn $\text{Cokern}(f) \in C$; er heißt C -Isomorphismus in, wenn $\text{Kern}(f) \in C$; er heißt C -Isomorphismus auf, wenn $\text{Kern}(f)$ und $\text{Cokern}(f)$ zu C gehören. Zwei Gruppen A, B heißen C -isomorph, wenn es eine Gruppe L gibt, die auf A und auf B C -isomorph abgebildet werden kann („ C -isomorph“ ist eine Äquivalenzrelation). Mit $A \otimes B$ (bzw. $A * B$) wird das Tensor- (bzw. Torsions-) Produkt der abelschen Gruppen A, B bezeichnet (vgl. Eilenberg und Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton 1952, dies. Zbl. 47, 414). $H_i(A)$ sei die i -dimensionale Homologiegruppe (ganzahlige Koeffizienten) der Gruppe A . Verf. definiert die Aussagen $\Pi_A, \Pi_B, \text{III}, \text{IV}$ über Klassen folgendermaßen. (Π_A): Wenn $A \in C$ und $B \in C$, dann auch $A \otimes B \in C$ und $A * B \in C$. (Π_B): Wenn $A \in C$, dann $A \otimes B \in C$ für jede abelsche Gruppe B . (III): Wenn $A \in C$, dann $H_i(A) \in C$ für jedes $i > 0$. (IV): Jede (endliche oder unendliche) direkte Summe von Gruppen aus C gehört zu C . — Es gilt: Π_B impliziert Π_A , die Aussage IV impliziert Π_B und III . Es gibt Klassen C , die Π_B nicht erfüllen. Jedoch ist es Verf. unbekannt, ob es Klassen C gibt, die wenigstens eine der Aussagen Π_A, III nicht erfüllen. — Im Kapitel II werden verschiedene Hilfsbetrachtungen angestellt, insbesondere wird die relative (Homologie-) Spektral-Sequenz eines gefaserten Raumes untersucht: Es sei E ein gefasertes Raum (im Sinne von Serre, dies. Zbl. 45, 260; diese Arbeit wird im folgenden mit (S) zitiert) über dem Basisraum B mit der Projektion p . Es sei B' eine nicht-leere Teilmenge von B und $E' = p^{-1}(B')$. Dann gibt es eine zur relativen Homologie $H(E, E')$ gehörige Spektral-Sequenz $E_r^{p,q}$, deren Term $E_r^{p,q}$ in natürlicher Weise zu $H_p(B, B'; H_q(F))$, der p -ten Homologiegruppe von B relativ B' mit Werten in dem lokalen Koeffizientensystem $H_q(F)$ (F = Faser), homöomorph ist. Mit Hilfe der vom Verf. in (S) zum Beweis des klassischen Hurewiczschen Satzes benutzten Methode beweist Verf. in Kapitel III den verallgemeinerten Hurewiczschen Satz. Théorème 1. Soit C une classe vérifiant les axiomes (Π_A) et (III). Soit X un espace tel que $\pi_0(X) \rightarrow \pi_1(X) = 0$ et que $\pi_i(X) \in C$ pour $i < n$, n étant un entier donné. On a alors $H_i(X) \in C$ pour $0 < i < n$, et $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ est un C -isomorphisme sur. Der klassische Hurewiczsche Satz ergibt sich für die Klasse derjenigen Gruppen, die nur aus dem Nullelement bestehen. Ferner beweist Verf. einen Hurewiczschen Satz für die relative Homologietheorie: Théorème 2. Soit C une classe vérifiant les axiomes (Π_B) et (III). Soient A et B deux espaces connexes et simplement connexes par arcs, tel que $A \subset B$: on suppose que $\pi_2(A) \rightarrow \pi_2(B)$ est sur. Alors, si $\pi_i(B, A) \in C$ pour $i < n$, n étant un entier donné, on a $H_i(B, A) \in C$ pour $0 < i < n$, et $\pi_n(B, A) \rightarrow H_n(B, A)$ est un C -isomorphisme sur. — Auch ein Satz von J. H. C. Whitehead läßt sich für die C -Theorie beweisen: Théorème 3. Soit C une classe vérifiant les axiomes (Π_B) et (III). Soient A et B deux espaces connexes et simplement connexes par arcs, $f: A \rightarrow B$ une application continue qui applique $\pi_2(A)$ sur $\pi_2(B)$, n un entier > 0 . Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes:

- (a) $f_*: H_i(A) \rightarrow H_i(B)$ est C -biunivoque pour $i < n$ et C -sur pour $i \leq n$.
- (b) $f_0: \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(B)$ est C -biunivoque pour $i < n$ et C -sur pour $i \leq n$.

Das Theorem 3 läßt sich mit Hilfe des „mapping cylinder“ der Abbildung f auf Theorem 2 zurückführen. — Verf. gibt noch einen zweiten Beweis für den Satz von Hurewicz (Theorem 1). Dieser Beweis benutzt den klassischen Hurewiczschen Satz und macht Gebrauch von der von H. Cartan und dem Verf. [dies. Zbl. 48, 413; C. r. Acad. Sci., Paris 234, 393–395 (1952)] und unabhängig auch von G. W. Whitehead (dies. Zbl. 48, 413) eingeführten Methode zur Berechnung von Homotopiegruppen durch Berechnung gewisser zugeordneter Homologiegruppen. Diese Methode wird hier im Referat mit (*) zitiert. — Im Kapitel IV gibt Verf. Anwendungen seiner allgemeinen Sätze. Er verwendet dabei die Methode (*). Hier im Referat sollen nur die Überlegungen bezüglich der 3-Sphäre ausführlicher besprochen werden. Im übrigen beschränken wir uns darauf, einige konkrete Resultate explizit anzugeben. Die dreidimensionale Sphäre S_3 : Nach der Methode (*) wird der Raum $Y = (S_3, 4)$ betrachtet, der gefasert ist über S_3 mit dem Eilenberg-MacLaneschen Raum $K(Z, 2)$ als Faser. Für ungerades i ist $H_i(Y) = 0$, es ist $H_2(Y) = Z$. Theorem 1 wird auf Y angewandt. Es sei dabei C die Klasse derjenigen endlichen abelschen Gruppen, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Man erhält, daß auch $\pi_i(Y)$ für $0 < i < 2p$ zu C gehört und daß $\pi_{2p}(Y)$ mit $H_{2p}(Y) = Z_p$ C -isomorph ist. Damit ist bewiesen (Proposition 7): Die p -Komponente von $\pi_i(S_3)$ ist Null für $i < 2p$. Die p -Komponente von $\pi_{2p}(S_3)$ ist Z_p . Mit Hilfe der Homologiegruppen von Y können noch weitergehende Resultate erhalten werden. Zu diesem Zweck führt Verf. den Raum S_n ein. Diesen Raum erhält man, indem man an die Sphäre S_n eine Zelle E_{n+1} anheftet durch eine Abbildung vom Grade q ($q \neq 0$) des Randes von E_{n+1} auf S_n . Verf. definiert folgender-

maßen eine Abbildung χ von S_{2p} p in Y ; S_{2p} wird durch eine Abbildung, die ein erzeugendes Element der p -Komponente Z_p von $\pi_{2p}(Y)$ repräsentiert, in Y abgebildet. Diese Abbildung kann zu einer Abbildung χ von S_{2p} p in Y erweitert werden. — Nach Konstruktion bildet χ die Gruppe $H_{2p}(S_{2p}, p)$ eineindeutig auf die p -Komponente von $H_{2p}(Y)$ ab, d. h. χ ist ein C -Isomorphismus auf. Hierbei bezeichnet C weiterhin die Klasse derjenigen abelschen Gruppen, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Für alle i verschieden von $2p$ und $4p-1$ ist χ trivialerweise ein C -Isomorphismus auf. Das Theorem 3 kann nun angewandt werden und ergibt, daß $\chi: \pi_i(S_{2p}, p) \rightarrow \pi_i(Y)$ für $i = 4p-2$ C -eindeutig auf ist und für $i = 4p-1$ C -aufst. Nun sei q die natürliche Abbildung von Y auf S_3 . Man erhält den Satz (Proposition 8): Die Abbildung $q_0 \chi: S_{2p}, p \rightarrow S_3$ induziert für $i = 4p-1$ einen Homomorphismus von $\pi_i(S_{2p}, p)$ auf die p -Komponente von $\pi_i(S_3)$. Dieser Homomorphismus ist eineindeutig für $i = 4p-2$. — An dieser Stelle ist zu bemerken, daß die oben verwendete Klasse C nicht die Eigenschaft H_B hat; das Theorem 3 kann also nicht ohne weiteres angewandt werden. Doch zeigt eine leichte Überlegung, daß das Theorem 3 für jede beliebige Klasse angewandt werden kann unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle Homologiegruppen von A und B endlich viele Erzeugende haben. — Verf. beweist mit Hilfe eines Satzes von J. H. C. Whitehead-Blakers-Massey-Hilton den folgenden Satz (Proposition 9): Für $i \leq 2n-2$ hat man die exakte Sequenz $0 \rightarrow \pi_i(S_n) \otimes Z_q \rightarrow \pi_i(S_n|q) \rightarrow \pi_{i-1}(S_n) * Z_q \rightarrow 0$. Nun ergeben sich weitere Sätze über die 3-Sphäre. Aus Proposition 7 folgt, daß $\pi_5(S_3)$ mit ihrer 2-Komponente identisch ist. Wendet man die gerade erwähnte exakte Sequenz für $n = 4$, $q = 2$, $i = 5$ an, dann erhält man $\pi_5(S_4, 2) = Z_2$. Proposition 8 ergibt dann die bekannte Tatsache $\pi_5(S_3) = Z_2$. Proposition 7 ergibt, daß $\pi_6(S^3)$ mit der direkten Summe ihrer 2- und 3-Komponente identisch ist. Die 3-Komponente ist Z_3 . Proposition 8 und 9 führen nur zu der Folgerung, daß die 2-Komponente vier Elemente hat, also mit $Z_2 + Z_2$ oder Z_4 übereinstimmt. Der Verf. beweist in einer anderen Arbeit (siehe folgend. Referat), daß die 2-Komponente gleich Z_4 ist. Man hat also $\pi_6(S^3) = Z_{12}$. Die vorliegende Arbeit enthält über die Sphäre S_3 noch weitere Resultate. [Vgl. weiter unter b).] — Einige weitere Resultate des Verf.: a) Es sei C die Klasse der endlichen 2-Gruppen. Die Gruppe $\pi_i(S_n)$ ist für n gerade C -isomorph mit $\pi_{i-1}(S_{n-1}) = \pi_i(S_{n-1})$. Wenn es eine Abbildung von S_{2p-1} auf S_n gibt, die die Hopfsche Invariante 1 hat, dann ist $\pi_i(S_n)$ isomorph mit $\pi_{i-1}(S_{n-1}) + \pi_i(S_{2p-1})$. b) Es sei n eine ungerade Zahl ≥ 3 und p eine ungerade Primzahl. Die p -Komponente von $\pi_i(S_n)$ ist Null für $i < n-2p-3$, isomorph mit Z_p für $i = n+2p-3$ und Null für $n+2p-3 < i < n+4p-6$; für $i = n+4p-6$ verschwindet die p -Komponente, falls $n \geq 5$, und ist gleich Z_p für $n = 3$. Ferner gilt, daß die p -Komponente von $\pi_{n+2}(S_3)$ ebenfalls mit Z_p isomorph ist. c) Die Arbeit enthält wichtige Sätze über die Freudenthalsche Einhängung (vgl. Serre, dies. Zbl. 46, 407). — Der Inhalt des letzten Kapitels V kann am besten durch Zitieren des entsprechenden Abschnittes in der Einleitung der Arbeit umrissen werden: „Le Chapitre V est consacré à la comparaison des espaces (et en particulier des groupes de Lie) avec les sphères. Nous introduisons notamment la notion de nombre premier régulier pour un groupe de Lie donné G . Grosso modo, p est dit régulier pour G si G est équivalent, „vis-à-vis de p “, à un produit de sphères. Lorsque G est un groupe simple classique (compact et simplement connexe), de dimension n et de rang l , nous déterminons tous les nombres premiers p réguliers pour G ; ce sont ceux qui sont supérieurs à $n/l - 1$.“ Ein Resultat, das in den Arbeiten von R. Thom [s. Commentarii math. Helvet. 28, 17—86 (1954)] eine interessante Anwendung gefunden hat, soll aber noch erwähnt werden: Es sei K ein endliches Polyeder der Dimension m , es sei n eine ungerade Zahl und $x \in H^n(K, Z)$. Dann existiert eine nur von m und n abhängige ganze Zahl $N = 0$ und eine Abbildung $f: K \rightarrow S_n$ derart, daß $f^*(u) = Nx$. Hierbei bezeichnet u die Fundamentalklasse von $H^n(S_n, Z)$.

F. Hirzebruch.

Serre, Jean-Pierre: Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Commentarii math. Helvet. 27, 198—232 (1953).

In dieser Arbeit werden die Cohomologieringe $H^*(H; q, Z_2)$ der Eilenberg-MacLaneschen Komplexe $K(H, q)$ für alle abelschen Gruppen H mit endlich vielen Erzeugenden bestimmt. Wenn X ein Raum $K(H, q)$ und X' ein Raum $K(H', q)$ ist, dann ist bekanntlich $X \times X'$ ein Raum $K(H \oplus H', q)$. Mit Hilfe der Kunnethschen Formel kann also $H^*(H; q, Z_2)$ allgemein berechnet werden, sobald die Ringe $H^*(H; q, Z_2)$ für die speziellen Fälle $H = Z$, $H = Z_{2^h}$ und $H = Z_{p^h}$ (p ungerade Primzahl) bekannt sind. Man weiß (vgl. Serre, dies. Zbl. 45, 260 und vorsteh. Referat, Theorem 1), daß im letzten Fall die Cohomologieringe $H^*(H; q, Z_2)$ trivial sind, d. h. nur aus dem Term $H^0(H; q, Z_2) \cong Z_2$ bestehen. Verf. bestimmt die Cohomologieringe $H^*(Z; q, Z_2)$, $H^*(Z_{2^h}; q, Z_2)$ und $H^*(Z_{p^h}; q, Z_2)$, $h = 2$. Wesentlich benutzt werden dabei die Steenrodschen reduzierten Quadrate und ein Satz von A. Borel [Ann. of Math., II. Ser. 57, 115—207 (1953)]. Im § 1 werden zunächst die bekannten Eigenschaften der Steenrodschen Quadrate Sq^i (i ganze Zahl ≥ 0) zusammengestellt. Für Räume Y , X mit $Y \subset X$ ist Sq^i für jedes n ein Homomorphismus von $H^n(X, Y; Z_2)$ in $H^{n+i}(X, Y; Z_2)$. Die Operationen Sq^i können zu endlich vielen hintereinander geschaltet werden. Man erhält die iterierten Steen-

rodschen Quadrate (vgl. J. A. d. m. dies. Zbl. 48. 170). Der Homomorphismus $Sq^1 \circ Sq^2 \circ \dots \circ Sq^r$ wird mit Sq^I bezeichnet, wobei I die Folge $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ist. Es kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit für $r > 1$ angenommen werden, daß alle i_k positiv sind. Die ganze Zahl $n(I) = i_1 + i_2 + \dots + i_r$ wird Grad der Folge I genannt. Die Folge I heißt zulässig, wenn $i_1 - 2i_2 \geq 0$, $i_2 - 2i_3 \geq 0, \dots, i_{r-1} - 2i_r \geq 0$. Für eine zulässige Folge I wird der Exzeß $e(I) = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \dots + (i_{r-1} - 2i_r) + i_r$ definiert. Es ist $e(I) = 2i_1 - n(I)$. Nun bespricht Verf. einige elementare Eigenschaften der Räume $K(\Pi, q)$: Bekanntlich ist der Raum der Wege in $K(\Pi, q)$, die einen vorgegebenen Anfangspunkt haben, ein zusammenziehbarer gefaseter Raum mit dem Basisraum $K(\Pi, q)$. Die Faser ist ein Raum $K(\Pi, q-1)$. — Es sei X ein Raum $K(\Pi, q)$. Die Homologiegruppe $H_q(X, Z)$ ist isomorph mit $\pi_q(X) = \Pi$. Die Cohomologiegruppe $H^q(X, \Pi)$ ist daher in natürlicher Weise zur Gruppe $\text{Hom}(\Pi, \Pi)$ isomorph und enthält ein fundamentales Element u , das dem identischen Homomorphismus von Π auf sich entspricht. Es sei Y ein beliebiger simplicialer Komplex. Die Homotopieklassen von Abbildungen von Y in X entsprechen eineindeutig den Elementen der Gruppe $H^q(Y, \Pi)$. Wenn $f: Y \rightarrow X$, dann ist f^*u das entsprechende Element in $H^q(Y, \Pi)$. Ist auch Y ein Eilenberg-MacLanescher Komplex $K(\Pi', q)$, dann entsprechen die Homotopieklassen von Abbildungen $Y \rightarrow X$ eineindeutig den Homomorphismen $\Pi' \rightarrow \Pi$. In den préliminaires werden nun noch einige nützliche Faserungen von Eilenberg-MacLaneschen Räumen angegeben. (Die Konstruktion dieser Faserungen erfolgt wie üblich mit Hilfe von Wegeräumen.) Gegeben sei eine ganze Zahl $q > 0$ und eine exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ von abelschen Gruppen. Dann gibt es drei gefaserte Räume 1), 2), 3): Gesamttraum 1) $K(B, q)$, 2) $K(A, q)$, 3) $K(C, q-1)$; Faser 1) $K(A, q)$, 2) $K(C, q-1)$, 3) $K(B, q-1)$; Basisraum 1) $K(C, q)$, 2) $K(B, q)$, 3) $K(A, q)$. In allen drei Fällen stimmt der nicht-triviale Teil der exakten Homotopiesequenz mit der gegebenen exakten Sequenz überein. — Der § 2 beginnt mit dem folgenden Satz von A. Borel (loc. cit.): Es sei E ein gefaseter Raum, mit Faser F und Basis X . Man betrachte die Cohomologie-Spektral-Sequenz mod 2, $E_r^{*,q}$, und setze voraus, daß der Ring $E_2 = H^*(B, Z_2) \times H^*(F, Z_2)$ ist, daß $H^i(E, Z_2) = 0$ für alle $i > 0$ und daß $H^*(F, Z_2)$ ein einfaches System von Erzeugenden (x_i) , $i = 1, 2, 3, \dots$, besitzt, die alle transgressiv sind. Dann ist $H^*(B, Z_2)$ ein Polynomring über Z_2 mit den Elementen $y_i = t(x_i)$ als Erzeugenden (t bedeutet „Transgression“). Die y_i sind voneinander unabhängige „Transzendente“ über dem Körper Z_2 . Der Borelsche Satz kann insbesondere in dem folgenden Spezialfall (*) angewandt werden: $H^*(F, Z_2)$ ist ein Polynomring, erzeugt durch transgressive Elemente z_j ($j = 1, 2, \dots$). In diesem Falle bilden nämlich die Elemente $z_i^{j,h}$ ($j = 1, 2, \dots$; $h = 0, 1, 2, \dots$) ein einfaches System von transgressiven Erzeugenden. Einfachste Anwendung: Der Cohomologiering $H^*(Z_2; 1, Z_2)$ von $K(Z_2, 1)$ (unendlich-dimensionaler reeller projektiver Raum) ist der Polynomring $Z_2[u_1]$ in einer Unbestimmten u_1 vom Grade 1. Man betrachtet den zusammenziehbaren gefaserten Raum E mit $K(Z_2, 2)$ als Basis und $K(Z_2, 1)$ als Faser (vgl. § 1) und die entsprechende Spektralsequenz mod 2. Offenbar ist u_1 transgressiv; $t(u_1) = u_2$ = erzeugendes Element von $H^2(Z_2; 2, Z_2)$. Nach Borel [Spezialfall (*)] erzeugen also die $y_i = t(u_1^{i-1}) = t(Sq^{i-1} Sq^{i-2} \dots Sq^2 Sq^1 u_1) = Sq^{i-1} Sq^{i-2} \dots Sq^2 Sq^1 u_2$ den Ring $H^*(Z_2; 2, Z_2)$. Dieser Ring ist Polynomring in den voneinander unabhängigen Transendenten y_i . (Benutzt wurde, daß die Steenrodschen Quadrate mit der Transgression vertauschbar sind.) Durch Induktion [Benutzung des gefaserten Raumes mit $K(Z_2, q-1)$ als Faser und $K(Z_2, q)$ als Basis; Verwendung von Borel, Spezialfall (*)] erhält Verf. den folgenden Satz: $H^*(Z_2; q, Z_2)$ ist der durch die Elemente $Sq^I u_q$ erzeugte Polynomring über Z_2 . Hierbei ist u_q erzeugendes Element von $H^q(Z_2; 2, Z_2)$ und I durchläuft alle zulässigen Folgen vom Exzeß $< q$. Die $Sq^I u_q$ sind voneinander unabhängige „Transzendente“ über dem Körper Z_2 . — Analog ergibt sich: Für $q \geq 2$ ist $H^*(Z; q, Z_2)$ der von den Elementen u_q und $Sq^I u_q$ als unabhängig Transendenten erzeugte Polynomring über Z_2 . Hierbei ist u_q erzeugendes Element von $H^q(Z; q, Z_2)$, und I durchläuft alle zulässigen Folgen vom Exzeß $< q$, für die $i_r > 1$ ist. Ferner: Für $q \geq 2$ und $h \geq 2$ ist $H^*(Z_{2^h}; q, Z_2)$ der von den Elementen $Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_r} u_q$ (als unabhängig Transendenten) erzeugte Polynomring über Z_2 . Hierbei ist u_q erzeugendes Element von $H^*(Z_{2^h}; q, Z_2)$, und (i_1, i_2, \dots, i_r) durchläuft alle zulässigen Folgen vom Exzeß $< q$. Unter $Sq^{i_r} u_q$ ist für $i_r > 1$ einfach Sq^{i_r} zu verstehen; für $i_r = 1$ ist $Sq^{i_r} u_q = \delta_i(u_q')$ zu setzen, wo u_q' erzeugendes Element von $H^q(Z_{2^h}; q, Z_{2^h})$ ist und δ_h der zur exakten Folge $0 \rightarrow Z_2 \rightarrow Z_{2^{h-1}} \rightarrow Z_{2^h} \rightarrow 0$ gehörige Corand-Operator ist. — Mit Hilfe der in § 1 angegebenen, zur exakten Sequenz $0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow Z_{2^h} \rightarrow 0$ gehörigen Faserungen lassen sich direkt Beziehungen zwischen den Ringen $H^*(Z_{2^h}; q, Z_2)$ und den Ringen $H^*(Z; q, Z_2)$ herstellen. — Über die stabilen Gruppen: Bekanntlich hängt die Gruppe $H^{n-q}(\Pi; q, G)$ für $n < q$ nur von n ab. Diese Gruppe wird mit $A^n(\Pi, G)$ (stabile Gruppe) bezeichnet. Entsprechend werden die stabilen Homologiegruppen $A_n(\Pi, G) \cong H_{n+q}(\Pi; q, G)$, für $n < q$, definiert. Problem: Ist immer $A_n(\Pi, G) = A_n(G, \Pi)$? — Mit Hilfe der obigen Sätze erhält Verf. Aussagen über die stabilen Gruppen. Hier sollen nur drei Tatsachen erwähnt werden: 1) Das Problem kann im Falle $\Pi = Z_2$, $G = Z$ verifiziert werden. —

2) Die Dimension des Vektorraumes $A^n(Z_2, Z_2)$ über Z_2 ist gleich der Anzahl der zulässigen Folgen vom Grade n . (Jede Voraussetzung über den Exzeß fällt im stabilen Falle fort.) Diese Anzahl werde mit $c(n)$ bezeichnet. $c(n)$ ist gleich der Anzahl derjenigen Partitionen von n , deren Summanden alle von der Form $2^i - 1$ sind ($c(0) = 1$). — 3) Für jede abelsche Gruppe H ist die stabile Gruppe $A_*(H, Z_2)$, $n \rightarrow 0$, eine Torsionsgruppe, deren 2-Komponente direkte Summe von Gruppen Z_2 ist. Im § 3 definiert Verf. die Reihe $\hat{\theta}(H; q, t)$ durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim(H^n(H; q, Z_2)) t^n \text{ und die stabile Reihe } \hat{\theta}(H, t) \text{ durch } \sum_{n=0}^{\infty} \dim(A^n(H, Z_2)) t^n. \text{ Verf.}$$

bestimmt diese Reihen in den von ihm im § 2 untersuchten Fällen. Hier werde als Beispiel

$$\text{nur angegeben, daß } \hat{\theta}(Z_2^k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) t^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^{2^i - 1}} \text{ ist. Ferner ergibt sich, daß } \hat{\theta}(H; q, t)$$

für jede abelsche Gruppe H mit endlich vielen Erzeugenden für $t < 1$ konvergiert. Verf. definiert die Funktion $q(H; q, x) = \log_2 \hat{\theta}(H; q, 1 - 2^{-x})$. Logarithmen zur Basis 2. Er untersucht das Wachstumsverhalten der Funktionen q und erhält u. a. $\lim_{x \rightarrow \infty} [q(Z_2^k; q, x) - x^k q(1)] = 1$. Mit Hilfe der Wachstumsseigenschaften der Funktionen q beweist Verf. einen

wichtigen Satz, der die folgende Aussage als Spezialfall enthält: Es sei X ein endliches einfach-zusammenhängendes Polyeder, dessen Homologie modulo 2 nicht trivial ist. Dann gibt es unendlich viele ganze Zahlen i derart, daß die Homotopiegruppe $\pi_i(X)$ eine Untergruppe enthält, die isomorph mit Z_2 oder Z ist. Als Folgerung ergibt sich, daß die Homotopiegruppen $\pi_i(S^n)$ der Sphäre S^n ($n \geq 2$) fest für unendlich viele Werte von i eine Untergruppe enthalten, die isomorph zu Z_2 ist. — § 4. Es seien q, n ganze positive Zahlen und A, B abelsche Gruppen. Eine Cohomologie-Operation C vom Typ $\{q, n, A, B\}$ bildet für jeden simplizialen Komplex X die Gruppe $H^*(X, A)$ in $H^*(X, B)$ ab. C ist mit Abbildungen vertauschbar. Wenn f den Komplex Y stetig in X abbildet, dann ist $C \circ f^* = f^* \circ C$. Mit Hilfe der in § 1 zusammengestellten elementaren Eigenschaften der Eilenberg-MacLaneschen Komplexe ergibt sich, daß die Cohomologie-Operationen vom Typ $\{q, n, A, B\}$ eindeutig den Elementen der Gruppe $H^n(A; q, B)$ entsprechen: Das fundamentale Element von $H^n(A; q, A)$ werde mit u bezeichnet. Der Cohomologie-Operation C vom Typ $\{q, n, A, B\}$ entspricht das Element $C(u) \in H^n(A; q, B)$. Anwendungen: 1) Bei der Berechnung von $H^*(Z_2; q, Z_2)$ wurden nur bestimmte Eigenschaften der Steenrodschen Quadrate benutzt. Diese charakterisieren die Sqⁱ vollständig. 2) Da zur Beschreibung von $H^*(Z_2; q, Z_2)$ nur spezielle iterierte Steenrodsche Quadrate Sqⁱ erforderlich sind (I zulässige Folge), muß jedes iterierte Steenrodsche Quadrat, das die Dimension um m erhöht, in eindeutiger Weise linear durch die speziellen iterierten Quadrate vom Grade m darstellbar sein. Die Berechnung der Koeffizienten ist ein rein algebraisches Problem. Man kann auf diese Weise auch die Relationen von Adem (loc. cit.) erhalten und erkennt, daß dies die einzigen allgemeinen Relationen zwischen den iterierten Quadraten sind. Im abschließenden § 5 werden die Ergebnisse von § 2 zur Berechnung der Homotopiegruppen $\pi_{n-2}(S^n)$ und $\pi_{n-4}(S^n)$ für alle n benutzt. Es wird dabei die im vorstehenden Referat erwähnte Methode (*) verwandt. Die Cohomologiegruppen mod 2 der Räume (S^3, q) werden für $q \leq 7$ bis zu einer gewissen Dimension berechnet. Unter Heranziehung von Einhängungs-sätzen und verwandten Dingen gelangt Verf. schließlich zu den folgenden Resultaten: $\pi_6(S^3) = Z_{12}$, $\pi_7(S^3) = Z = Z_{12}$, $\pi_{n-1}(S^3) = Z_{24}$ für $n \geq 5$, $\pi_7(S^3) = Z_2$, $\pi_8(S^4) = Z_2 + Z_2$, $\pi_9(S^4) = Z_2$, $\pi_{n-4}(S^4) = 0$ für $n \geq 6$. Verf. bemerkt, daß man mit Hilfe der Methode dieser Arbeit auch noch $\pi_{n-8}(S^8) = Z_2$ und $\pi_9(S^4) = Z_8$ erhalten kann. F. Hirzebruch.

Dedecker, Paul: Quelques aspects de la théorie des structures locales. Bull. Soc. math. Belgique 1952, 26—43 (1953).

Diese Arbeit ist eine ausführliche und erweiterte Darstellung der bereits in einer früheren Note (dies. Zbl. 50, 176) besprochenen Dinge: § 1. Structures mathématiques. § 2. Structures locales, pseudogroupes, paragroupes. 3. Structures définies par des atlas. § 4. Structures homologues et isomères. Sous-espaces. F. Hirzebruch.

Griffin jr., John S.: Theorems on fibre spaces. Duke math. J. 20, 621—628 (1953).

Die vorliegende Arbeit schließt sich an eine Arbeit von Hu (dies. Zbl. 40, 101) an. Es wird der Unterschied zwischen fibre spaces im Sinne von Hu und fibre bundles weiter herausgearbeitet. Von den fibre bundles wird nur verlangt, daß eine lokale Produktdarstellung existiert. Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß ein fibre space ein fibre bundle ist. Verf. betrachtet dann insbesondere fibrespaces mit total unzusammenhängenden (totally disconnected) Fasern und beweist „covering“ Homotopie-Sätze für diesen speziellen Fall. Dabei sind keine Einschränkungen über den Argumentbereich der Funktion, die deformiert wird, erforderlich: Covering lemma: Let $\{X, B, \pi\}$ be a fibre structure (fibre

space im Sinne von Hu) with totally disconnected fibres, let Y and A be any topological spaces, let $\mu: Y \rightarrow A$ be any continuous function onto, and let $f: A \times I \rightarrow B$ and $g: Y \rightarrow X$ be continuous and related by, for each y , $\pi g(y) = f(\mu(y), 0)$. Then there is a unique homotopy $h: Y \times I \rightarrow X$ of g such that for all y and t : $\pi h(y, t) = f(\mu(y), t)$. — Die Untersuchungen der Verf. stehen in Zusammenhang mit einer Arbeit von H. Miyazaki (dies. Zbl. 47, 421). — An einigen Stellen treten Druckfehler auf, so fehlt z. B. in Formel (7) vor g der Buchstabe π .
F. Hirzebruch.

Hawley, N. S.: A note on projective line bundles. *Ann. of Math.*, II. Ser. 58, 366—370 (1953).

In dieser Arbeit werden einige Methoden zur Gewinnung komplex-analytischer projektiver Faserbündel besprochen (projective bundles, vgl. Verf., dies. Zbl. 47, 422). Eine komplex-analytische Abbildung μ einer kompakten Riemannschen Fläche \mathfrak{R} in die komplexe projektive Ebene P_2 gibt [unter der Voraussetzung, daß $\mu(\mathfrak{R}) \subset P_2$ eine algebraische Kurve ist, die nur solche Singularitäten hat, in denen man den Punkten des zu $\mu(\mathfrak{R})$ gehörigen singularitätenfreien Modells \mathfrak{R}' Tangenten an $\mu(\mathfrak{R})$ zuordnen kann] Anlaß zu einem projektiven Bündel über \mathfrak{R} mit der komplexen projektiven Geraden als Faser. \mathfrak{R} ist nämlich eine verzweigte Überlagerung von \mathfrak{R}' , die Überlagerungsabbildung werde mit λ bezeichnet. Die Faser über dem Punkte $p \in \mathfrak{R}$ ist die zum Punkte $\lambda(p)$ gehörige Tangente an $\mu(\mathfrak{R})$. Genauer: Der Gesamtraum des Faserbündels ist die Teilmenge derjenigen Punkte (p, ζ) von $\mathfrak{R} \cdot P_2$, für die ζ auf der zu $\lambda(p)$ gehörigen Tangente liegt. — Es sei P_2^* die (Graßmannsche) Mannigfaltigkeit aller Geraden von P_2 . (Bekanntlich sind P_2 und P_2^* komplex-analytisch homöomorph). Eine komplex-analytische Abbildung u^* der kompakten Riemannschen Fläche \mathfrak{R} in P_2^* erzeugt in bekannter Weise ein projektives Bündel über \mathfrak{R} mit der projektiven Geraden als Faser. Der Gesamtraum ist die Teilmenge derjenigen Punkte (p, ζ) von $\mathfrak{R} \cdot P_2$, für die ζ ein Punkt der Geraden $\mu^*(p) \subset P_2^*$ ist. Verf. untersucht den Zusammenhang zwischen den Bündeln, die in der angegebenen Weise durch Abbildungen von \mathfrak{R} in P_2 , und denen, die durch Abbildungen von \mathfrak{R} in P_2^* gegeben werden können. — Die erste hier besprochene Erzeugungsweise von projektiven Bündeln kann auf Abbildungen von \mathfrak{R} in höherdimensionale projektive Räume P_n übertragen werden. Es ergibt sich dann ein Zusammenhang zwischen projektiven Bündeln und Regelflächen des P_n . Verf. gibt noch ein paar andere interessante Erzeugungsmöglichkeiten von projektiven Bündeln (mit der projektiven Geraden als Faser) an. Verf. bemerkt, daß alle komplex-analytischen projektiven Geradenbündel, die er erhält, zu regulären projektiven Geradenbündeln äquivalent sind (regulär: erzeugbar durch eine komplex-analytische Abbildung in eine Graßmannsche Mannigfaltigkeit, vgl. Verf. loc. cit.).
F. Hirzebruch.

Hirzebruch, Friedrich: Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. *J. reine angew. Math.* 191, 110—124 (1953).

Sei M eine kompakte, komplex-analytische Mannigfaltigkeit von vier reellen Dimensionen; es bezeichne $c(M)$ die Eulersche Charakteristik und $k(M)$ die Chernsche charakteristische zweidimensionale Kohomologieklassse von M . Verf. beweist: 1) Sei H eine kompakte zweidimensionale analytische Fläche in M , h die durch H repräsentierte Homologieklassse und $e(H)$ die Eulersche Charakteristik von H . Dann gilt $e(H) = h \circ h + k(M) \cdot h$, falls H singularitätenfrei in M eingebettet ist (\circ bedeute die Bildung der Schnittzahl). Besitzt H in M algebraische Singularitäten, so können diese mit Hilfe des von H. Hopf (dies. Zbl. 44, 200) definierten σ -Prozesses aufgelöst werden. Der Ausdruck für $e(H)$ ist dann durch gewisse Summanden zu ergänzen, die nur von der lokalen Struktur der Singularitäten abhängen. 2) Sei F eine meromorphe Funktion in M , h die gemeinsame Homologieklassse der Niveaulächen von F , ferner w eine durch F bestimmte zweidimensionale Homologieklassse, die „Verzweigung von F “. Die an den Niveaulächen von F tangentialen komplexen Linienelemente bilden ein Feld mit endlich vielen Singularitäten. Die Indexsumme dieses Feldes ist: $s = (2h - w) \circ (2h - w) - k(M) \cdot (2h - w) + c(M)$. — Aussage 1) verallgemeinert die Plückerse Formel für das Geschlecht einer algebraischen Kurve in der komplex-projektiven Ebene; Aussage 2) geht bei Spezialisierung auf die komplex-projektive Ebene, wie Verf. zeigt, in bekannte Aussagen über lineare Kurvenbündel über. In den Beweisen werden Ergebnisse von H. Hopf (dies. Zbl. 39, 399; 45, 260) und E. Kündert (dies. Zbl. 43, 174) über Felder von komplexen Linienelementen in komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten benutzt.
K. Stein.

Oniseik, A. L.: Über die Orientierbarkeit analytischer homogener Mannigfaltigkeiten. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 5, 121—130 (1953) [Russisch].

Verf. beweist die folgenden teils bekannten, teils neuen Kriterien für die Orientierbarkeit einer analytischen homogenen Mannigfaltigkeit M : Eine solche ist dann und nur dann orientierbar, wenn keine Abbildung aus der Fixgruppe H

es Punktes a die Orientierung im Punkte a ändert; insbesondere also dann, wenn H zusammenhängend ist. Ferner ist M dann und nur dann orientierbar, wenn kein innerer Automorphismus von H die Orientierung im Einselement von H ändert. Die Brauchbarkeit der Kriterien wird an mehreren Beispielen gezeigt.

E. Burger.

Olum, Paul: Mappings of manifolds and the notion of degree. Ann. of Math., I. Ser. 58, 458—480 (1953).

Es wird eine Modifikation des Abbildungsgrades einer stetigen Abbildung f einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n in eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit Q^n eingeführt, die mit dem gewöhnlichen Abbildungsgrad übereinstimmt, wenn M^n und Q^n orientierbar sind, und die im allgemeinen Fall zum Studium von Abbildungen verwendet wird, bei denen Q^n in den mittleren Dimensionen asphärisch ist. $\pi_1(M^n, x_0)$ und $\pi_1(Q^n, y_0)$ seien die Weggruppen von M^n und Q^n mit den Anfangspunkten x_0 und y_0 , $f(x_0) = y_0$. Die Elemente der Weggruppe lassen sich bekanntlich in orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende unterscheiden, f induziert eine homomorphe Abbildung Θ von $\pi_1(M^n, x_0)$ in $\pi_1(Q^n, y_0)$, Θ heißt orientierungstreu, wenn orientierungserhaltende Wege in ebensolche und orientierungsumkehrende Wege in ebensolche übergehen. Man nehme Θ als orientierungstreu und f als implizial an. Der neue Gradbegriff, der „twisted degree“, $\deg f$ genannt, ist dann folgendermaßen definiert: σ_i^n und τ_i^n seien orientierte n -dimensionale Simplexe in M^n und Q^n mit einer Ecke in x_0 bzw. y_0 , σ_i^n ($i = 1, \dots, k$) seien die Originale von τ_i^n bei f , und zwar so orientiert, daß $f(\sigma_i^n) = \tau_i^n$, h_i seien Hilfswege von x_0 nach σ_i^n , und β_i sei gleich ± 1 , je nachdem die Orientierung von σ_i bei h_i in die Orientierung von σ_i übergeht oder nicht. Endlich sei $\gamma_i = \pm 1$, je nachdem, ob der geschlossene Weg $f(h_i)$ orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist. Mit $\delta_i = \beta_i \gamma_i$ wird dann definiert: $\deg f = \sum \delta_i$. Dieser Ausdruck ist der Abbildung f zusammen mit den Orientierungen von σ_i^n und τ_i^n invariant zugeordnet. — Das Hauptergebnis der Arbeit besagt: Ist $\pi_1(Q^n) = 0$ für $1 \leq n \leq n$, so sind orientierungstreue Abbildungen f_1 und f_2 von M^n in Q^n dann und nur dann homotop relativ zu x_0 (d. h. bei Festhaltung von $f(x_0) = f_2(x_0)$ während der Deformation), wenn sie denselben Homomorphismus Θ und denselben Grad $\deg f_1 = \deg f_2$ bestimmen. Wenn die universelle Überlagerung \bar{Q} von Q nicht kompakt ist oder wenn M nicht kompakt ist, so ist in dieser Aussage der Grad entbehrlich, wie aus bekannten Sätzen von Hurewicz (dies. Zbl. 13, 229, 283) und Folgerungen des Verf. (dies. Zbl. 50, 174) folgt. Wenn \bar{Q} kompakt ist, so ist $\pi_1(Q)$ von endlicher Ordnung l und $\deg f$ kann bei gegebenem Θ alle ganzen Zahlen einer Restklasse mod l annehmen. Im Anschluß an diese Resultate werden auch freie Homotopien von Abbildungen untersucht. — Sind die Abbildungen nicht orientierungstreu, so gibt es zwei Abbildungsklassen zu jedem Θ , die allerdings durch $\deg f$ nicht immer unterschieden werden. Als Folgerungen werden Sätze über den Homotopietypus im Sinne von Hurewicz von Mannigfaltigkeiten mit verschwindenden mittleren Homotopiegruppen angegeben. Auf Grund davon werden die Homotopietypen der $(2n+1)$ -dimensionalen Linsenräume bestimmt: Zwei Linsenräume $L(m; q_1, \dots, q_n)$ und $L(m'; q'_1, \dots, q'_n)$ sind dann und nur dann vom gleichen Typus, wenn $m' = m$ und $q'_1 \dots q'_n = \pm k^{n-1} q_1 \dots q_n$ mit einem geeigneten ganzzahligen, zu m primen k gilt. Hierdurch werden verallgemeinerte Resultate von Bredt und des Ref., soweit sie den Homotopietypus betreffen, verallgemeinert. Weitere Anwendungen betreffen Abbildungen in projektive Räume. — Endlich wird ein sogenannter „Gruppentransgrad“ einer Abbildung f eingeführt, der dem Hopfschen Absolutgrad verwandt ist und im Falle nicht-orientierungstreuer Abbildungen bisweilen Homotopieunterscheidungen liefert. Ein Teil der Resultate der Arbeit wurde schon angezeigt in dies. Zbl. 49, 129.

Wolfgang Franz.

Morse, Marston and Emilio Baiada: Homotopy and homology related to the Schoenflies problem. Ann. of Math., II. Ser. 58, 142—165 (1953).

Es handelt sich um Untersuchungen, die dem Problembereich der Schoenflieschen Vermutung angehören, welche aussagt, daß ein der n -Sphäre homoomorphes Polyeder des euklidischen E^{n+1} stets eine $(n-1)$ -Zelle berandet. An Stelle eines Polyeders wird eine dreimal stetig differenzierbare reguläre kompakte Mannigfaltigkeit M_n im euklidischen (x_1, \dots, x_n, z) -Raum betrachtet, und es wird nach Beziehungen zwischen den topologischen Eigenschaften von M_n und denjenigen des abgeschlossenen Inneren IM_n von M_n gefragt. Dabei spielt die Funktion $f = z|_{M_n}$ eine besondere Rolle, deren kritische Punkte in untere und obere eingeteilt werden, je nachdem, ob die äußere Normale von M_n im kritischen Punkte die Richtung der negativen oder positiven z -Achse hat. Mit Hilfe dieser Unterscheidung werden topologische Modelle von IM_n gebildet, die aus endlich vielen $(n+1)$ -dimensionalen Prismen bestehen, deren Grund- und Dachflächen in gewisser Weise einander zugeordnet sind. Aus dieser Darstellung folgt z. B.: Hat M_n die Bettischen Zahlen der n -Sphäre und hat f höchstens

4 kritische Punkte, so ist IM_n eine $(n+1)$ -Zelle. Im letzten Abschnitt werden isotope Deformationen von p -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M_p von M_n betrachtet. Es hängt von den Indices der kritischen Punkte von f ab, wie tief man M_p hinunterdeformieren kann.
H. Seifert.

Baiada, E.: Sulla teoria dei punti critici e la topologia delle varietà. *Matematiche* 8, 27—49 (1953).

Darstellung der Morseschen Theorie der kritischen Punkte auf kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, insbesondere Herleitung der Morseschen Beziehungen zwischen den Zusammenhangszahlen der Mannigfaltigkeit und den Typenzahlen kritischer Punkte.
H. Seifert.

Milnor, John: The characteristics of a vector field on the two-sphere. *Ann. of Math.*, II. Ser. 58, 253—257 (1953).

L'A. prouve deux théorèmes concernant les trajectoires d'un champ de vecteurs sur la sphère ordinaire: Le nombre des sources non émettrices d'asymptotes égale le nombre de puits non récepteurs d'asymptotes. Le nombre d'asymptotes émises par des sources égale le nombre d'asymptotes captées par des puits. [Asymptote = trajectoire aboutissant pour $t \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$ à un col; les puits ou sources sont soit des foyers (stables ou instables) soit des trajectoires (généralisées) fermées.]
G. Reeb.

Jenkins, James and Marston Morse: Conjugate nets, conformal structure and interior transformations on open Riemann surfaces. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 39, 1261—1268 (1953).

Cette Note donne un aperçu sur un travail plus étendu annoncé à paraître prochainement. Deux familles admissibles de courbes F et G (pouvant présenter des points singuliers isolés) étant données sur une surface topologique orientable Q , on dit que $[F, G]$ est réseau conjugué si, à tout point de Q correspond un voisinage H et une transformation intérieure i_H de H à valeurs complexes telle que F et G soient, respectivement, les lignes de niveau des composantes de i_H . Si Q peut être dotée d'une structure conforme telle que les i_H puissent être prises analytiques, on dira que $[F, G]$ est „isothermally realizable“ (i. r.). Les A.A. énoncent la proposition fondamentale suivante: Pour que (F, G) soit i. r. il est nécessaire et suffisant qu'il existe une transformation intérieure $w = \lambda(p)$ de la surface universelle de recouvrement M de Q , ayant $[F, G]$ pour lignes de niveau et telle que, pour tout point $p \in M$, on ait $\lambda[g(p)] = a_p \lambda(p) - b_p + i b'_p$ où g est une transformation quelconque du groupe fondamental de Q et les coefficients sont réels. — Un certain nombre de problèmes généraux se posent concernant: l'existence d'une famille G correspondant à une famille admissible F donnée, l'existence d'une transformation λ correspondant à un réseau conjugué $[F, G]$ donné, ou bien les relations qui existent entre les caractéristiques topologiques de $[F, G]$ d'une part et les coefficients a_p, b_p, b'_p , ou les invariants de la structure conforme introduite par λ dans Q , d'autre part. Parmi les nombreuses propositions énoncées et visant à la solution de tels problèmes dans le cas particulier („logically basic case“) où le groupe fondamental de Q est généré par un seul élément, relevons: Tout „restricted“ réseau $[F, G]$ est i. r.; dans certaines conditions imposées aux invariants numériques de $[F, G]$, il existe une transformation intérieure de Q à valeurs complexes ayant ce réseau pour lignes de niveau.
S. Stoilow.

Tutte, W. T.: The 1-factors of oriented graphs. *Proc. Amer. math. Soc.* 1, 922—931 (1953).

G sei ein (endlicher oder unendlicher) gerichteter Graph ohne Schleifen, dessen Punkte endlichen Grades sind. Ist V die Menge der Punkte von G , S eine Teilmenge davon, dann sei G_S der Teilgraph von G , der alle Punkte von $V - S$ und alle diese Punkte verbindenden, zu G gehörenden Kanten enthält. Die Anzahl der Punkte von S sei $\alpha(S)$. S heißt „in G unabhängig“, wenn es keine Bahn in G gibt, die zwei Punkte von S verbindet. S heißt „streng unabhängig in G “, wenn es außerdem keine zwei einseitig unendlichen Bahnen in G gibt, so daß der Anfangspunkt der einen und der Schlußpunkt der anderen zu S gehört. Ist jeder Punkt von V Anfangs- und Schlußpunkt je einer Kante eines Teilgraphen H von G , so heißt H 1-Faktor von G . Eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß G keinen 1-Faktor enthält, ist, daß es zwei disjunkte Teilmengen S und T von V gibt mit (1) $\alpha(S) < \alpha(T)$, so daß (2) T in G_S streng unabhängig ist. Für einen nichtgerichteten Graphen G' folgt daraus: in G' gibt es keinen alle Punkte von G' enthaltenden Teilgraphen, dessen Komponenten reguläre Graphen 1. und 2. Grades sind, wenn (1) gilt und (2) ersetzt wird durch: jede Kante, die einen Punkt von T zum Endpunkt hat, hat einen Punkt von S zum anderen Endpunkt.
H. Künmeth.

Angewandte Geometrie:

● **Glazunov, E. A. und N. F. Četveruchin: Axonometrie.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 291 S. R. 7,80 [Russisch].

Das Werk will eine hinreichend vollständige Darstellung der theoretischen Grundlagen und der praktischen Anwendungen der axonometrischen Abbildungsmethoden nach ihrem gegenwärtigen Stand bringen. Es besteht aus zwei Teilen. Der erste, von N. F. Četveruchin verfaßte Teil ist vorwiegend den theoretischen Grundlagen und Problemen der Axonometrie gewidmet. Er enthält Kapitel über die Parallelprojektion und die affinen Abbildungen, die Probleme der Axonometrierung durch Parallelprojektionen gewonnener Abbildungen, die Axonometrie in mehrdimensionalen Räumen, die Eigenschaften parallelprojektiver Axonometrien. Der zweite Teil, verfaßt von E. A. Glazunov, bringt die Methoden der Konstruktion axonometrischer Abbildungen und ihre Anwendung in praktischen Beispielen. Seine Kapitel beinhalten die Lösung der geometrischen Grundaufgaben, die Transformation axonometrischer Abbildungen, die axonometrische Darstellung von Vielflächern, krummen Linien, krummen Flächen, die Anwendung der axonometrischen Darstellung auf technische Aufgaben. Das Buch ist für Lehrer und Dozenten technischer Lehranstalten und deren Studenten bestimmt und kann sich auch für Ingenieure in Unternehmungen und Konstruktionsbüros nützlich erweisen. Es berücksichtigt die Beiträge, die russische Gelehrte und Ingenieure zu der neueren Entwicklung der theoretischen und praktischen Probleme der Axonometrie geleistet haben. Insbesondere sei auf die Abschnitte über die Vollständigkeit axonometrischer Abbildungen, die Axonometrie in mehrdimensionalen Räumen, die Nomogramme für die Parameter und Formeln der orthogonalen Axonometrie und auf das Literaturverzeichnis hingewiesen, das insbesondere die neueren russischen Originalbeiträge zur Axonometrie anführt.

W. Schmid.

● **Fabrieius-Bjerre, Fr.: Abbildungslehre für Maschinen-, Bau- und Elektroingenieure.** Kopenhagen: Jul. Gjellerups 1953. 87 S. Kr. 11,50 [Dänisch].

Etwas gekürzte und stellenweise vereinfachte Neuauflage des 1. Abschnitts des „Lärebog i Geometri“ desselben Verf.

W. Maak.

Schmid, Wilhelm: Konstruktion der Doppelpunkte einer Koppelkurve. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. I. — 18. I. 1953, 271–279 (1953).

Nach R. L. Hippiusley und G. T. Bennett [Proc. London math. Soc., II. Ser. **18**, 136–140 (1919/20); **20**, 59–84 (1921)] ist eine allgemeine Koppelkurve zu sich selbst isogonal invers bezüglich des Dreiecks ihrer Doppelpunkte, wobei zwei entsprechende Punkte zu zwei bezüglich des Steges symmetrischen Stellungen des Gelenkvierecks gehören. Diese isogonale Inversion führt die Geraden der Ebene in das Netz der Kegelschnitte durch die drei Doppelpunkte, im besonderen die unzeitliche Gerade in den Umkreis des Doppelpunktsdreiecks über. Dieser Kreis (Fokalkreis) trägt auch die singulären Brennpunkte der Koppelkurve. Um die Doppelpunkte zu konstruieren, sucht Verf. den einer Geraden g entsprechenden Kegelschnitt g^* und bringt ihn mit dem Fokalkreis zum Schnitt. Hierbei ist ein Schnittpunkt (der dem Fernpunkt der Geraden entspricht) bekannt. Wird im besonderen g als Durchmesser (Tangente des Fokalkreises gewählt, so ist g^* eine gleichseitige Hyperbel (Parabel). Verf. zeigt nun die Konstruktion des Kegelschnittes g^* , falls g Verbindungsgerade zweier bekannter Punkte P, Q der Koppelkurve ist, gibt auch deren strenge Ermittlung als Doppelpunkte einer Projektivität, wenn g beliebig vorliegt, empfiehlt jedoch im letzteren Fall für die Praxis P und Q nur näherungsweise zu bestimmen. Schließlich werden die Konstruktionen noch für eine gleichseitige Hyperbel und für eine Parabel als g^* vorgeführt und auch der Fall konjugiert imaginärer Doppelpunkte behandelt.

H. R. Müller.

Mechanik: Theoretische Physik.

● **Nekrasov, A. I.: Lehrgang der theoretischen Mechanik. I. 5. verbess. Aufl.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 388 S. R. 7,80 [Russisch].

L'A. présente la cinquième édition de son cours de Mécanique Rationnelle. Il s'agit là d'un traité d'initiation, rédigé dans un esprit traditionnel; les matières sont exposées en se servant des moyens analytiques élémentaires et classiques. Les notations vectorielles sont utilisées en même temps que la représentation analytique ordinaire. L'A. reconnaît l'opportunité de présenter la statique comme un chapitre de la dynamique. Toutefois, lié par les plans d'études universitaires et celui des Écoles d'Ingénieurs, il a dû situer l'exposé de la statique tout au début de sa rédaction. — Le présent volume contient: 1°) La statique de la statique tout au début de sa rédaction. — Le présent volume contient: 1°) La statique classique du solide, la statique graphique (réduite à l'essentiel) et quelques applications élémentaires des équations d'équilibre aux systèmes déformables. 2°) La cinématique du point et du solide. — On notera le souci de L'A. de ne pas perdre de vue les applications. La validité

des principes de la statique est illustrée au moyen d'expériences décrites en détail. De nombreux exercices résolus commentent le cours. L'exposé est aussi clair que le permettent les moyens élémentaires auxquels l'A. se limite volontairement. On conçoit que, dans son pays, l'ouvrage soit très répandu, comme livre de débutant.

J. Kravtchenko.

● **Nekrasov, A. I.: *Lehrgang der theoretischen Mechanik. Bd. II: Dynamik.*** 2. umgearb. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 503 S. R. 10,30 [Russisch].

L'ouvrage débute par l'exposé du principe des travaux virtuels en statique. Le caractère élémentaire du livre ne permet guère l'étude de la réciproque, dont la démonstration rigoureuse est délicate. — Le gros du volume est consacré à la Dynamique. L'axiomatique est traitée en suivant d'assez près la voie tracée par Newton — dont on trouvera de nombreuses citations dans le corps du chapitre. Mais des références à la Mécanique relativiste, des critiques des positions axiomatiques de Kirchhoff, rajeunissent la matière. Nous ne prendrons pas parti dans ce débat, déjà ancien, concernant le choix d'axiomes de la Mécanique classique. La dynamique du point tient une large place dans ce volume. La dynamique des systèmes s'achève par les équations canoniques, le théorème de Jacobi et ses applications à l'intégration des équations différentielles du mouvement et les critères de stabilité de Routh. — Les qualités notées dans le premier tome se retrouvent dans le second. A souligner le souci de l'A. d'initier le lecteur aux calculs numériques.

J. Kravtchenko.

Weber, C.: *Ein Irrtum in der Raumstatik.* *Z. angew. Math. Mech.* 33, 430—431 (1953).

Der Satz der projektiven Geometrie, daß vier beliebige Geraden im R_3 wenigstens zwei (allenfalls zusammenfallende) Transversalen zulassen, wird in der Raumstatik für sechs Wirkungsgeraden benutzt. Mit Recht weist Verf. darauf hin, daß bei Beschränkung auf das Reelle, die ja bei Anwendung in der Raumstatik allein in Frage kommt, der Satz unrichtig werden kann, wofür er ein elegantes Beispiel gibt.

R. W. Weitzenböck.

Mihailović, Dobrovoje: *Application of vector elements to the solution of the problem of two bodies with variable sum of masses.* *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 5, Nr. 3/4, 93—107 und engl. Zusammenfassg. 108—109 (1953) [Serbisch].

Das Zweikörperproblem mit variabler Masse gemäß dem Ansatz $M = M_0/(1 + \alpha t)$, $\alpha > 0$, läßt sich durch eine Transformation des Radiusvektors und der Zeit auf ein Zweikörperproblem mit konstanter Masse reduzieren. [Vgl. Mihailović, *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 5, Nr. 1, 67—76 (1953).] Verf. formuliert die Lösung für den periodischen und aperiodischen Fall ausführlich in vektorieller Form, indem Radiusvektor und Geschwindigkeitsvektor mittels des Vektors der Flächengeschwindigkeit und des Perihelvektors als Integrationsvektoren und der Perihelzeit als 6. skalarer Integrationskonstanten dargestellt werden.

H. Bucerius.

Gran Olsson, R.: *Bemerkungen zur ebenen Bewegung von Rotationskörpern.* *Norske Vid. Selsk. Forhandl.* 25, 32—37 (1953).

Some simple remarks about the motion of a body of revolution down an inclined plane.

M. M. Peixoto.

Mjasnikov, P. V.: *Über einige spezielle Fälle der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt.* *Vestnik Moskovsk. Univ. S. Nr. 12 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 8),* 59—61 (1953) [Russisch].

Un solide pesant S est mobile sans frottement autour d'un point O fixe; $Oxyz$ étant les axes principaux d'inertie de S , on suppose que le centre de gravité de S est sur Oz . Alors l'A. intègre les équations du mouvement dans le cas particulier où la rotation instantanée de S a une composante nulle suivant Oy . Le résultat n'est pas nouveau, mais les calculs de l'A. sont simples.

J. Kravtchenko.

Braunbek, W.: *Der symmetrische Kreisel mit zeitlich periodischem Richtmoment.* *Z. angew. Math. Mech.* 33, 174—188 (1953).

Verf. behandelt den Fall eines symmetrischen, im Schwerpunkt unterstützten Kreisels, wenn sich die darauf wirkenden Kräfte auf ein längs der Figurenache liegendes Moment reduzieren. Physikalisch verwirklicht Verf. den Fall, indem er in den Kreisel einen Magnetstab starr eingebaut denkt und den Kreisel in ein Magnetfeld $\vec{H} = H_0 + \vec{H}_1$ bringt. Dabei soll

konstant. $\dot{\Phi}_1$ zeitlich harmonisch mit der Kreisfrequenz ω veränderlich sein. Es werden zwei besondere Fälle untersucht: I. $\dot{\Phi}_1 \parallel \dot{\Phi}_0$ und II. $\dot{\Phi}_1 \perp \dot{\Phi}_0$. Im ersten Falle behandelt Verf. die bekannten für die Eulerschen Winkel geltenden Differentialgleichungen, indem er das Feld $\dot{\Phi}_1$ sehr klein annimmt. Auf diese Weise erfährt der Kreisel eine Überlagerung von gyraler Präzession, freier Nutation und erzwungenen Nutationen. Für den Fall kleiner Nutation ($\theta \ll 1$) erhält Verf. eine den nichtlinearen erzwungenen Schwingungen entsprechende Resonanzkurve, falls die Frequenz des Wechselfeldes mit der Frequenz der freien Nutation übereinstimmt. Im zweiten Falle wird die Kreisbewegung auf den „schnellen“ Kreisel beschränkt ($\dot{\Phi} \ll \dot{q}$), und so durchläuft die Spitze von $\dot{\Phi}_1$ eine Ellipse (elliptisch polarisiertes Wechselfeld). Resonanzerscheinungen treten in diesem Falle auf, wenn die Frequenz des Wechselfeldes mit der Frequenz der freien Präzession übereinstimmt. V. Valcorici.

Gammel, R.: Zur Theorie des selbstregten unsymmetrischen Kreisels.
Viss. Z. Techn. Hochschule Dresden 2, 361—364 (1953).

Ein Kreisel mit den Hauptdrehmassen $A = B = C$ heißt „selbsterregt“, wenn die Antriebsdrehkraft $M = (M_x, M_y, M_z)$ in bezug auf die Kreiselhauptachsen (d. h. im körperfesten System) bestimmt ist. Die Eulerschen Gleichungen haben dann die Form $A \ddot{\omega}_x = B - C \omega_y \omega_z = M_x(t)$, usw. $M(t)$ ist achsenveränderlich, wenn sich das Verhältnis $M_x : M_y : M_z$ mit der Zeit ändert; sonst, wenn also $M_x(t) = m_x F(t)$ usw. (mit demselben Zeitfaktor $F(t)$ in allen Komponenten), heißt die Erregung achsenfest, bei $F(t) = 1$ außerdem zeitfest. Die stationären Bewegungen des zeitfest selbstregten unsymmetrischen Kreisels hat Verf. näher untersucht (dies. Zbl. 51, 152). Für die nichtstationären Bewegungen beweist er hier folgende Sätze: (1) Es gibt keine zeit- und achsenfeste Drehkraft, welche eine Drehung um eine körperfeste Achse erzeugen könnte, außer wenn die Drehachse mit einer der Hauptachsen zusammenfällt. (2) Bei zeitveränderlicher achsenfester Drehkraft sind Drehungen um eine von den Hauptachsen verschiedene körperfeste Drehachse möglich, und zwar ändert sich dann die Drehgeschwindigkeit hyperbolisch mit der Zeit, so daß man bei zunehmender Drehgeschwindigkeit zu einem singulären Zeitpunkt gelangt. Übergänge in die Ruhe oder aus der Ruhe sind hierbei nicht möglich. (3) Es gibt Drehbewegungen vom Typus $\omega_x = a/f(t)$, $\omega_y = q(t)$, $\omega_z = r f(t)$, bei denen also der Drehvektor zwar nicht achsenfest ist, aber doch nur in einer Ebene des Körpers wandert. Sollen solche Bewegungen durch eine zeitfeste Drehkraft erzeugt werden, so muß die Drehachse in der Ebene der trennenden Polbahnen des kräftefreien Kreisels liegen. $q(t)$ läßt sich aus $f(t)$ bestimmen, und $f(t)$ ist aus einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu berechnen. (Diese Berechnung wird in der vorliegenden Mitteilung nicht näher ausgeführt.) U. T. Bödewadt.

Capriz, Gianfranco: Precessioni di un giroscopio pesante con armatura asimmetrica. Rend. Mat. e Appl. 12, 229—236 (1953).

Bestimmung aller Bewegungen eines Systems von vier Freiheitsgraden, das aus einem Gyroskop (Kreisel) besteht, der sich um eine in einen unsymmetrischen Ring (Armatur) gelagerte Achse drehen kann. Es werden alle Bewegungen bestimmt, die einer gleichförmigen Drehung des Ringes um eine Achse entsprechen. Die Schwerpunkte des Ringes und des Gyroskops sind vom Fixpunkt verschieden angenommen. Betrachtung von Sonderfällen. Th. Pöschl.

Aymerich, G.: Oscillazioni forzate di sistemi autosostenuti impulsivamente.
Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 22, 109—116 (1953).

L'A. considera un sistema non lineare rappresentabile mediante il modello del Rocard [L'onde électrique 16, 396—419 (1937), vedi anche Aymerich, questo Zbl. 51, 195] e soggetto ad una forza esterna sinusoidale di periodo T . Supposto T poco diverso dal periodo delle oscillazioni libere nel sistema e piccola la sua non-linearità, l'A., applicando opportuni metodi di approssimazione, dimostra l'esistenza di oscillazioni periodiche di periodo T e ne studia, in modo completo, la loro stabilità. D. Graffi.

Klotter, K. and E. Pinney: A comprehensive stability criterion for forced vibrations in non-linear systems. J. appl. Mech. 20, 9—12 (1953).

In Systemen der Form (1) $\ddot{x} + q = q + \Phi(q, \dot{q}) = s \cos \Omega t$ machen die Verf. nach Kryloff-Bogoliuboff („Introduction to Non-Linear Mechanics“, translated by S. Lifschitz, Princeton 1949) den Ansatz (2) $q = Q(t) \cos x(t)$ mit der Nebenbedingung (3) $\dot{Q} = Q(\dot{x} - x) \tan x$, so daß (4) $\dot{q} = -xQ \sin x$ wird. Mit (5) $x = \Omega t + \theta(t)$ finden sich Differentialgleichungen erster Ordnung für Q und θ , aus denen durch Mittelung über eine Periode von x (unter Festhalten von Q und θ) Näherungsgleichungen für die Mittelwerte der Ableitungen entstehen:
(6) $x^{-1} \dot{Q} = S(Q) = -\frac{1}{2} s \sin \theta$, $x^{-1} \dot{\theta} = C(Q) = -\frac{1}{2} s \cos \theta + Q$.

Darin soll $\Delta = 1 - \alpha^{-1} \Omega$ sehr klein sein, d. h. die Erregung soll nahezu in Resonanz mit der Eigenschwingung des linearen Grenzsystems erfolgen. (Vgl. die analogen Voraussetzungen bei dem „stroboskopischen“ Verfahren von Minorski für nicht-lineare Eigenschwingungen, dies. Zbl. 42, 106.) S, C sind die Fourierkoeffizienten des Grundschwungsanteils in Φ über x . Ist dann $Q_0 \cos(\Omega t + \vartheta_0)$ eine periodische Lösung von (1), wobei sich Q_0, ϑ_0 aus (6) für verschwindende linke Seiten ergeben, so sind die Störungsgleichungen homogen-linear in den Abweichungen, und der Ansatz (7) $Q = Q_0 + \alpha \exp h t$, $\vartheta = \vartheta_0 + \beta \exp h t$ führt auf (8) $(2Q_0/\alpha) \cdot h = B \pm (B^2 - Q_0 s ds/dQ_0)^{1/2}$ mit (9) $B = S + Q_0 (dS/dQ_0)_0$. Fällt $h \leq 0$ aus, so ist die Schwingung (Q_0, ϑ_0) stabil, sonst instabil. Für $B > 0$ tritt danach immer Instabilität ein. Verff. können jedoch zeigen, daß in vielen Anwendungsfällen $B \leq 0$ zutrifft, nämlich z. B. immer dann, wenn $\Phi(q, \dot{q}) = f(q) + g(\dot{q})$ ist mit $g(\dot{q})/\dot{q} = g(-\dot{q})/(-\dot{q}) > 0$ und $g'(\dot{q}) > 0$. Wenn $g'(\dot{q})$ teilweise negativ ist, wird auch noch $B \leq 0$ möglich sein, nämlich wenn $g(+0) > 0$ und Q_0 nicht zu groß ist. Ist also $B \leq 0$, so hat h das entgegengesetzte Zeichen wie ds/dQ_0 ; damit gilt das einfachere und recht einleuchtende Kriterium: Stabilität liegt vor, wenn die Amplitude der erzwungenen Dauerschwingung bei verstärkter Erregungskraft (aber festgehaltener Erregungsfrequenz) auch wächst; andernfalls hat man Instabilität. Ist also erst einmal das Feld der Resonanzkurven $Q_0(s, \Omega)$ für (1) berechnet, so läßt sich ihm leicht ansehen, ob die durch einen Punkt des Feldes bezeichnete Schwingung stabil ist. — Anm. des Ref.: Dieses in der Überschrift gemeinte Stabilitätskriterium $\partial Q_0(s, \Omega)/\partial s > 0$ ist im Grunde altbekannt (s. z. B.: K. W. Wagner, Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen, Wiesbaden 1947, S. 491). Bedeutsam an der vorliegenden Arbeit ist aber die klarere Formulierung, die Ermittlung der Voraussetzung seiner Gültigkeit (9) $B \leq 0$, sowie die Aufstellung des allgemeineren Kriteriums (8) $h \leq 0$.

U. T. Bödewadt.

Sretenskij, L. N.: Die Bewegung dreier Punkte auf rotierenden Bahnen. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk, Nr. 1), 15—19 (1953) [Russisch].

Nähere Ausführungen einer im 9. Kap. der Principia Newton's behandelten Aufgabe über die Bewegung von drei Punkten in einer um den gemeinsamen Schwerpunkt drehenden Ebene unter dem Einfluß von Zentralkräften, die sich ebenso bewegen können wie drei andere Körper in einer ruhenden Ebene.

Th. Pöschel.

Elastizität. Plastizität:

Ziegler, Hans: Linear elastic stability. A critical analysis of methods. II. Z. angew. Math. Phys. 4, 167—185 (1953).

Die Kritik an den Stabilitätskriterien der Elastomechanik wird im vorliegenden 2. Teil der Arbeit an Hand einfacher Beispiele weitergeführt. Es zeigt sich deutlich, daß die Gültigkeit der statischen Methoden in ihrer allgemein gebräuchlichen Form viel begrenzter ist, als meist angenommen wird. Besprochen wird: Knickung des auf Druck beanspruchten Stabes für den axialen und tangentialen Belastungsfall, sowie der instationäre Fall eines zeitlich periodischen Druckes; die Knickung durch Torsion für axiales Moment und für die nichtgyroskopischen semi-, quasi- und pseudotangentialen Momente, periodisch veränderliche Momente; die Bestimmung der kritischen Drehzahlen unter Einfluß eines Axialdrucks bzw. Torsionsmoments. — In allen Fällen werden unter Berufung auf die im ersten Teil der Arbeit (dies. Zbl. 51, 163) abgeleiteten Sätze für 5 verschiedene Arten von Randbedingungen nur die Ergebnisse angegeben, zur Information über einzelne Belastungsfälle steht ein Literaturverzeichnis zur Verfügung, in dem sich vor allem auch viele neue Untersuchungen finden.

F. Selig.

Aržanyč, I. S.: Vektorpotentiale der Dynamik eines elastischen Körpers. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 961—964 (1953) [Russisch].

Verf. stellt sich zur Aufgabe, Vektorpotentiale des Operators $1 - \alpha \operatorname{grad} \operatorname{div} - \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} - \gamma \Delta$, wo $\alpha = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $\beta = \mu/\rho$, λ und μ Lamésche Konstanten, γ eine weitere Konstante und ρ die Massendichte sind, zur Behandlung dynamischer Probleme zu konstruieren. Im statischen Falle drücken sich diese Potentiale durch harmonische Funktionen aus. Das dynamische Problem läßt sich durch Einführung von 16 Hilfsfunktionen lösen, die gruppenweise Systemen von je 4 Differentialgleichungen zu genügen haben und die Struktur des Verschiebungsvektors bestimmen. Verf. diskutiert anschließend einfachere Sonderlösungen sowie die Eigenschaften des Vektorpotentials 1) der Raumkräfte, 2) der Oberflächenkräfte und 3) der Oberflächenverzerrungen. Zum Schluß werden Integralgleichungen zur Lösung analoger Probleme formuliert und darauf hingewiesen, daß die Anwendung von Potentialen bessere Ergebnisse gewährleistet.

S. Woinowsky-Krieger.

Fichera, Gaetano: Condizioni perché sia compatibile il problema principale della statica elastica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., III. Ser. 14, 397—400 (1953).

Diese Note gibt in gekürzter Form einige Ergebnisse, die in einer künftigen Arbeit die volle Entwicklung erfahren sollen. Es handelt sich um die Bedingungen, die das auf einen elastischen Körper wirkende System von Massen- und Oberflächenkräften erfüllen muß, damit das elastostatische Problem lösbar wird. Verf. nimmt einen dreidimensionalen, elastischen, längs eines Teils der Randfläche fest eingespannten Körper an und gibt die entsprechenden elastostatischen Gleichungen an. Mittels eines Satzes von Riesz über die Existenz einer Funktionalbeziehung leitet Verf. eine Integralbedingung für die Außenkräfte ab, die also nicht beliebig vorgegeben werden dürfen.

V. Válcovici.

Hu, Hai-Chang: On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body. Chinese J. Phys. 9, 130—144 u. engl. Zusammenfassg. 145—147 (1953) [Chinesisch].

Consider a transversely isotropic elastic body in equilibrium. Take a rectangular coordinate system (x, y, z) with the axis z perpendicular to the plane of isotropy of the body. In this system of coordinates, the equation of equilibrium in terms of displacement (u, v, w) is

$$\begin{aligned} 1) \quad & (B_{11} \partial^2 u / \partial x^2 + B_{66} \partial^2 u / \partial y^2 + B_{44} \partial^2 u / \partial z^2) u - B_{12} \partial^2 v / \partial x \partial y + B_{13} \partial^2 w / \partial x \partial z = 0, \\ & B_{12} \partial^2 u / \partial x \partial y + (B_{66} \partial^2 v / \partial x^2 + B_{11} \partial^2 v / \partial y^2 + B_{44} \partial^2 v / \partial z^2) v + B_{13} \partial^2 w / \partial y \partial z = 0, \\ & B_{13} \partial^2 u / \partial x \partial z + B_{13} \partial^2 v / \partial y \partial z + (B_{44} \partial^2 w / \partial x^2 + B_{44} \partial^2 w / \partial y^2 + B_{33} \partial^2 w / \partial z^2) w = 0, \end{aligned}$$

where $B_{66} = B_{11} - B_{12}$ and B_{11}, \dots, B_{66} are constants depending on the elastic property of the body. A particular solution of (1) may be found by expressing u, v, w in terms of a function F :

$$u = \partial^2 F / \partial x \partial z, \quad v = -\partial^2 F / \partial y \partial z, \quad w = (B_{11} B_{11}^{-1}) \{ \partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + (B_{44} B_{11}^{-1}) \partial^2 F / \partial z^2 \},$$

where F satisfies the equation

$$2) \quad (B_{11} B_{44} \{ \partial^2 \partial^2 x^2 + \partial^2 \partial^2 y^2 \} + (B_{11} - B_{11} B_{33} - B_{12}^2) \{ \partial^2 \partial^2 x^2 - \partial^2 \partial^2 y^2 \} \partial^2 \partial^2 z^2 + B_{33} B_{44} \partial^4 \partial^2 z^4) F = 0.$$

This equation is the three-dimensional form of the equation satisfied by the stress function introduced by S. G. Lekhnitskiĭ (this Zbl. 23, 413) for the solution of the symmetrical deformation of a body of revolution. The general solution of (1) may be obtained by expressing u, v, w in terms of two functions F and φ :

$$\begin{aligned} u &= -\partial^2 F / \partial x \partial z - \partial \varphi / \partial y, \quad v = -\partial^2 F / \partial y \partial z + \partial \varphi / \partial x, \\ w &= (B_{11} B_{33}^{-1}) \{ \partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + (B_{44} B_{11}^{-1}) \partial^2 F / \partial z^2 \}, \end{aligned}$$

where F satisfies (2), and φ satisfies the equation

$$\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + (B_{44} B_{66}^{-1}) \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0.$$

In cylindrical coordinate system (r, θ, z) the general solution may be obtained by a vectorial transformation.

Aus der englischen Zusammenfassung.

Hu, Hai-Chang: On the matrix theory of continuous beams on elastic foundation. Chinese J. Phys. 9, 183—191 u. engl. Zusammenfassg. 191 (1953) [Chinesisch].

In this paper, we employ the theory of matrices and continued fractions for the solution of the bending problem of continuous beams on elastic foundation which unyielding supports. End moments are obtained in explicit expressions. Accurate numerical results may be calculated from these expressions directly without solving simultaneous equations.

Autoreferat.

Chien, Wei-Zang: Continuous beams with non-uniform stiffness. Chinese J. Phys. 9, 170—181 u. engl. Zusammenfassg. 181—182 (1953) [Chinesisch].

The method of continued fractions is used for the determination of the bending moments of a continuous beam with non-uniform stiffness. It is required to find the solution of the following set of three-moment equations together with a set of end conditions: (1) $M_x = p_x M_{x-1} + q_x M_{x-2} + F_x$ ($x = 2, 3, \dots, n$). Here M_x is the moment at the support no. x , p_x and q_x are quantities denoting the relative stiffness, and F_x is the loading factor. Let α_x and β_x be two independent solutions of the homogeneous equation (2): $M_x = p_x M_{x-1} + q_x M_{x-2}$. Then β_x / α_x is the x -th convergent of the continued fraction $\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_3}{p_3} + \dots$, and we have recurrence formulae $\alpha_x = p_x \alpha_{x-1} + q_x \alpha_{x-2}$, $\beta_x = p_x \beta_{x-1} + q_x \beta_{x-2}$ with $\alpha_0 = \beta_1 = 0$, $\alpha_1 = \beta_0 = 1$. Hence the general solution of (2) is $M_x = P \alpha_x + Q \beta_x$ ($x = 0, 1, \dots, n$), where P and Q are two integration constants. For (1) we have the following particular solu-

tion M_x^* : $M_0^* = 0$, $M_x^* = \sum_{i=1}^x \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}}$ ($x = 1, 2, \dots, n$). Hence the general solution of (1) is given by $M_0 = Q$, $M_x = P \alpha_x + Q \beta_x + M_x^*$ ($x = 1, 2, \dots, n$). — A straightforward numerical method of solution based upon this method is given at the end of the paper.

Herzig, Alfred: Zur Torsion von Stäben. Z. angew. Math. Mech. 33, 410—428 (1953).

Wird ein Stab einer reinen Torsionsbeanspruchung unterworfen, verwölbt sich im allgemeinen ein beliebig herausgegriffener Querschnitt des Stabes. Falls es gelingt, bei vorgegebenem Querschnitt diese Verwölbung anzugeben, so lassen sich daraus Formänderungsarbeit und Drillungssteifigkeit des Stabes sowie die Torsionsspannungen innerhalb des Querschnitts genau angeben. Die Lösung dieses Problems ist aber nur für wenige Formen von Querschnitten exakt durchführbar. — In der vorliegenden Arbeit zeigt indessen Verf., daß Querschnittsformen wie Halbkreis, Viertelkreis sowie Vollkreis mit radialem Schlitz bis zum Kreismittelpunkt mit Hilfe der Methoden der konformen Abbildung geschlossene Lösungen gestatten, die sich vollkommen exakt auswerten lassen. — Besonders interessant sind die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit: Bezeichnen α den Verdrehungswinkel je Längeneinheit des Stabes, μ den Torsionsmodul, R den Halbmesser des Kreisquerschnitts, so ergeben sich für den Halbkreisquerschnitt folgende Werte: Drillungswiderstand $C = \mu(\pi^2 - 8) R^4 2\pi = 0,2976 \mu R^4$, maximale Torsionsspannung im Mittelpunkt des geradlinigen Teiles des Randes $\tau_{\max 1} = 8\mu\alpha R/3\pi = 0,8488 \mu\alpha R$, maximale Torsionsspannung in der Mitte des Halbkreisbogens $\tau_{\max 2} = \mu\alpha R(2 - 4\pi) = 0,7268 \mu\alpha R$. Die durch Reihenentwicklungen gewonnenen Ergebnisse [siehe z. B. Geiger und Scheel, Handbuch der Physik, Bd. VI, Mechanik der elastischen Körper, Berlin 1928, S. 154] sind für den Drillungswiderstand $C = 0,296 \mu R^4$, für die Torsionsspannungen $\tau_{\max 1} = 0,849 \mu\alpha R$ bzw. $\tau_{\max 2} = 0,719 \mu\alpha R$. Beim Viertelkreis sind die entsprechenden Werte $C = \mu(\pi/6 - 2 \ln 2/\pi) R^4 = 0,0823 \mu R^4$; $\tau_{\max 1} = \tau_{\max 2} = 0,598 \mu\alpha R$ in der Entfernung $r = 0,459 R$ vom Mittelpunkt am geradlinig begrenzten Teil des Querschnitts, $\tau_{\max 3} = \mu\alpha(\pi - 2 \ln 2)/\pi R = 0,5587 \mu\alpha R$ im Mittelpunkt des kreisförmig begrenzten Randes. Der durch Reihenentwicklungen gewonnene Wert wird für den Drillungswiderstand mit $C = 0,0825 \mu R^4$ angegeben. Beim radial geschlitzten Vollkreisquerschnitt sind die exakten Werte: $C = \mu(\pi - 64,9\pi) R^4 = 0,8781 \mu R^4$, $\tau_{\max} = 8\mu\alpha R/3\pi = 0,8488 \mu\alpha R$ am Außenrande des Querschnitts im Schnitt senkrecht zum Schlitz. Der angenäherte Wert für den Drillungswiderstand wird zu $C = 0,878 \mu R^4$ angegeben [A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. II, 2. Aufl., München 1928, S. 101], während das oben genannte Handbuch auf S. 154 ohne Bevorzugung eines der beiden Werte sowohl $C = 0,823 \mu R^4$ wie $C = 0,878 \mu R^4$ anführt. (Durch die in exakter Weise erhaltenen Resultate scheinen die angenäherten, durch Reihen gewonnenen Ergebnisse gesichert. Bem. d. Ref.)

R. Gran Olsson.

Birman, S. E.: Zum ebenen Problem für Körper, die aus Teilen mit verschiedenen elastischen Konstanten zusammengesetzt sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 989—992 (1953) [Russisch].

Ausgehend von seiner früheren Arbeit (dies. Zbl. 30, 225) gibt hier Verf. eine Lösung in Fourierschen Integralen für einen unendlichen Parallelstreifen mit verschiedenen Breiten ($2a$ und $2b$) und verschiedenen elastischen Konstanten der beiden isotropen Teilstreifen. Eine beliebig verteilte normale oder tangentielle Belastung greift dabei längs der Begrenzung dieser Teilstreifen an. Der Sonderfall zweier zusammenhängender halber Ebenen ($a = \infty$, $b = \infty$) von verschiedener Elastizität geht aus der allgemeinen Lösung unmittelbar hervor.

S. Woinowsky-Krieger.

Chandra Das, Sisir: On the effect of a small spherical cavity in a semi-infinite elastic solid under stresses produced by a couple on the plane boundary. Bull. Calcutta math. Soc. 45, 89—93 (1953).

Bipolarkoordinaten wurden erstmalig von Sternberg und Sadowsky in der Elastizitätstheorie angewandt (E. Sternberg und M. A. Sadowsky, dies. Zbl. 46, 173). Sie sind durch $\xi + i\eta = \log \{ [Q + i(z+a)]/[Q + i(z-a)] \}$ mit $Q = \sqrt{x^2 + y^2}$ definiert (a — positive Länge) und durch das Azimut φ zu ergänzen. Während aber die genannten Autoren azimutfreie Probleme betrachten, untersucht Verf. eine vom Azimut abhängige Problemstellung der dreidimensionalen Elastizitätstheorie. Das in der Überschrift genannte Kräftepaar hat eine Achse

senkrecht zur Begrenzungsfläche des Halbraumes. Die entstehende Spannungsverteilung wird berechnet.

E. Hardtwig.

Žgenti, V. S.: Eine Anwendung der Funktionalanalysis auf eine flache elastische Schale von der Form eines elliptischen Paraboloids. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 9—11 (1953) [Russisch].

Die Beziehungen zwischen den Verzerrungen und dem Verschiebungsvektor $U(u, v, w)$ der Schale sowie die in den Verzerrungen ausgedrückten Gleichgewichtsbedingungen werden nach S. G. Michlin (dies. Zbl. 48, 423) angeschrieben. Ist nun G die orthogonale Projektion der Schalen-Mittelfläche auf die Ebene $x = y, L$ die Randlinie von G , so handelt es sich um die Bestimmung von U unter den Bedingungen $u = v = w = \partial u / \partial r = 0$ auf L (v = Normale zu L). Drückt man die Gleichgewichtsbedingungen in symbolischer Form $\Delta U = Q$ aus, wo Δ einen Operator, Q den Vektor der Oberflächenbelastung bezeichnet, so erweist sich Δ als positiv definit. Hieraus folgt die Existenz der Lösung, die etwa nach Ritz konstruiert werden könnte. Ist $\{U_n, u_n, v_n, w_n\}$ die Ritzsche Folge, so läßt sich auch noch die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{w_n\}$ in G nachweisen.

S. Woinowsky-Krieger.

● **Bubnov, I. G.:** Arbeiten zur Theorie der Platten. Mit einer Biographie I. G. Bubnovs von A. S. Vol'mir. (Bibliothek der russischen Wissenschaft: Mathematik, Mechanik, Physik, Astronomie.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 423 S. R. 12,70 [Russisch].

Verf., ein hervorragender Schiffbauer seiner Zeit (1872—1919), hat einen bedeutenden Teil seiner theoretischen Arbeiten der Festigkeit dünner elastischer Platten gewidmet. Diese, oft mit den Fragen der Festigkeit des Schiffskörpers als Ganzes zusammenhängenden, Arbeiten bilden den wesentlichen Inhalt des vorliegenden Sammelbandes. Sein erster Abschnitt ist dem Verhalten freigestützter oder eingespannter Plattenstreifen gewidmet, die eine gleichförmige Belastung tragen und deren Ränder in ihrer Längsbeweglichkeit behindert sind. Diesbezügliche Ergebnisse des Verf. gehören heute zum festen Bestandteil mancher Standardwerke. Die Lösung des Verf. für das analoge Kreisplattenproblem führt, trotz Linearisierung, zu praktisch bereits sehr zufriedenstellenden Ergebnissen. Die Kirchhoffsche Plattentheorie liegt der Behandlung von Rechteckplatten unter gleichförmiger oder hydrostatischer Belastung bei verschiedenen Randbedingungen zugrunde. In einem weiteren Abschnitt werden die Fragen der Stabilität ebener, unter gleichförmigem Druck oder ebensolcher Schubbelastung stehender Platten behandelt. Letzteres Problem wird durch eine Näherungsmethode gelöst, die heute als das „Galerkinsche Verfahren“ wohlbekannt ist. Da der Grundgedanke dieses Verfahrens von Verf. bereits 1913, und zwar im „Gutachten über die Abhandlungen von Professor Timoschenko“, ausgesprochen wurde, hätte es sehr wohl den Namen des Verf. tragen können.

S. Woinowsky-Krieger.

Kromm, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik. Ingenieur-Arch. 21, 266—286 (1953).

Eine wesentliche Voraussetzung der Kirchhoffschen Theorie der dünnen Platte, nämlich $E_z = G_z = \infty$ über der Mittelebene $z = 0$, führt zwangsläufig zu zwei anstatt zu drei Randbedingungen für ihre Verschiebungen und Schnittkräfte. Eine Näherungstheorie, die die Schwierigkeiten der exakten Lösung des Randproblems umgeht, verdankt man E. Reissner [J. Math. Physics 23, 184 (1944)], der $E = E, G = G$, also endlich voraussetzt, von den Spannungen aber $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ von vornherein linear, τ_{xz} und τ_{yz} parabolisch verlaufen läßt; bei Wahrung der Gleichgewichtsbedingungen werden die Verträglichkeitsbedingungen auf diese Weise nur im Mittel über die Plattendicke, und zwar nach Castigliano, befriedigt. — Verf. zieht es vor, die Querspannungendruck der Platte zu vernachlässigen ($B_z = \infty$) und nur die Querschubverzerrung zuzulassen ($G = G$), dafür aber die Kompatibilitätsbedingungen exakt zu erfüllen. Man gelangt dann zur Differentialgleichung $K(\Delta) \Delta w = p$ für die Plattendurchbiegung $w(x, y)$ unter einer Belastung $p(x, y)$. Die Biegesteifigkeit $K(\Delta)$ zeigt sich hier bei von einer Länge l abhängig; zu deren Bestimmung zwei weitere Differentialgleichungen zur Verfügung stehen. Mit dem nächstliegenden Ansatz $p = \sum_m \sum_n a_{mn} \frac{\sin \alpha_m x}{\cos \alpha_m x} \frac{\sin \beta_n y}{\cos \beta_n y}$ für

die Belastung und analoger Doppelsumme für w läßt sich für jedes m, n ein Parameter b_{mn} und somit auch das zugehörige $K_{mn}(l)$ bestimmen. Die betreffenden Anteile von $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sind jedesmal dem Zint (b_{mn}) proportional, wobei sich größere Abweichungen von der Kirchhoffschen Theorie nur in den höheren Harmonischen ergeben; volle Übereinstimmung zeigt sich hingegen bei den Schnitt-Momenten und Querkraften. Steht die Platte unter Biegung, so führt die Methode des Verf. nur zu einer Präzisierung der Reißnerschen Ergebnisse. Bei eben bleibender Platte erhält man dagegen eine unendliche Mannigfaltigkeit neuer Spannungszustände, die eine exakte Einhaltung vorgeschriebener Bedingungen an der zylindrischen Begrenzungsfläche der Platte gestatten.

S. Woinowsky-Krieger.

Eggwertz, Sigge and Artur Norr: Analysis of thin square plates under normal pressure and provided with edge frames of finite stiffnesses in the plane of the plates. *Flygtekn. Försöksanstalt, Medd.* **50**, 34 S. (1953).

Es werden die Formänderungen und Spannungen einer dünnen quadratischen Platte von großer Ausbiegung untersucht, die einer gleichmäßig verteilten Querbelastrung unterworfen ist. Die Ränder der Platte sind mit Steifen versehen, die auf ihrer ganzen Länge starr unterstützt sind, um Durchbiegungen quer zur Plattenebene vorzubeugen, während die Ränder selbst frei sind, um sich in dieser Ebene durchbiegen zu können. Durch Anwendung der Energiemethode, aber unter Vernachlässigung der Biegearbeit der Platte werden einfache Formeln für die Durchbiegungen und Membranspannungen gewonnen, wobei der Einfluß der Biegefestigkeit der Randsteifen berücksichtigt wird. Eine näherungsweise Abschätzung der Biegemomente in der Platte sowie deren Anteil an der Übertragung der ganzen Last auf die Unterstützung wird unternommen. — Versuchsergebnisse mit Platten verschiedener Dicke und mit verschiedenen Randsteifen sind in Diagrammen anschaulich dargestellt und mit den theoretisch ermittelten Werten verglichen. Die aus den Gleichungen der Membrantheorie erhaltenen Bewerte werden in der Weise modifiziert, daß diese für vergleichsweise große Durchbiegungen Kurven in gutem Einklang mit den Versuchsergebnissen liefern. — Vgl. auch S. Eggwertz und A. Norr. *J. Roy. Aeronaut. Soc.* **57**, 343—344 (1953), sowie *Flygtekn. Försöksanstalt, Technic. Note* HU—379 (1952) und HE—379 (1953).

R. Gran Olsson.

Yeh, Kai-Yuan: Large deflection of a circular plate with a circular hole at the center. *Chinese J. Phys.* **9**, 110—128 u. engl. Zusammenfassg. 129 (1953) [Chinesisch].

The equation for the large deflection of thin plates established by Th. v. Kármán (this Zbl. **24**, 224) has been well known for many years. But so far only a few problems have been studied with numerical certainty. In this paper, the problem of large deflection of a circular plate with a circular hole at the center is treated with the perturbation method. Recently, S. A. Alekseev [Inženernyj. Sbornik **10** (1951)] worked out the same problem with the membrane theory, but his results differ much from the case of a thin plate. This is chiefly due to his neglecting the effect of bending. The results of this paper are compared with those of Alekseev and discussed. We conclude that under concentrated load, the bending effect is momentous and therefore it cannot be neglected. The problem can be extended to other boundary conditions with the maximum deflection Y_M as parameter. Antoreferat.

Vodicka, V.: Durchbiegung von geschichteten Plattenkörpern mit leichter Füllung. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 188—199 (1953).

Die Arbeit des Verf. enthält eine Erweiterung der von A. Prusakov (dies. Zbl. **42**, 183) entwickelten Lösung für eine dreischichtige Platte. Die Anzahl der zur Mittelebene $z = 0$ parallelen Schichten sei $2n + 1$. Die dickere Zentralschicht bestehe aus leichter Füllung, für die näherungsweise $E = G = 0$ gelten soll. Für die i -te obere und untere Schicht sei $E_i = G_i = \infty$ bei endlichen elastischen Konstanten E_i, G_i in den Richtungen x, y . Unter Zuhilfenahme der Übergangsbedingungen in den Trennebenen lassen sich dann die Verschiebungen und Spannungen jeder Schicht durch insgesamt sechs Funktionen von x, y ausdrücken, für die schließlich ein System von Differentialgleichungen aufgestellt wird. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die Rechteckplatte ließe sich dann ähnlich wie bei Prusakov durchführen.

S. Woinowsky-Krieger.

Hruban, K.: Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau. *Acta techn., Acad. Sci. Hungar.* **7**, 425—463, russ. Zusammenfassg. 463, engl. u. französ. Zusammenfassg. 464 (1953).

Csonka, P.: Deformation of truncated pyramid frames. *Acta techn., Acad. Sci. Hungar.* **7**, 465—474, russ. Zusammenfassg. 474, französ. u. deutsche Zusammenfassg. 475 (1953).

Csonka, P.: Structural analysis of truncated pyramid frames. *Acta techn., Acad. Sci. Hungar.* **7**, 507—518, russ. u. französ. Zusammenfassg. 518, deutsche Zusammenfassg. 519 (1953).

Parkus, Henry: Thermal stress in pipes. *J. appl. Mech.* **20**, 485—488 (1953).

L'A. determina dapprima la distribuzione stazionaria della temperatura in un tubo cilindrico circolare di asse z , con la faccia esterna a temperatura costante, la faccia interna a temperatura variabile solo con z . Calcola poi il valore delle tensioni elastiche che, per effetto delle variazioni di temperatura, si destano nel tubo.

D. Graffi.

● **Gross, Bernhard: Mathematical structure of the theories of viscoelasticity.** „Rheologie“ Publications de l'Institut National de Technologie, Brésil.) Paris: Hermann et Cie 1953. 74 p. Fr. 600.

Verf. gibt eine auf mathematischer Grundlage aufgebaute Theorie der zeitabhängigen nelastischen Vorgänge in festen Körpern, die als elastische Nachwirkung, Retardation, relaxation, Kriechen u. dgl. bezeichnet werden, für welche durch Messungen, die mittels geeigneter Versuchseinrichtungen an vielen Orten angestellt wurden, eine breite Erfahrungsrundlage geschaffen wurde. Den Ausgangspunkt bildet ein Ansatz, wonach eine konstante Spannung eine Dehnung erzeugt, die i. a. drei „Komponenten“ enthält: eine instantane, eine plastische (viskose) und eine verzögerte, und überlagert die einzelnen Wirkungen, wobei eine komplexe Darstellung verwendet wird. Die „Relaxationsfunktion“ wird als Laplacesches Integral eingeführt, und zur Bestimmung des Relaxationsspektrums werden Näherungsmethoden angegeben. Zwischen der „Kriechfunktion“ und der Relaxationsfunktion besteht eine Volterrasche Integralgleichung. Den Schluß bildet eine Tabelle der Verteilungsfunktionen und eine ausführliche Bibliographie.

Th. Pöschl.

Shield, R. T. and D. C. Drucker: The application of limit analysis to punch indentation problems. J. appl. Mech. 20, 453—460 (1953).

Grandori, Giuseppe: Sul calcolo delle reazioni sovrabbondanti di travi inflesse elastoplastiche. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 86, 148—162 (1953).

Razmadze, G. N.: Zur Frage der Stoß-Torsion kreisrunder Balken mit veränderlichem Querschnitt. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 14, 91—94 (1953) [Russisch].

Chien, Wei-Zang and Chih-Ta Chen: Theory of rolling. Chinese J. Phys. 9, 57—91 u. engl. Zusammenfassg. 92 (1953) [Chinesisch].

The theory of rolling given in the present paper is based upon the following assumptions: (1) There is no lateral spreading. (2) The material used is incompressible, isotropic, and viscous. It also obeys von Mises-Henky's condition of yielding. (3) The elastic deformation of rolls is neglected. (4) The contact region between the material and rolls is divided into three parts: namely the forward slipping region, sticking region, and backward slipping region. The conditions of continuity of velocity and pressure are used. — The results obtained from this theory agree very well with the experimental results given by Siebel and Lueg in 1933.

Autoreferat.

● **Carlin, B.: Les ultrasons.** Paris: Eyrolles 1953. 276 p.

Es handelt sich um die französische Übersetzung von B. Carlinus „Ultrasonics“ (New York 1949). Der Originaltext wurde bei der Übersetzung sinngemäß übernommen, ohne daß er überarbeitet bzw. ergänzt wurde. Hierdurch konnten einige Mängel, die dem Original anhaften, nicht abgeändert werden. Z. B. führt der Verf. im Vorwort an, daß es wenige Veröffentlichungen und Bücher über Ultraschallforschung gäbe, was 1949 bestimmt nicht mehr zutreffend war. Jedoch ist zu bedenken, daß dieses Buch vom Praktiker für den Praktiker geschrieben worden ist. Dessen soll das Werk eine nicht zu lange, aber doch klare Einführung in die Natur des Ultraschalls, seine Erzeugung und seine Anwendung geben. Das bedingt eine Beschränkung des Umfangs und damit einen Verzicht auf Vollständigkeit des behandelten Stoffes. Aus dem gleichen Grunde konnten die theoretischen Gesetzmäßigkeiten nur sehr kurz erörtert werden. Dafür basiert das Buch auf der eigenen praktischen Erfahrung des Verf., welcher während der Entwicklung des Reflektroskops als beratender Ingenieur an der Universität Michigan und später als leitender Ingenieur an der Sperry Products Corporation tätig war. — Der Verf. berichtet in den ersten beiden Kapiteln über die allgemeinen physikalischen Grundlagen der Ultraakustik und behandelt im 3. Kapitel die Quarzkristalle und im 4. Kapitel die Kristallhalterungen sowie Fragen der Ankopplung. Das 5. Kapitel beschäftigt sich mit der Ausbreitung der Schallwellen, Resonanzerscheinungen und der Reflexion. Im 6. Kapitel werden Versuchsanordnungen für unmodulierte Wellen und im 7. solche für impulsmodulierte Wellen behandelt. Im 8. Kapitel wird über spezielle Wirkungen des Ultraschalls berichtet, und im 9. werden die Magnetostraktion und ihre besonderen Anwendungen behandelt. Das 10. und letzte Kapitel gibt einen Überblick über die praktischen Anwendungen. Auf die Frage Ultraschall und Elektrostraktion, auf die zuerst Ref. hingewiesen hat, ist Verf. nicht eingegangen. Die bekannte Methode der sekundären Interferenzen, die von Bachem und Hiedemann in der Abteilung des Ref. entwickelt wurde, wird nicht erwähnt. Weiter ist u. a. die von Cl. Schaefer und Bergmann entwickelte Methode der Festlichtbeugung an Schallwellen, die eine Bestimmung der elastischen Konstanten von Festkörpern gestattet, nicht behandelt. Die eben erwähnten Dinge interessieren den Ingenieur ja auch. Trotzdem ist die mit vielen Abbildungen und Schaubildern ausgestattete Monographie

eine sehr gute Einführung in die Lehre vom Ultraschall und dessen Anwendungen, und sie füllt in dieser Hinsicht eine Lücke, da die modernen Ultraschallmonographien für ein erstes Studium zu umfangreich geworden sind. Sie kann allen, die sich in dieses interessante und heute viel angewendete Gebiet einarbeiten wollen, sehr empfohlen werden. *H. Falkenhagen.*

Kay, Irvin: The diffraction of arbitrary pulse by a wedge. Commun. pure appl. Math. 6, 419—434 (1953).

Es wird folgende Problemstellung behandelt: Im (x, y, t) -Raum, der aus einem unendlichen Kegel $\varphi(x, y, t) = 0$ besteht, aus dem ein keilförmiges Stück durch zwei Ebenen herausgeschnitten ist, die sich in der Kegelachse schneiden und einen Winkel 2β , also einen Keil miteinander bilden, wird die Lösung der Wellengleichung $u_{xx} + u_{yy} - (1/c^2) u_{tt} = 0$ gesucht, die auf den keilbildenden Teilen der Begrenzung, also $\vartheta = \beta$ und $\vartheta = 2\pi - \beta$ der vorgegebenen Grenzbedingung $u = 0$ (bzw. $\partial u / \partial n = 0$) genügt und die auf dem konischen Teil der Begrenzung $\varphi = 0$ bestimmte gegebene Werte annimmt. Durch Einführung der neuen Variablen $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 - ct}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta = \arctg y/x$ geht die Diff.-Gl. über in $u_{\vartheta\vartheta} + r^2 u_{rr} + r u_r + 2r^2 u_{\varphi r} + r u_{\vartheta} = 0$ mit $u = u(r, \vartheta, \varphi)$, die Verf. durch den Ansatz $u = \Phi(\varphi) R(r) \Theta(\vartheta)$ aufspaltet in $\Theta'' + k^2 \Theta = 0$, $\Phi' = -\lambda \Phi$ und $r^2 R'' + r(1 - 2\lambda r) R' - (k^2 + \lambda r) R = 0$, deren erste Gleichung auf Grund der Grenzbedingungen Eigenwerte $\sin k_n(\vartheta - \beta)$ für k liefert. Die Lösung $u(r, \vartheta, \varphi)$ wird als $\sum \sin k_n(\vartheta - \beta) \int_{\varphi_n} A_n(\lambda) e^{-\lambda \varphi} R_{\lambda n}(r) d\lambda$

angesetzt mit $R_{\lambda n}(r) = e^{\lambda r} I_{\lambda n}(\lambda r)$, in der die Integrationskurven L_n sowie die Funktionen $A_n(\lambda)$ durch umfangreiche rechnerische Überlegungen bestimmt werden. Anschließend wendet Verf. die Überlegungen bzw. deren Ergebnisse auf das von Keller und Blank (dies. Zbl. 43, 414) behandelte analoge Problem an, bei dem die Grenzbedingung auf dem Kegel als stückweise konstante Funktion von ϑ und r vorausgesetzt war. *J. Picht.*

Krejn, M. G.: Über Umkehrprobleme der Theorie der Filter und λ -Zonen der Stabilität. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 93, 767—770 (1953) [Russisch].

The sinusoidal vibrations of a loaded string of infinite length are studied in relation to the properties of certain entire functions of a complex variable and, in the case of discrete loads, to certain developments in Stieltjes continuous fractions. The results stated are too numerous and complicated to be reproduced here. *J. L. Massera.*

Hydrodynamik:

● **Landau, L. D. und E. M. Lifschie: Mechanik der Kontinua. (Theoretische Physik.)** 2. umgearb. u. erweit. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 788 S. R. 16,35 [Russisch].

Le présent ouvrage qui fait partie d'un cours de Physique Mathématique, dû à l'activité inlassable des AA., est une véritable encyclopédie de la Thermo-mécanique des milieux dits continus. Bien entendu, on ne saurait épuiser un sujet aussi vaste dans un seul livre, si volumineux soit-il. Un choix s'imposait. Pour autant qu'on puisse pénétrer le dessein des AA., les matières traitées dans le présent ouvrage ont été sélectionnées d'après les critères ci-après. La livre est destiné essentiellement aux physiciens qui ont besoin de calculer les phénomènes concrets. On ne trouvera donc pas ici un exposé dogmatique des théories générales, traitées avec rigueur. Les AA. se bornent à l'étude des phénomènes types, choisis en raison de leur importance pratique. Chaque chapitre est illustré de nombreux problèmes précis, complètement résolus: les calculs sont souvent empruntés aux mémoires récents. Comme les problèmes réels sont difficiles, les AA. n'hésitent pas à avoir recours aux hypothèses simplificatrices, tant pour la mise en équations des problèmes que pour la résolution de celles-ci. — D'une façon générale, on se préoccupera beaucoup, dans tout le cours de l'ouvrage, des phénomènes oscillatoires, si importants en physique et de leur stabilité — qui seule en garantit l'existence réelle. Le volume analysé paraît en deuxième édition. Cela simplifie la tâche de l'auteur de ces lignes: il lui suffira de rappeler brièvement les têtes de chapitres et de signaler, çà et là, les innovations qui l'auront particulièrement frappé. — La première partie de l'ouvrage est consacrée à la thermo-mécanique des écoulements laminaires, tant pour les fluides parfaits que visqueux. La turbulence est abordée selon les vues personnelles de Landau; mais les travaux de Kolmogoroff et de son école, ceux de Prandtl etc. sont analysés brièvement. A partir du chapitre V, commence l'exposé des théories moins traditionnelles. Il faut ici se borner à une simple nomenclature: la conductibilité thermique dans les fluides, la théorie de la diffusion, la capillarité, l'acoustique, la théorie des ondes de choc, aérodynamique supersonique, écoulement du gaz autour d'obstacles, hydrodynamique de la combustion, etc. Parmi de très jolis problèmes abordés, citons au hasard, la discussion de l'allure des solutions de l'équation de Tricomi, adaptée aux besoins des physiciens, la théorie relativiste des écoule-

ments des fluides, utiles dans quelques applications fines, et surtout l'hydrodynamique de l'hélium II, due à Landau (qui a réussi à créer la théorie du très fin effet de Kapitza) et développée par Lifschitz, l'un des AA. du livre. On doit à celui-ci l'acoustique théorique de l'hélium II dont les prévisions ont été confirmées par les expériences délicates de Pechkoff. — On ne saurait dissimuler son admiration devant l'effort de synthèse que représente un tel livre. Les AA. ont dépouillé un nombre considérable de mémoires originaux. Leur exposé est, parfois, un peu trop rapide et ne saurait, dès lors, servir de livre d'initiation. Mais un spécialiste trouvera là une foule de renseignements de grand intérêt. — La deuxième partie de l'ouvrage, consacrée à la théorie de l'élasticité, est, dans l'ensemble, beaucoup moins originale, ceci n'est pas un traité de résistance des matériaux destiné à l'ingénieur; mais le lecteur pourra y trouver un bref résumé de quelques théories classiques acru de quelques chapitres, moins traditionnels, consacrés à l'élasticité cristalline, aux vibrations élastiques, à la conductibilité thermique des solides élastiques et enfin, à la théorie des corps fortement visqueux. Comme dans la première partie, l'exposé est enrichi de très nombreux exercices explicitement résolus.

J. Kravtchenko.

Eichenberger, Hans P.: Secondary flow within a bend. J. Math. Physics 32, 4—42 (1953).

Verf. bemüht sich um eine dreidimensionale Lösung für die Strömung durch einen Krümmer rechteckigen Querschnitts unter der Voraussetzung, daß der Einfluß von Reibung und Kompressibilität vernachlässigbar ist. In einem horizontal liegenden Krümmer seien U, V die Geschwindigkeitskomponenten in den Radial- und Umfangsrichtungen (r, φ) , W die Komponenten in Richtung der Höhenstreckung (z) . Bei $q = 0$ ist gegeben: $W = 0, U = 0$ und $V(r, z)$ derart, daß der dynamische Druck in z -Richtung linear von der Mitte zu den Wänden hin abfällt, aber in r -Richtung konstant bleibt. Gesucht sind die Geschwindigkeitskomponenten in stromab liegenden Krümmerquerschnitten. Als Gleichungen für die Sekundärströmung ergeben sich vier lineare partielle Differentialgleichungen für die drei Geschwindigkeitskomponenten und den Druck, die gelöst werden. Ein Vergleich der ermittelten Radialgeschwindigkeiten mit denen aus der zweidimensionalen Näherungslösung von Squire und Vinter (J. aeronaut. Sci. 18, 271—277 (1951)), die die Änderung in der Hauptströmungsrichtung unberücksichtigt läßt, zeigt geringfügige Unterschiede, die von derselben Größenordnung sind wie die Unterschiede gegenüber den experimentellen Ergebnissen. Solche sind mitgeteilt für die Stelle $q = 30^\circ$ eines 90° -Krummers von $0.2 \times 0.2 \text{ m}^2$ Querschnitt und einem mittleren Radius von 0.71 m.

F. W. Riegels.

Betz, A.: Zur Berechnung von Gitterströmungen bei einigermaßen großem Schaufelabstand. Herrn R. v. Mises zum 70. Geburtstag. Z. angew. Math. Mech. 33, 113—116 (1953).

Verf. geht zunächst von einer äquidistanten Wirbelreihe auf der imaginären Achse der Strömungsebene aus, bei der ein Wirbel in den Nullpunkt fällt, und stellt das komplexe Geschwindigkeitspotential des Störungsfeldes, das von den nicht im Nullpunkt gelegenen Wirbeln herrührt, in Gestalt einer Potenzreihe dar, die nach Potenzen von z/t ($z = x + iy$ Aufpunkt, t Teilungsbreite) fortschreitet. Bei großen Werten von t erhält er, indem er diese Reihe nach dem ersten Glied abbricht, einfache Formeln für das Störungsfeld in der Nähe des Nullpunktes. Nunmehr denkt sich Verf. die Wirbel des Gitters, deren jeder die Zirkulation Γ habe, durch kongruente Tragflügel ersetzt und berechnet die Störungsströmung, die dieses Flügelgitter bei gleicher Anströmgeschwindigkeit und gleicher Zirkulation Γ im jeden einzelnen Flügel in der Umgebung des Nullpunktes hervorruft. Unter der Voraussetzung großer Teilungsbreite t wird dann ein Iterationsverfahren angegeben, das mit derjenigen Flügelform $y_F(x_F)$ und derjenigen Zirkulationsverteilung $\gamma(x_F)$ ($z_F = x_F + iy_F$ auf der Punkt auf der Schaufel) beginnt, die ein alleinstehender Flügel mit der Zirkulation Γ bei geeignet gewählter Anströmgeschwindigkeit erhalten wurde, und den Einfluß der Störungsströmung auf die Ausgangsfunktionen $y_F(x_F)$ und $\gamma(x_F)$ schrittweise zu berechnen gestattet.

Hans Schubert.

Betz, Albert: Zur konformen Abbildung von Strömungsgittern. Wiss. Z. techn. Hochschule Dresden 2, 333—336 (1953).

Die Bestimmung der ebenen Potentialströmung um ein Streckenprofilgitter gleich langer, paralleler, zur Gitterrichtung unter dem Winkel β geneigter Strecken (Schaufeln) kann mit Hilfe der konformen Abbildung geschehen. Hierzu führt man zunächst durch die Exponentialfunktion die Schaufeln über in Teile logarithmischer Geraden um den Nullpunkt (Wirbelpunkt) und bildet sodann die längs einer Schaufel aufgeschlitzte Ebene auf das Äußere eines Kreises K ab. In der Praxis ist meistens der Abstand a des dem Nullpunkt entsprechenden Punktes W vom Kreise, verglichen mit dem Radius r des Kreises, sehr klein. Verf. zeigt, daß man in diesen Fällen, — genauer unter der Annahme $a/r = \cos^2 \beta$, — die Lage von W relativ zum Kreis K und die den Schaufelendpunkten entsprechenden Punkte auf K leicht berechnen kann. Der Fall $\beta = \pi/2$ wird gesondert behandelt.

J. Heinholt.

Isay, Wolfgang-Hermann: Beitrag zur Potentialströmung durch axiale Schau-
fegitter. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 397—409 (1953).

Für das Einzelgitter mit Skelettlinie $y(x)$ oder endlich dickem Profil $x(t) = a \cos t$; $y(t) = \sum c_n e^{i n t}$ und die entsprechenden Gitterstufen (Laufrad und Leitrad) wird das Strömungsfeld nach dem Singularitätenverfahren mit Wirbelbelegungen auf der Profilkontur berechnet. Die Integralgleichungen bzw. ihre Systeme erster Art werden unter Verwendung der Schneidlerschen Bestimmung der Kernmatrix durch äquivalente Gleichungssysteme ersetzt, welche durch Iteration gelöst werden, deren Konvergenz aus dem Doppelintegral des im ganzen Bereich stetigen Kernanteils abgeschätzt werden kann. *J. Pretsch.*

Kumar De, Kamini: On an extension of Blasius theorem. *Bull. Calcutta math. Soc.* **45**, 121—124 (1953).

Die resultierenden Kräfte und Momente, die von einer Flüssigkeit auf einen Zylinder ausgeübt werden, können bekanntlich mit Hilfe des Theorems von H. Blasius (siehe z. B. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics*, London 1948, S. 89—91, dies. Zbl. **29**, 282) berechnet werden. Dabei wird eine zweidimensionale stationäre wirbelfreie Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit angenommen. Die Absicht der vorliegenden Note besteht im Nachweis, daß auch im Fall wirbelnder Strömung die resultierenden Kräfte und Momente durch eine Erweiterung des Theorems von Blasius ermittelt werden können. Die dabei erhaltenen Ausdrücke haben nicht denselben Vorteil wie die von Blasius für wirbelfreie Strömung angegebenen, weil die Integranden keine analytischen Funktionen sind. Diese Schwierigkeit kann überwunden werden, indem die Integranden durch analytische Funktionen ersetzt werden, was eine Einschränkung auf die Integration längs des Zylinderumfanges gestattet. *R. Gran Olsson.*

Muggia, Aldo: Sulla teoria delle superfici portanti. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **87**, 193—199 (1953).

Für das vom Ref. auf beliebige Flügelgrundrisse angewandte Traglinienmodell, bei dem die tragende Linie $1/4$, die Linie der Aufpunkte $3/4$ Flügeltiefe von der Vorderkante entfernt ist, gibt Verf. eine Begründung, indem er das Geschwindigkeitspotential der tragenden Fläche mit dem der tragenden Linie vergleicht. *J. Weissinger.*

Bory, Charles: Une étude théorique par voie continue du mélange par turbulence dans les fluides. *Ann. de Physique, XII. Sér.* **8**, 313—337 (1953).

● **Howarth, L. (edited by):** Modern developments in fluid dynamics. High speed flow. Vol. I, II. (The Oxford Engineering Series.) Oxford: At the Clarendon Press 1953. XVI, VIII 476, 400 p. 84 s. f. 2 Vols.

Dieses zweibändige Werk ist eine Fortführung der unter dem gleichen Haupttitel erstmals 1938 erschienenen zwei Bände, die von S. Goldstein herausgegeben wurden und inzwischen zu den meist zitierten und für die weitere Entwicklung entscheidend wichtigen Handbüchern der Strömungsforschung gehören. Während der „Goldstein“ sich auf inkompressible Strömungen beschränkte, soll der Untertitel „High Speed Flow“ der neuen Bände darauf hinweisen, daß das Hauptanliegen hier der durch die rasche Entwicklung zu immer höheren Fluggeschwindigkeiten entscheidend wichtig gewordene Einfluß der Kompressibilität ist. Da der „Goldstein“ die inzwischen erforderlich gewordene Neubearbeitung noch nicht erfahren hat, wird man es begrüßen, daß seine zwei Kapitel über die Wärmeübertragung in laminaren und turbulenten Strömungen in überarbeiteter Fassung im vorliegenden neuen Werk aufgenommen worden sind. Unter Forderung durch das Fluid Motion Sub-Committee of the Aeronautical Research Council hat L. Howarth unter Mitwirkung von H. B. Squire und des inzwischen verstorbenen C. N. H. Lock es verstanden, hervorragende Autoren heranzuziehen und trotz des individuellen Charakters der einzelnen Teile (deren Autoren im Gegensatz zum „Goldstein“ jeweils angegeben sind) ein geschlossenes und wohlhabestimmtes Gesamtwerk erstehen zu lassen, das ebenbürtig dem „Goldstein“ an die Seite tritt. Die Ausstattung ist wieder hervorragend, und auch die ausgezeichnet wiedergegebenen schönen und eindrucksvollen Strömungsaufnahmen aus verschiedensten Quellen bereichern wesentlich das Werk. Zahlentafeln und Unterlagen für die graphische Behandlung der Gasströmungen sollen in zwei von L. Rosenhead herausgegebenen Zusatzbänden selbständig herausgebracht werden. An dieser Stelle kann eine angemessene Würdigung des umfassenden Werkes aus Raumgründen nicht gegeben werden. Eine Inhaltsübersicht vermittelt wenigstens ein Bild von der Gesamtanlage des Werkes: I. Einführung (L. Howarth); II. Die Bewegungsgleichungen der Gasströmungen (L. Howarth); III. Die Charakteristikenmethode (R. E. Meyer); IV. Stoßwellen (C. B. Illingworth) und Explosionswellen (G. J. Kynch); V. Einige exakte

ösungen der Gleichungen stationärer isentropischer Strömungen reibungsloser Gase (W. G. Ickley); VI. Eindimensionale Strömung (O. A. Saunders); VII. Die Hodographentransformation (M. J. Lighthill); VIII. Approximative Verfahren (G. N. Ward); IX. Instationäre Bewegung (G. Temple); X. Grenzschichten (A. D. Young). — Der zweite Band bringt zunächst in Kap. XI eine sehr ausführliche Darstellung der experimentellen Methoden (J. W. Holder, D. C. MacPhail und J. S. Thompson), und zwar 1. Windkanäle und zweigete Objekte, 2. Unsicherheiten und Korrekturen bei Windkanalmessungen, 3. Messungen an besonderen Geräten, 4. Sichtbarmachung und Photographie der Strömungen. Es folgen: II. Strömungen um Tragflügel und Zylinder (W. A. Mair und J. A. Beavan); XIII. Strömungen um Drehkörper (W. F. Cope); XIV. Wärmeübertragung in laminarer und in turbulenter Strömung (H. B. Squire). Auch der zweite Band enthält eine Fülle von Material, eingehend auch zuvor geheimgehaltene Ergebnisse aus dem letzten Kriege, in übersichtlicher und ausführlicher Darstellung mit vielen Figuren und schönen Strömungsaufnahmen. Er wird abgeschlossen mit dem Autoren- und Sachverzeichnis des Gesamtwerkes. Es besteht kein Zweifel, daß der „Howarth“ bald ebenso unentbehrlich sein wird wie seit 15 Jahren der „Goldstein“.

H. Görtler.

Tricomi, Francesco G.: Correnti fluide transoniche ed equazioni a derivate parziali di tipo misto. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **12**, 37—52 (1953).

La conferenza espone in forma semplice e accessibile anche ai non specialisti di Aerodinamica la connessione tra correnti fluide transoniche e equazioni di tipo misto, come la (1) $\eta z_{xx} + z_{yy} = 0$, studiata dall'A. fino dal 1923 (Mem. R. Accad. Lincei, V. Ser. **14**, 133—247 (1923)). Se ρ è la densità del gas, φ il potenziale di velocità, ψ la funzione di corrente, e g_0 una costante, si ottiene il sistema: $\varphi_x = (g_0/\rho) \psi_y$, $\varphi_y = -(g_0/\rho) \psi_x$, da cui, eliminando φ , si ha l'equazione

$$(\partial/\partial\psi)\{(\rho_0/\rho)(\psi_x/\psi_y) + (\partial/\partial x)\{(\rho_0/\rho)(\psi_x/\psi_y)\} = 0;$$

opportune ipotesi permettono di eliminare ρ e di giungere ad una equazione nella sola funzione incognita ψ , equazione però non lineare, detta da alcuni di Steichen. Tale difficoltà si supera, passando dal piano x, y al piano dell'odografia, in cui le coordinate sono le componenti v_x, v_y della velocità (trasformazione di Molenbroek-Chaplygin). Introdotta le coordinate polari $r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ e θ , e fatte alcune ipotesi supplementari (cfr. n. 5, p. 41), in particolare che valga l'equazione di stato $p = f(\rho)$, f funzione crescente, si giunge al sistema $\theta = (v/g_0)\psi$, $\rho = (g_0/v)\psi$ ($M^2 = 1/\psi^2$), dove M è il numero di Mach: $M = v/a$, con $a = \sqrt{f'(\rho)}$ velocità del suono (nell'intorno del punto considerato); è $M < 1$ nel campo sub-

sonico, $M > 1$ nel campo supersonico. Posto $\eta = \int_{v_c}^v \frac{g_0}{\rho_0} \frac{dv}{v}$, con v_c velocità critica e $(\rho_0/g_0)^2$

$M^2 - 1 = A(\eta)$ si ha il sistema $\psi\psi_{\eta} = \psi_{\eta\eta}$, $\psi_{\eta} = A(\eta)\psi_{\eta\eta}$, dal quale, eliminando ψ , segue: 2) $A(\eta)\psi\psi_{\eta\eta} + \psi_{\eta\eta\eta} = 0$. Questa non coincide con la (1), ma, poiché $A(0) = 0$, se inoltre $A'(0) = 0$, la (2) si può ricondurre alla (1) in via approssimata. Alcuni autori scelgono $f(\rho)$ in modo che risulti rigorosamente (3) $A(\eta) = k\eta$ (k cost.), chiamano legge transonica l'equazione di stato corrispondente e „Tricomi-gas“ un gas per cui valga la (3) [cfr. le citazioni a p. 47, note (4) e (5)]. Si danno infine varie formule delle quali alcune atte al calcolo effettivo, che caratterizzano le proprietà fisiche del „Tricomi-gas“, ed si traccia il diagramma che rappresenta la legge transonica.

M. Cignini-Cibrario.

Sevelev, Ja. V.: Die Poiseuil-Strömung in einem asymmetrischen Ringrohr. Die Analogie zur Torsion eines Balkens. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 35—38 (1953) [Russisch].

Verf. bestimmt die Geschwindigkeiten in einer von zwei zueinander exzentrischen Kreisröhren begrenzten Poiseuil-Strömung, indem er von der Lösung von Macdonald [Proc. Cambridge philos. Soc. **8**, 62–68 (1894)] für die Torsion eines in ähnlicher Weise begrenzten elastischen Stabes ausgeht und von der Analogie beider Probleme Gebrauch macht. Die Durchflußmenge wird als Funktion des Durchmesser-Verhältnisses beider Röhre sowie der Exzentrizität des inneren Rohres graphisch dargestellt. Es zeigt sich, daß die Anwesenheit des Einsatzrohres die Durchflußmenge in keinem Falle vergrößert, wodurch das Ergebnis einer von M. D. Kuznetsov (dies. Zbl. **46**, 185) durchgeführten Untersuchung richtiggestellt wird.

S. Woinowsky-Krieger.

Lighthill, M. J.: Theoretical considerations on free convection in tubes. Quart. J. Mech. appl. Math. **6**, 398—439 (1953).

Es handelt sich um freie Konvektionsströmungen in erhitzten vertikalen Zylindern, die am unteren Ende geschlossen sind und am oberen Ende in ein Reservoir von Kühlungs-

flüssigkeit münden. Es werden drei Strömungskonfigurationen vom Grenzschichttyp unterschieden, die durch die charakteristischen Parameter l/a (l Länge, a Radius) und G_a (modifizierte Grashof'sche Zahl $G_a = \alpha(T_0 - T_1) f a^3 / \nu \alpha$ mit dem Ausdehnungskoeffizienten α , der Temperaturleitfähigkeit ν und der Beschleunigung f) gekennzeichnet sind. Die Grenzschichtdifferentialgleichungen werden mittels eines Ansatzes nach Kármán-Pohlhausen approximativ gelöst. Dazu treten noch Plausibilitätsbetrachtungen. A. Laminare Strömung: Die beiden charakteristischen Parameter reduzieren sich hier auf den einen Parameter $t_1 = (a/l) G_a$. Die genannten drei Strömungskonfigurationen lassen sich folgendermaßen beschreiben: Bei festem G_a haben wir 1. für kleinere l/a Grenzschichtströmungen mit einem Potentialkern, 2. für größere l/a Grenzschichtströmungen, die den ganzen Zylinder ausfüllen. Bei einem begrenzenden l/a besitzt die Strömung Ähnlichkeitscharakter. 3. Für noch größere l/a (durch Vergrößerung von l) enthält der zugekommene Teil des Zylinders Flüssigkeit im Ruhezustand, während der restliche Teil den Ähnlichkeitsstatus aufweist. - Für das Geschwindigkeits- und Temperaturprofil werden Polynome angesetzt. Diese erfüllen die Randbedingungen an der Wand und in der Achsenmündung; ferner die Relationen, die sich aus den Differentialgleichungen des Impulses und der Energie für Wand und Achse ergeben, und schließlich genügen sie dem Integralsatz der Masse. Zur weiteren Behandlung werden dann die Integralsätze des Impulses und der Energie herangezogen. Die Trägheit der Strömung wird, außer im zitierten Ähnlichkeitsfall, vernachlässigt. Als Ergebnis erwähnen wir, daß oberhalb eines kritischen Wertes $t_1 \approx 4000$ die (auf a bezogene) Nusselt'sche Zahl N_a wie $t_1^{1/4}$ und unterhalb wie t_1 variiert. B. Turbulente Strömung: Die Verteilung der Geschwindigkeit und Temperatur werden bei Beschränkung auf den Fall $\sigma = 1$ (σ = Prandtl'sche Zahl) durch das um ein lineares Glied erweiterte logarithmische Gesetz approximiert. Zur weiteren Behandlung werden dann bei Vernachlässigung der Trägheit die Integralsätze der Masse und der Energie sowie die Achsenrelationen des Impulses und der Energie herangezogen. Die letzteren werden dabei unter Zugrundelegung eines Austauschkoefizienten, der dem log. Gesetz äquivalent ist, formuliert. Nach dem Boden des Zylinders zu wird Übergang in den laminaren Zustand angenommen. Es ergibt sich u. a., daß die Konfiguration 1 für Kühlzwecke als die weitaus günstigste erscheint. C. Schließlich wird noch der Fall eines an beiden Enden geschlossenen, teils erhitzten und teils gekühlten Zylinders erörtert. - Der Vergleich mit Messungen steht noch aus.

W. Szablewski.

Priestley, C. H. B.: Buoyant motion in a turbulent environment. Austral. J. Phys. 6, 279—290 (1953).

Solutions are given of the simultaneous equations for the vertical velocity and temperature of an element of fluid moving under buoyancy and subject to continuous mixing of heat and momentum with the environment. Three distinct modes of behaviour result: (A) ascent followed by damped oscillations, (B) asymptotic ascent to an equilibrium level, (C) absolute buoyancy in which the ascent ratio increases indefinitely. For an environment in which the lapse rate is subadiabatic the motion is of type A for sufficiently large elements but may become B for the smaller elements. In the superadiabatic lapse rates mode is C for sufficiently large elements and B for the smaller elements, which are in no way unstable. The mode of motion is independent of the initial conditions but the scale of motion is not. The same formulation applies within known limits to the ascent of saturated air and applications made to atmospheric convection include the verification of a formula for the period of large cloud tops oscillating in a stable layer.

Autoreferat.

Szablewski, W.: Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung. Ingenieur-Arch. 21, 323—330 (1953).

Im Anschluß an früher durchgeführte Beobachtungen und Messungen wird der Einlaufvorgang einer turbulenten Rohrströmung theoretisch untersucht, wobei die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht durch das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz approximiert wird und die empirischen Koeffizienten dieses Gesetzes der Theorie der voll ausgebildeten Rohrströmung entnommen werden. Berechnet werden: der örtliche Druckverlust, der Gesamtdruckverlust und die Wandschubspannung, ferner die Kernlängen und die Geschwindigkeitsverteilung im Einlauf.

Th. Pöschl.

Szablewski, Witold: Der Einlauf einer turbulenten Rohrströmung. Zur Methodik des Rechenganges. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. 1—18. 1. 1953, 255—261 (1953).

Eine Theorie der turbulenten Strömungen, die es gestatten würde, auf rein mathematischem Wege die charakteristischen Kennwerte zu berechnen, liegt derzeit noch nicht vor. Durch Analyse vorliegender Messungen ist es jedoch dem

Verf. gelungen, zu erkennen, daß turbulente Grenzschichten mit Druckabfall eine gute Approximation durch das bekannte logarithmische Geschwindigkeitsgesetz zulassen. Dieses Gesetz enthält zwei empirische Konstanten, die vom Druckgradienten der Strömung, also von den äußeren Bedingungen unabhängig sind, so daß nur der Zähigkeitseinfluß verbleibt. Diese Feststellungen ermöglichen es dem Verf., den Einlauf einer turbulenten Rohrströmung theoretisch in Angriff zu nehmen.

Th. Pöschl.

Chuang, Feng-Kan: On the decay of turbulence. *Chinese J. Phys.* 9, 201—213 u. engl. Zusammenfassg. 214 (1953) [Chinesisch].

This paper consists of two parts. The first part gives a description of the motion of large eddies in a turbulent flow. The non-stationary character of the large eddies is emphasized. Up to present, there appears to be some confusion regarding the law of turbulence decay, especially the variation of the microscale with time. This paper introduces a new characteristic length for large eddies which leads to a new decay law valid at the initial period. The apparent discrepancies between Kolmogoroff's decay law and Lin's decay law are seen to be due to different expansions of the present one. It is hoped that the physical picture described herein would give some further insight into the structure of turbulence. In the second part, an analysis similar to that adopted by Sedov for the correlation coefficients is applied to the turbulent spectrum. New results are obtained, in particular the transition of the decay law from the initial period to the final period.

Autoreferat.

Tehen, C. M.: On the spectrum of energy in turbulent shear flow. *J. Res. nat. Bur. Standards* 50, 51—62 (1953).

Verf. macht den Versuch, Spektral-Gesetze für große Wellenzahlen im Gleichgewichtszustand unter der Annahme einer starken mittleren Scherströmung abzuleiten.

F. W. Riegels.

Parker, Eugene N.: Acoustical radiation from the velocity field in a compressible fluid. *Phys. Review, II. Ser.* 90, 240—242 (1953).

Ausgehend von der inhomogenen Wellengleichung $\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \varphi = -4\pi f(\mathbf{r}, t)$, wo $f(\mathbf{r}, t)$ innerhalb eines endlichen Gebietes D nicht verschwindet, führt der Verf. Fourier-Transformierte ein und erhält auf einfache Weise den strahlenden Anteil des Geschwindigkeitsfeldes einer Strömung im kompressiblen Medium. In einem weiteren Abschnitt wird derselbe außerdem aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen abgeleitet. Verf. bemerkt, daß seine Formulierung für Punktquellen keine besonderen Vorzüge bietet, daß aber für alle anderen Quellen, deren Behandlung mit den üblichen Methoden sehr umständlich wird, seine Methode von Vorteil ist. Keine numerischen Ergebnisse.

F. W. Riegels.

Jacobs, Willi: Theoretical and experimental investigations of interference effects of delta wing. Vertical tail combinations with yaw. *Flygtekn. Försöksanstalt., Medd.* 49, 34 S. (1953).

Es ist die aerodynamische Beeinflussung zwischen einem Delta-Flügel und Seitenleitwerk theoretisch und experimentell untersucht worden. Die Versuche wurden ausgeführt an einem Delta-Flügel mit 70° Pfeilwinkel (bezogen auf Vorderkante) und drei verschiedenen Seitenleitwerken (zwei einkielig mit verschiedenem Pfeilwinkel, eines doppelkielig); sie umfassen Kraftmessungen und Druckverteilungsmessungen. Eine starke Beeinflussung wurde vor allem beim Rollmoment gefunden. Bei kleinen Anstellwinkeln, wo keine Ablösung der Strömung vorhanden ist, ergab sich gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

H. Schlichting.

Marchetti, Luigi: Caratteristiche aerodinamiche di particolari corpi di rivoluzione in moto in un'atmosfera molto rarefatta. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* 86, 303—314 (1953).

Preti, Ermenegildo: Calcolo di elementi di copertura nelle costruzioni aeronautiche. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* 86, 367—379 (1953).

● **Rauscher, Manfred:** Introduction to aeronautical dynamics. New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1953. 664 p. \$ 12,—.

Keulegan, Garbis H.: Characteristics of internal solitary waves. *J. Res. nat. Bur. Standards* **51**, 133—140 (1953).

Für die Trennungsfläche zwischen zwei Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung (Frischwasser über Salzwasser) wird in erster Näherung die Geschwindigkeit und Energie der inneren Wellen sowie ihre Rückwirkung auf die Form der freien Oberfläche, in zweiter Näherung die Geschwindigkeit der ohne Deformation laufenden solitären Wellen in Abhängigkeit vom Dichteverhältnis abgeleitet. *J. Pretsch.*

Eckart, Carl: The generation of wind waves on a water surface. *J. appl. Phys.* **24**, 1485—1494 (1953).

Es wird versucht, einige Erscheinungen der Entstehung von Windwellen im Sturmgebiet und im Zerfallsgebiet fern vom Sturmzentrum durch statistische Behandlung eines Böenfeldes zu erklären, indem auf Grund der strengen Lösung für die von einer einzelnen Bö verursachte Oberflächenauslenkung die Korrelation von Wellen berechnet wird. *J. Pretsch.*

Elektrodynamik, Optik:

Infeld, L.: An electronic cloud in a homogeneous electric and magnetic field according to Dirac's theory. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **1**, 99—104 (1953).

Das in einer früheren Note (dies. Zbl. **51**, 191) angegebene Näherungsverfahren wird auf zwei Spezialfälle angewandt: die Bewegung einer kleinen Raumladung in einem homogenen elektrischen bzw. magnetischen Feld. Das am Schluß erhaltene Ergebnis, daß die Raumladung sich anders verhält, als man es nach den Lorentzschen Gleichungen erwarten würde, trifft nach Ansicht des Ref. nicht zu. Die Gleichung (32) beschreibt nach Korrektur der Druckfehler nicht die angegebene Anfangsbedingung. Vgl. auch Höhler, dies. Zbl. **46**, 440.

G. Höhler.

Muzikář, Čestmír: A remark on the generalized electromagnetic field theory. *Czechosl. J. Phys.* **3**, 256—257 (1953).

McMahon, James: Lower bounds for the electrostatic capacity of a cube. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **55**, 133—167 (1953).

Die elektrostatische Kapazität C eines Würfels der Kantenlänge s berechnet sich aus einer im Unendlichen wie $1/r$ verschwindenden, auf der Würfeloberfläche den Wert 1 annehmenden Potentialfunktion u aus $4\pi C = \int_V \text{grad}^2 u \, dv$ ($V =$ Außenraum des Würfels). Für C besteht die Kelvin-Trefftzsche Ungleichung, die eine untere Schranke für C durch gewisse Hilfsvektorfelder liefert. Verf. konstruiert geeignete solche Felder aus „Pyramiden-Vektorfeldern 2. Klasse“, die als äußeres Produkt der Gradienten von „Pyramidenfunktionen“ definiert werden. Diese sind die räumlichen Analoga zu den in der Ebene von J. L. Synge (dies. Zbl. **44**, 319) untersuchten Hilfsfunktionen und sind bei Einteilung des Raumes in Tetraeder in einigen Tetraedern lineare Funktionen und sonst überall Null. Verf. gewinnt so die untere Schranke $C > 0.63927 s$. *L. Collatz.*

Carlson, J. F. and T. J. Hendrickson: Variational methods for problems in resistance. *J. appl. Phys.* **24**, 1462—1465 (1953).

Die betrachtete Randwertaufgabe bezieht sich auf die Widerstandsberechnung eines Kreiszylinders, dessen eine Grenzebene ein festes Potential hat. Auf der zweiten parallelen Grenzebene ist für $a < r < b$ ein festes Potential gegeben, während für $0 < r < a$ die erste Ableitung des Potentials nach der Achsenrichtung gleich Null ist. Auf der Mantelfläche ist die erste Ableitung des Potentials nach dem Radius gleich Null. Verf. stellt eine Greensche Funktion dieser Aufgabe auf, welche die Randbedingungen erfüllt. An Stelle dieser nicht einfach zu berechnenden Greenschen Funktion benutzt der Verf. eine zweite, welche für die beiden Grenzebenen gleich Null ist. Diese läßt sich leicht angeben. Aus ihr berechnet Verf.

das Potential im Zylinder und den Widerstand. Verschiedene Tafeln zeigen numerische Ergebnisse bei verschiedener Wahl der Potentialfunktionen. *M. J. O. Strutt.*

Huber, A.: Die Randwertaufgabe der Geoelektrik für Kugel und Zylinder. *Z. angew. Math. Mech.* **33**, 382—393 (1953).

In allgemeiner Formulierung lautet die vorliegende Randwertaufgabe: Der ganze Raum enthält zwei Medien, je für sich homogen isotrop mit gegebenem spezifischen Widerstand. Das Potential genügt in jedem Medium der Laplaceschen Gleichung. An der Grenzfläche ist die Normalkomponente der elektrischen Stromdichte stetig. Es ist eine Punktstromquelle vorhanden, in deren Umgebung das Potential definiert wird. Diese Aufgabe wird zunächst für den Fall einer kugelförmigen Trennfläche der Medien behandelt, wobei die Stromquelle sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel angenommen wird. Das berechnete Potential im Raume wird kurvenmäßig dargestellt. Als zweiten Fall behandelt Verf. eine kreiszylindrische Trennfläche mit einem Quellpunkt in beliebiger Lage und als Sonderfälle mit dem Quellpunkt außerhalb des Zylinders bzw. auf der Zylinderfläche. Die Aufgaben werden durch Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen im ersten und nach Besselschen Funktionen im zweiten Fall gelöst. Auch im zweiten Fall werden Kurven für die Lösung angegeben. *M. J. O. Strutt.*

Lortkipanidze, B. G.: Die Potential- und Stromverteilung in einem verzweigten Schienennetz mit einem Knotenpunkt. *Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR* **14**, 95—99 (1953) [Russisch].

Yeh, Kai-Yuan: Electric circuit analysis by the method of difference equation. *Chinese J. Phys.* **9**, 192—199 u. engl. Zusammenfassg. 199—200 (1953) [Chinesisch].

The method of difference equation recently employed by Chien Wei-Zang (this Zbl. **52**, 205) in his treatment of continuous beams is applied here to the solution of electric circuit problem. The present paper is confined to the problem of the continuous network (I) in steady state, (II) in transient state. In (I), the chief result is

$$v_x = P_0 \alpha_x + Q_0 \beta_x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\alpha_{i-1} \beta_i - \alpha_i \beta_{i-1}},$$

where v_x is the voltage at the point x , α_x and β_x are defined by $\alpha_{x+2} = p_{x+2} \alpha_{x+1} + q_{x+2} \alpha_x$, $\alpha_{x+2} = p_{x+2} \beta_{x+1} + q_{x+2} \beta_x$, $\alpha_0 = \beta_1 = 0$, $\alpha_1 = \beta_0 = 1$; p_x, q_x, F_x are defined by $p_x = 1 + Z_{x-1} Z'_{x-1} / Z_{x-1} Z_{x-2}$, $q_x = -Z_{x-1} Z_{x-2}$, $F_x = e_{x-1} - e_{x-2} Z_{x-1} / Z_{x-2} - e'_{x-1} Z_{x-1} / Z_{x-1}$; p_x, Z_x and e_x, Z'_x are the applied voltage and impedance between the nodes $x, x+1$ and x, x' respectively. P_0 and Q_0 are integration constants, which can be determined by the terminal conditions. — In (II), we use the Laplace transformation to solve the problem of the electric circuit in transient state. At first, we transform the circuit into one in an equivalent steady state and hence obtain the equivalent steady voltage with the previous method. Then we get the required solution by means of the inverse Laplace transformation. *Autoreferat.*

Manacorda, Tristano: Studio di un circuito non lineare col metodo stroboscopico di N. Minorsky. *Boll. Un. mat. Ital.* **III**, Ser. **8**, 281—285 (1953).

Verf. betrachtet einen elektrischen Schwingungskreis mit festem Ohmschem Widerstand und periodisch schwankender Kapazität, wobei die Induktivität eine gekrümmte Stromfeld-Kennlinie haben soll. Widerstand, Kapazitätsschwankung und Kennlinienkrümmung sollen gering sein, und die Kapazitätsschwankungen sollen genau mit der doppelten Grundfrequenz des Schwingungskreises erfolgen. — Ein in einem zähen Mittel schwingendes Pendel, dessen Länge sich (etwa durch Dehnung infolge Zentrifugalkraft) mit der doppelten Grundfrequenz ändert, führt auf dieselbe Differentialgleichung $x'' + x - \lambda [x'(a - 2 \sin 2t) + b x^3 - x \cos 2t] = 0$. Hierauf läßt sich das „stroboskopische“ Verfahren von Minorsky (dies. Zbl. **42**, 100) anwenden. Ergebnis: Solange der Widerstand einen gewissen Wert nicht überschreitet ($a < 0.5$), existiert eine stabile Schwingung mit einer bestimmten Amplitude und einer Frequenz, die in erster Näherung gleich der Grundfrequenz (für $\lambda = 0$) ist. *U. T. Bödewadt.*

Tabellini, Paola: Su una guida d'onda con uno schermo conduttore. *Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena* **6** (1951/52), 87—97 (1953).

L'A. determina i modi di propagazione in una guida a sezione circolare in cui è inserito uno schermo cilindrico conduttore sottile coassiale con la parete della guida stessa. Dimostra che i modi simmetrici sono TE o TM e che i modi asimmetrici sono, in generale, ibridi; determina inoltre, per i modi simmetrici e nell'ipotesi di grande conduttività dello schermo, il coefficiente di assorbimento e la velocità di propagazione. *D. Graffi.*

Vašíček, Antonín: The reflection of light from a metal coated with thin films.
Czechosl. J. Phys. 1, 73—77 (1952).

Man hat metallische Spiegel mit einem Film oder auch mit mehreren versehen, um die Lichtstärke des zurückgeworfenen Lichtes zu erhöhen oder auch die Oberfläche der Spiegel zu schützen. Formeln sind von R. Messner [Optik 2, 228 (1947)] und K. Steinbuch [Z. angew. Phys. 1, 256 (1949)] aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet worden, hier sollen sie — unter Beschränkung auf senkrechten Lichteinfall — aus den bekannten Fresnelschen Gleichungen bestätigt werden. Diese geben für Glas: $r^2 = (n-1)^2/(n+1)^2$, für Metall hat man sie unter Einführung eines komplexen Brechungsverhältnisses $(n - i n k)$ verallgemeinert zu: $r e^{-i\alpha} = (n-1 - i n k)/(n+1 - i n k)$, woraus eine Phasenwirkung α und die Stärke des zurückgeworfenen Lichtes abgeleitet werden kann, diese ist $r^2 = [(n-1)^2 + n^2 k^2]/[(n+1)^2 + n^2 k^2]$. Liegt auf Glas oder Metall ein Film von der Dicke d_1 und dem Brechungsverhältnis n_1 , so erhält man — Interferenz unendlich vieler Strahlen angenommen — für Glas $r e^{i\delta} = (r' + r'' e^{-i\alpha})/(1 + r' r'' e^{-i\alpha})$, für Metall $r e^{i\delta} = (r' + r'' e^{-i(\alpha_1 + \alpha)})/(1 + r' r'' e^{-i(\alpha_1 + \alpha)})$,
 $r^2 = [r'^2 + r''^2 + 2 r' r'' \cos(\alpha_1 + \alpha)]/[1 + r'^2 r''^2 + 2 r' r'' \cos(\alpha_1 + \alpha)]$,

wo $\alpha_1 = (4\pi/\lambda) n_1 d_1$ ist, r' sich auf die Fläche Luft — Film, r'' und α sich auf die Fläche Film — Metall beziehen, r und δ auf das Ergebnis. Den Höchstwert hat r für $\alpha_1 + \alpha = 2\pi, 4\pi, \dots$; es wird festgestellt, daß durch einen stark brechenden Stoff (TiO_2) r für Silber von 95,16% auf 96,33% erhöht werden kann, für Stahl von 58,43% auf 62%. Doch ist r stark von λ abhängig. Die Formeln werden auch für zwei Filme abgeleitet. H. Boegehold.

Vašíček, Antonín: The reflection of light from glass with a thin metallic film.
Czechosl. J. Phys. 3, 126—134 u. russ. Zusammenfassg. 134—136 (1953).

Die Arbeit behandelt einen dem eben besprochenen entgegengesetzten Fall, eine Glasplatte, die mit einem metallischen Film bedeckt ist. Aus den Brechwerten für Luft n_0 , Film $n_1 - i n_1 k_1$, Glas n lassen sich ebenso wie dort Intensitäten r', r'' und die zugehörigen Phasen δ', δ'' ableiten; aus ihnen mit Hilfe der Dicke des Films die schließliche Stärke r . Der Verf. meint aber, zu einem Widerspruch zu kommen, da für $r' = 1$ nicht $r = 1$ komme, was energetisch nötig sei, und will deshalb die Bildung von δ'' ändern; Ref. scheint das nicht überzeugend, da $r' = 1$ auf $n' = 0$ führt und außerdem die Summierung, durch die r gebildet wird, keinen Sinn hat, wenn alle Summanden Null sind. Im letzten Teil wird ausgeführt, daß man den metallischen Film durch zwei nichtmetallische Filme von passender Dicke ersetzt denken könne. H. Boegehold.

Vašíček, Antonín: Multiple thin dielectric films as mirrors and interference filters.
Czechosl. J. Phys. 3, 206—222 u. russ. Zusammenfassg. 222—224 (1953).

Die Frage ist: Eine Glasplatte ist von einer Anzahl dünner Schichten bedeckt, kann durch eine solche Zusammenstellung dieselbe Zurückwerfung erreicht werden wie durch einen Metallspiegel? Die Einzelschichten (eine ungerade Zahl k) mögen abwechselnd aus einem hochbrechenden Stoff (etwa TiO_2 ; $n_1 = 2,4000$) und einem niedrigbrechenden (etwa MgF_2 ; $n_2 = 1,3600$) bestehen. Für das Glas sei der Brechwert n (BK 7, $n = 1,5180$); an Luft und Glas sollen Schichten von n_1 grenzen. Man hat dann für die reflektierten Amplituden: Glas — erste Schicht: $r_0 = (n - n_1)/(n + n_1)$, erste Schicht — zweite Schicht: $r' = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$, zweite Schicht — dritte Schicht: $-r'$, letzte Schicht — Luft: $\tilde{r} = (n_1 - 1)/(n_1 + 1)$. Es werden die Glaswege in den Schichten gleich angenommen, $(2\pi/\lambda) 2 n_1 d_1 = (2\pi/\lambda) 2 n_2 d_2 = \dots = x$. Zunächst werden Näherungsformeln abgeleitet, indem an jeder Grenze nur ein Zurückwurf angenommen wird. Die Schlußformel lautet für die zurückgeworfene Lichtstärke R_k :

$$R_k^2 = m^2 + r''^2 + r'^2 \frac{\sin^2(k+1) \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} + 2 m r'' \cos k x + r' (r'' - m) \frac{1 + \cos x - \cos k x - \cos(k+1) x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} x},$$

wo $m = r_0 + r'$, $r'' = r' - r'$. Dieser Ausdruck ändert sich periodisch mit der Anzahl k , nur für $x = 180^\circ$ wächst er beständig und nähert sich 1. Eine genaue Rechnung — vielfacher Zurückwurf — zeigt aber für größeres k merkbare Abweichungen und führt schon für etwas abweichende Werte (etwa $x = 150^\circ, 210^\circ$) zur Annäherung an 1 (etwa $k = 11$). Der Verlauf wird für einfache Fälle graphisch dargestellt. Der zweite Teil der Arbeit fragt, wie man durch mehrere zwischen zwei Glasplatten eingeschlossene Filme einfaches Licht aussondern kann. Für 15 Schichten kommt man darauf, daß für eine Wellenlänge $R = 0$, also bei Vernachlässigung der Dämpfung, die durchgelassene Wirkung $T = 1$ werden kann und nach beiden Seiten des Spektrums stark abfällt, es bleiben aber in weiterer Entfernung noch merkliche Lichtmengen übrig, so daß man noch andere Mittel zur Hilfe nehmen muß. H. Boegehold.

Altenburg, Kurt und Siegfried Kästner: Wellenausbreitung in geschichteten Medien bei senkrechtem Einfall und die Anwendung auf Leitungstheorie, elektrische Wellen, Optik, Akustik, Wellenmechanik sowie mechanische und elektrische Vierpolketten.
Ann. der Physik, VI. F. 13, 1—43 (1953).

Verff. geben von einem einheitlichen Standpunkt aus eine Zusammenstellung von ein-dimensionalen Wellenproblemen. Dabei wird das in der Vierpoltheorie angewandte Rechen-

schema benutzt. Die Form des aus der Leitungstheorie bekannten Differentialgleichungssystems

$$k_1 b + k'_1 (\partial b / \partial t) + \partial a / \partial x = 0, \quad k_2 a + k'_2 (\partial a / \partial t) + \partial b / \partial x = 0$$

dient als Grundlage. Unter dieses Schema rechnen die Verff. ein: Elektrische Wellen, Longitudinalwellen in Flüssigkeiten und Festkörpern, Transversalwellen in Festkörpern, Wellenmechanik [dabei wird $y = b$ und $\partial \varphi / \partial x = (m/2\hbar) a$ angesetzt], Mechanische Vierpole (Massenpunktfederketten). -- Die Koeffizienten der Differentialgleichungen werden dabei als stückweise konstant vorausgesetzt, wodurch eine Einteilung in Schichten vorgenommen werden kann. Bei harmonischer Zeitabhängigkeit finden wir in Analogie zur Vierpoltheorie die Wellenkonstante zu $Z = 1/(k_1 - j\omega k'_1)(k_2 - j\omega k'_2)$, und die Ausbreitungskonstante zu $p = 1/(k_1 - j\omega k'_1)(k_2 - j\omega k'_2)$. Die Lösung für eine Schicht lautet dann

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos p d & Z \sin p d \\ Z^{-1} \sin p d & \cos p d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_d \\ b_d \end{pmatrix}.$$

Nach einer Zusammenstellung der Differentialgleichungen und der Konstanten einzelner Probleme behandeln die Verff. unter anderem die Wellenausbreitung in geschichteten Medien, die Schalldurchlässigkeit einer Metallplatte in einer Flüssigkeit, die abgestützte Lecherleitung, den Tunneleffekt und Massenpunktfederketten. Verff. weisen auch auf die Möglichkeit hin, „Analogierechenmaschinen“ zu bauen; denn mit Hilfe elektrischer Schaltelemente können modellmäßige Nachbildungen gewisser Probleme leicht ausgeführt werden. Die Arbeit enthält über 60 Literaturhinweise.

H. Falkenhagen — G. Kelbg.

Ramanathan, N. L.: Phase reciprocity relation in light scattering. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **37**, 385—392 (1953).

Bekanntlich sind die Beziehungen zwischen den Stokesschen Parametern des einfallenden und gestreuten Lichtes linear. Von den 16 Koeffizienten bleiben bei symmetrischen Bedingungen nur 6 übrig. Dann bestehen zwei Reziprozitätsrelationen. Verf. beschreibt eine Versuchsanordnung, wie die zweite Reziprozitätsrelation durch Lichtstreuung an Kolloiden nachgewiesen werden kann.

H. Falkenhagen — G. Kelbg.

Janeel, Raymond et Théo Kahan: Couplage et conditions de réflexion des ondes électromagnétique ordinaire et extraordinaire dans un plasma inhomogène et anisotrope (ionosphère). C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1657—1659 (1953).

Durchsetzt eine elektromagnetische Welle die Ionosphäre in vertikaler Richtung bei Anwesenheit eines Magnetfeldes, so wird sie in zwei Komponenten aufgespalten, solange sie nicht einen Bereich sehr starker Reflexion durchkreuzt. Trifft sie jedoch auf einen solchen, so tritt eine Aufspaltung in drei Komponenten ein, wobei die dritte Komponente eine sehr kleine Amplitude aufweist.

Th. Seixl.

● **Curry, C.:** Geometrical optics. London: Edward Arnold and Co. 1953. VIII, 173 p. 21 s net.

Eine kurze Darstellung der Gesetze der Strahlenoptik, ihrer Anwendung auf Prismen und Linsen, der optischen Abbildung und der Abweichungen, sowie der Grundlagen der optischen Instrumente.

H. Boegehold.

Combe, René et Marc Feix: Fréquences et puissance des ondes rayonnées dans un onduleur magnétique. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1660—1662 (1953).

In Fortsetzung einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. **51**, 435) über die relativistische Berechnung der Elektronenbahnen in einem magnetischen Wellengenerator wird aus der gefundenen Elektronengeschwindigkeit als Funktion des Ortes und der Zeit die mittlere ausgestrahlte Leistung bestimmt. Es zeigt sich, daß diese dieselbe Größenordnung hat wie auf Grund der angenäherten klassischen Rechnung.

W. Glaser.

Relativitätstheorie:

Stiegler, Karl Drago: Sur les rapports entre le principe de Maupertuis-Lagrange et celui de Fermat d'une part et la théorie de la relativité restreinte et la mécanique ondulatoire d'autre part. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 1052—1063 (1953).

Déduction des équations de Lorentz à partir d'un système de postulats impliquant 1° la principe de Relativité des référentiels galiléens, 2° les lois fon-

damentales de la Mécanique ondulatoire de L. de Broglie. C'est en somme une variante de la méthode classique, où l'on substitue au photon associé à la lumière un corpuscule quelconque.
O. Costa de Beauregard.

Kirkwood, Robert L.: The physical basis of gravitation. Phys. Review, II. Ser. 92, 1557—1562 (1953).

Krbek, F. von: Anfangsgründe der allgemeinen Relativitätstheorie. Wiss. Z. Univ. Greifswald, math.-naturw. R. 2, 23—36 (1953).

Takeno, Hyôitirô: Static spherically symmetric space-times in general relativity. Progress theor. Phys. 10, 509—517 (1953).

6848Donder, Th. de: Sur les quatre liaisons introduites dans la gravifique einsteinienne. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 1024—1026 (1953).

Expression des équations de la gravifique compte-tenu des quatre relations

$$\sum_i \frac{\partial \sqrt{-g} g^{ii}}{\partial x^i} = 0. \quad \text{Th. Lepage.}$$

Ikeda, Mineo: On a five dimensional representation of the electromagnetic and electron field equations in a curved space-time. Progress theor. Phys. 10, 483—498 (1953).

Es wird ein Riemannscher vierdimensionaler Raum zugrunde gelegt mit der speziellen Eigenschaft, daß er sich in einen ebenen fünfdimensionalen Raum einbetten läßt. Die in diesem Riemannschen Raum geltenden Gleichungen des elektromagnetischen und des Elektron-Feldes werden dann, nach Einführung einer Zuordnung der 4-dimensionalen zu 5-dimensionalen Tensoren, als Tensorgleichungen im 5-dimensionalen ebenen Raum geschrieben. Der Fall des de-Sitterschen Raumes ist ausführlich diskutiert.
A. Papapetrou.

Callaway, Joseph: The equations of motion in Einstein's new unified field theory. Phys. Review, II. Ser. 92, 1567—1570 (1953).

Verf. leitet die Bewegungsgleichungen eines „geladenen“ Körpers aus den Feldgleichungen der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$ und den schwachen Feldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$, $R_{[\mu\nu]} = 0$ ab. Dabei verfolgt er die von Infeld gegebene Rechenmethode für den Fall derselben Theorie mit den starken Feldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$. Das Ergebnis der neuen Rechnung stimmt mit dem Infeldschen überein, d. h. in der so gewonnenen Bewegungsgleichung ist keine elektromagnetische Kraft enthalten.

A. Papapetrou.

Udeschini, Paolo: Successiva linearizzazione delle ultime equazioni del campo unitario einsteiniano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 15, 165—170 (1953).

Anschließend an seine Arbeiten (dies. Zbl. 44, 229) gibt der Verf. hier die Lösungen in zweiter Näherung für die neueste Form (1953) der Einsteinschen nicht symmetrischen Feldtheorie. Die Resultate werden mit den früheren verglichen.

J. A. Schouten.

Scherrer, Willy: A propos des théories unitaires du champ. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 554—555 (1953).

Quantentheorie:

Wiener, Norbert and Armand Siegel: A new form for the statistical postulate of quantum mechanics. Phys. Review, II. Ser. 91, 1551—1560 (1953).

Es wird eine neue Darstellung der Quantenmechanik entwickelt, in der an die Stelle der Wahrscheinlichkeitsamplitude (des Hilbertvektors ψ) eine Wahrscheinlichkeitsdichte in dem sog. Differentialraum tritt, welche die Wahrscheinlichkeiten der Meßwerte einer jeden Observablen angibt. In fast allen

Punkten α des Differentialraumes kann also gleichzeitig dem Impuls ein Wert p und dem Ort ein Wert q zugeschrieben werden. Die Abweichung von der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung (bzw. Aussagenlogik) zeigt sich hier z. B. daran, daß der Wert der Observablen $(\text{Impuls})^2 + (\text{Ort})^2$ im Punkt α i. a. $\neq p^2 + q^2$ ist. *G. Süßmann.*

Wiener, Norbert et Armand Siegel: Distributions quantiques dans l'espace différentiel pour les fonctions d'ondes dépendant du spin. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1640—1642 (1953).

Die in vorstehend. Referat besprochene Darstellung des quantenmechanischen Zustandes wird auf spinabhängige Wellenfunktionen ausgedehnt. *G. Süßmann.*

Renninger, M.: Zum Wellen-Korpuskel-Dualismus. Z. Phys. **136**, 251—261 (1953).

An Hand eines Gedankenexperimentes mit einzelnen Photonen entwickelt Verf. seine (der de Broglie-Bohmschen Führungswellen-Vorstellung ähnliche) Interpretation der Quantenmechanik, in der sowohl den Teilchen mit ihren Bahnen als auch den Wahrscheinlichkeitswellen eine objektive Realität zugeschrieben wird. Im Unterschied zu den Arbeiten von Bohm (dies. Zbl. 46, 210) fehlt jedoch sowohl die quantitative Ausgestaltung des Modells als auch eine genaue Diskussion der Reduktion der Wellenpakete. *G. Süßmann.*

Rideau, Guy: Sur les principes variationnels en mécanique quantique. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1646—1648 (1953).

Eine Funktion $F(a, b, c)$ soll den Wert a annehmen, wenn $a = b = c$, und ihre erste Variation soll verschwinden, wenn a, b, c in der Umgebung eines gemeinsamen Wertes variieren. F wird analytisch vorausgesetzt. Dann gibt es mindestens einen gemeinsamen Wert $a_0 = b_0 = c_0$, in dessen Umgebung eine Potenzreihenentwicklung der Funktion $F(a, b, c)$ konvergiert. Diese Entwicklung zusammen mit der Bedingung $F(a_0, b_0, c_0) = a_0$ und der Forderung stationären Verhaltens in der Umgebung von a_0 zeigt die Abhängigkeit der Lösung des Problems von beliebig vielen Parametern. Die unmittelbare Verwendung derartiger Variationsprinzipien in der Quantenmechanik scheitert entsprechend an diesen willkürlichen Parametern. Der Mißstand läßt sich weitgehend beheben durch die einschränkende Forderung $F(la, ll'b, l'c) = F(a, b, c)$. Sie bedeutet Unabhängigkeit des Variationsprinzips von der Normierung der eingehenden Funktionen l und l' sind beziehungsweise Multiplikatoren eines Funktionenpaares Φ und Ψ , und führt zu eindeutigen Lösungen quantenmechanischer Probleme, wie Schwinger, Kahan und Rideau gezeigt haben. *M. Pintl.*

Hellund, E. J. and M. K. Brachman: Space-time representation in wave mechanics. Phys. Review, II. Ser. **92**, 822—824 (1953).

Die Schrödingergleichung wird (mit Hilfe einer Zellen-Unterteilung des Raum-Zeit-Kontinuums) in die Form einer Boltzmannschen statistischen Bewegungsgleichung transformiert. *G. Süßmann.*

Faure, Robert: Transformations conformes en mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 603—605 (1953).

Verf. weist darauf hin, daß sich mit Hilfe konformer Abbildungen gewisse ebene Eigenwertprobleme ineinander überführen lassen. So geht z. B. durch die Transformation $z = Z^2$ die Wellengleichung des ebenen Atoms, bestehend aus einem im Nullpunkt befindlichen Proton und einem Elektron, die sich in der $z = x + iy$ -Ebene bewegen, über in die Gleichung des ebenen Oszillators in der $Z = X + iY$ -Ebene. *J. Heinhold.*

Faure, Robert: Sur certains opérateurs implicites donnant lieu à des intégrales premières. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 789—791 (1953).

Der Einfluß der Existenz impliziter zeitunabhängiger Operatoren auf das Eigenwertproblem der Quantenmechanik wird untersucht. *H. Kümml.*

Kar, K. C. and S. Sanatani: The classical interpretation of Dirac's theory of electron. Indian J. theor. Phys. **1**, 1—24 (1953).

Verf. versucht, Diracs Theorie des Elektrons ohne Matrizen zu entwickeln, wobei er eine neue Methode der Linearisierung der relativistischen Hamilton-

funktion benutzt. Aus physikalischen Gründen wählt er 4 Wellenfunktionen zur Beschreibung der Bewegung des Elektrons. Dann wird die Hamiltonfunktion nach der Bildung quantenmechanischer Mittelwerte linear, und die 4 linearen Wellengleichungen werden ohne weitere Annahmen gewonnen. Verf. gebraucht keine Spinmatrizen, und die Spineigenschaft des Elektrons folgt bei ihm aus einem Spin-Bahnwechselwirkungsglied in der Hamiltonfunktion. Im Falle des freien Elektrons findet er 32 gleichwertige Sätze von linearen Wellengleichungen an Stelle des einen von Dirac.

W. Kofink.

Vrkljan, Vladimir: Beitrag zur Darwinschen Ableitung des magnetischen Moments des Elektrons und des Positrons. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math. phys. astron., II. Ser. 8, 267—269 und deutsche Zusammenfassg. 269 (1953) [Kroatisch].

Verf. beschäftigt sich damit, eine Darstellung der Diracmatrizen zu finden, in der keine verschwindenden Elemente mehr vorkommen (eine zweite Lösung dieses Problems wird noch in einer Fußnote erwähnt), und aus ihr dann nach der Darwinschen Methode das magnetische Moment zu berechnen. *F. Penzlin.*

Sergio, Paulo: Magnetische Wechselwirkung zwischen einer Quelle und einem Probeteilchen. Revista Un. mat. Argentina 15, 181—192 und engl. Zusammenfassg. 181 (1953) [Spanisch].

Verf. untersucht die quantenmechanische Wechselwirkung eines magnetischen Dipolstrahlers mit einem elektrischen Probekörper (z. B. die eines angeregten Atomkerns mit einem Elektron). In kleinen Abständen vom Kern ($r < \lambda_0$) ergeben sich Abweichungen von den klassischen Ausdrücken der Maxwell'schen Theorie.

G. Süßmann.

Donnert, Hermann: Ableitung mathematisch äquivalenter Tensorgleichungen aus den Diracschen Spinorgleichungen für das Wellenfeld von Elementarteilchen nicht verschwindender Masse und beliebiger ganzer Spinquantenzahl. Acta phys. Austr. 7, 181—197 (1953).

Verf. stellt die Formeln für den Zusammenhang zwischen Tensor- und Spinorgrößen zusammen und zeigt, daß die Diracschen Feldgleichungen für Elementarteilchen mit dem Maximalspin s für ganzzahlige s als Tensorgleichungen geschrieben werden können.

W. Urich.

Petiau, Gérard: Sur la détermination des solutions de l'équation d'ondes du corpuscule de spin $\hbar/2$ en interaction avec un potentiel pseudoscalaire radial. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1648—1650 (1953).

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit [dies. Zbl. 45, 135 und J. Phys. Radium 14, 648—656 (1953)] die Separation der Wellengleichung für ein Partikel mit Spin $1/2$ durchgeführt, wobei er als Wechselwirkung ein radiales pseudoskalares Potential zugrunde legte. Es gelang ihm auch die Lösung der Differentialgleichung für gewisse Fälle. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit demselben Problem und leitet im wesentlichen die Resultate der früheren Arbeit auf etwas einfachere Art ab. Außerdem zeigt er, daß ein diskontinuierliches Energiespektrum existiert.

P. Urban.

Lippmann, B. A.: Complementarity in angular r -momentum states. Phys. Review, II. Ser. 91, 1213—1215 (1953).

Zwei Systeme sollen sich in bestimmten Drehimpulszuständen (gekennzeichnet durch Quantenzahlen j, m) befinden und miteinander in Wechselwirkung treten. Auch dann, wenn die ursprünglichen Quantenzahlen für die beiden Systeme auf verschiedene Achsensysteme bezogen sind, entsteht bei Wechselwirkung im quantenmechanischen Sinne ein ganz bestimmter Quantenzustand des Gesamtsystems. Wenn jedoch der eine der beiden Ausgangszustände auf das Achsensystem des anderen bezogen und darin als eine Superposition von Eigenzuständen dargestellt wird, wird dieser Tatbestand etwas verwischt. Die erstere Beschreibung wird als „kausale“, die zweite als „geometrische“ bezeichnet. Es wird auf eine gewisse Komplementarität dieser beiden Beschreibungsweisen hingewiesen: während die erstere die „kausale“ Verknüpfung zwischen den Zuständen deutlich macht, läßt die zweite

ine „geometrische“ Deutung zu: wenn nämlich der $(2j + 1)$ -dimensionale Raum des Drehimpulses eine Drehung erfährt, so entspricht dies im zweiten Falle einer geometrischen Drehung des dreidimensionalen Raumes um eine ganz bestimmte Achse, während im ersten Falle etwasmaßen zweierlei Drehungen um die beiden verschiedenen Ausgangsachsen vorzustellen wären. — Es wird vorgeschlagen, die Drehimpulsoperatoren der ersten Auffassung entsprechend auf verschiedene Achsen zu beziehen und alle Zwischenrechnungen damit durchzuführen, da sich dabei oft Summationen über m ersparen lassen. *H. Volz.*

Bakamjian, B. and L. H. Thomas: Relativistic particle dynamics. II. Phys. Review, II. Ser. 92, 1300—1310 (1953).

(Teil I. dies. Zbl. 48, 445.) Die Dynamik eines Systems wechselwirkungsreicher Teilchen läßt sich in Hamiltonscher Form schreiben und die Schwerpunkts- bzw. Gesamtdrehbewegung von der inneren Bewegung durch eine Kontakttransformation abseparieren. Hierbei wird eine Gesamt Ruhemasse eingeführt, die von den inneren Variablen abhängig ist und die Berücksichtigung der Wechselwirkung durch geeignete Wahl dieser funktionalen Abhängigkeit erlaubt. Gewisse frühere Näherungsmethoden [Breit, dies. Zbl. 16, 189; Darwin, Philos. Mag., VI. Ser. 39, 537 (1920)] entsprechen speziellen Kontakttransformationen dieser allgemeinen Theorie. Auch der Spin (als Quasi-Drehimpuls der Teilchen) kann berücksichtigt werden. *H. Kümmel.*

Costa de Beauregard, Olivier: Dynamique relativiste des n points et statique lassique des n fils. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1395—1397 (1953).

Verf. zeigt, daß zwischen den Bewegungsgleichungen der relativistischen Dynamik geladener Massenpunkte und der klassischen Mechanik der Fäden eine formale Identität besteht, wenn man die Zuordnungen: Weltlinie \rightarrow Faden, Viererimpuls \rightarrow Spannung, Viererkraftdichte \rightarrow lineare Kraftdichte usw. macht. Die Wheeler-Feynmanschen Grundgleichungen (dies. Zbl. 34, 278) zwischen Weltlinien und Zunahme des Viererimpulses sind die Gleichgewichtsgleichungen für die Fäden. Da bei diesen bekanntlich die Kraftwirkung zweier Linienelemente aufeinander nicht in Richtung der Verbindungslinie erfolgt, gilt dies auch für die relativistischen Teilchen: Erst die Gesamtwirkung ist drehmomentfrei. *H. Kümmel.*

Rzewuski, Jan: Relativistic quantum dynamics of a system of interacting particles. Acta phys. Polon. 12, 77—80 (1953).

Verf. entwickelt einen kovarianten S -Matrixformalismus für die Behandlung von Teilchensystemen mit retardierter Wechselwirkung, der die Einführung des Feldbegriffs überflüssig macht. Der Formalismus stellt eine quantentheoretische Verallgemeinerung der klassischen Theorie der Fernwirkung von Wheeler und Feynman [Reviews modern Phys. 17, 157 (1945); dies. Zbl. 34, 278] dar. *E. Gora.*

Chraplyvy, Zeno V.: Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate forms. II. Phys. Review, II. Ser. 92, 1310—1315 (1953).

Von der 16-komponentigen relativistischen Zweiteilchengleichung wird durch eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Foldy und Wouthuysen (dies. Zbl. 39, 226) in der $1/c^2$ -Näherung eine 4-komponentige Wellengleichung abgespalten. Die dargestellte Methode geht über den ersten Teil der Arbeit (dies. Zbl. 50, 222) insofern hinaus, als die Verschiedenheit der Massen nicht vorausgesetzt zu werden braucht. Dafür liefert sie aber auch keinen Zerfall der Gleichung in vier näherungsweise unabhängige Teilgleichungen. *F. Penzlin.*

Chang, T. S.: Calculations of some operators in relativistic quantum mechanics. I. II. Acta math. Sinica 3, 59—71, 73—84 u. engl. Zusammenfassg. 71—72, 85—86 (1953) [Chinesisch].

I. This paper investigates representations of the inhomogeneous Lorentz group, starting from the commutation relation between its infinitesimal generators I_{kl} and I_k , I_{kl} corresponding to infinitesimal rotations in the four dimensional space and I_k to translations. It

is shown that in a unitary representation the group decomposes with respect to the homogeneous group. The proof consists of a decomposition of the group with respect to the three dimensional rotation group and a simultaneous diagonalization of the mutually commutative and Hermitian operators $I_{kl} I^{kl}$, $\varepsilon_{klmn} I^{kl} I^{mn}$ (ε being the well known anti-symmetrical tensor) by a similarity transformation acting on certain suffixes of the representation basis. A polar decomposition of the matrices I_{kl} and I_k and another similarity transformation leaves us only four suffixes to label the coordinates of the representation basis. — Since the group decomposes with respect to the homogeneous group, the operators I_{kl} are direct sums of known expressions. By employing the theory of spinors for the homogeneous group, it is shown that all spinor matrices in our representation are what may be considered the generalizations of the Dirac-Fierz matrices in the representations of the homogeneous group. The form of the matrices I_k is thus determined and the requirement on I_k due to the unitariness of the representation is made satisfied. The commutativity between the different I_k now appears as a condition on the representation basis, thus creating a situation resembling „the supplementary conditions“ in quantum mechanics. — II. It is shown that by a slight adaptation of Wigner's work on the representation of the inhomogeneous Lorentz group all representations are brought formally into a form resembling the standard representation. This is achieved by letting the argument in the representation basis (or the wave function) to consist of a homogeneous Lorentz transformation. — The infinitesimal generators in Wigner's work are calculated. The results are $I_\mu = i p_\mu$,

$$I_{10} = -\{p_0(\cos\Theta - 1)\sin\varphi/P\sin\Theta\} V_{12} - (m/P)(\cos\Theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) V_{13}$$

$$I_{20} = -\{p_0(\cos\Theta - 1)\cos\varphi/P\sin\Theta\} V_{12} - (m/P)(\cos\Theta - 1)\cos\varphi\sin\varphi V_{13}$$

$$I_{30} = (m/P)\sin\Theta\cos\varphi V_{13} + (m/P)\sin\Theta\sin\varphi V_{23} - (p_0\partial/\partial p^3 - p_3\partial/\partial p^0),$$

$$I_{12} = V_{12} - (p_2\partial/\partial p^1 - p_1\partial/\partial p^2),$$

$$I_{13} = -\{(1 - \cos\Theta)\sin\varphi/\sin\Theta\} V_{12} - (p_3\partial/\partial p^1 - p_1\partial/\partial p^3),$$

$$I_{23} = \{(1 - \cos\Theta)\cos\varphi/\sin\Theta\} V_{12} - (p_3\partial/\partial p^2 - p_2\partial/\partial p^3).$$

($I_{kl} = -I_{lk}$). In the above, $\varphi(p^\mu \zeta)$ is the representation basis, I_{kl} and I_k are the infinitesimal generators corresponding to rotations and translations, $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $m^2 = p_\mu p^\mu$, $p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu$, V_1^1 , V_2^2 and V_3^3 act on ζ and are the infinitesimal generators of a three dimensional rotation group, and finally (P, Θ, φ) are introduced through p^μ , $p^1 = P\sin\Theta\cos\varphi$, $p^2 = P\sin\Theta\sin\varphi$, $p^3 = P\cos\Theta$. — In the last section, the properties of a quantum-mechanical system with known properties under a three dimensional rotation group are discussed. In particular, the obvious but important conclusion that the general properties are fixed as soon as the properties under three dimensional rotations are given is pointed out.

Autoreferat.

● Iwanenko, D. und A. Sokolow: Klassische Feldtheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1953. XI, 347 S. mit 15 Abb. im Text. DM 19,—.

Vorläufig noch bildet die klassische Feldtheorie die Grundlage für die Entwicklung der Quantentheorie der Felder, und daher ist es gut, daß es Bücher wie dieses gibt: Denn die Quantentheorie der Felder und die Theorie der Elementarteilchen stehen heute im Mittelpunkt des Interesses der theoretischen Physik, und sie bedienen sich durchgehend der Methoden des Lagrangeformalismus, der relativistischen Formulierung und der Lösung der Gleichungen mit Hilfe Greenscher Funktionen. Alle diese methodischen Hilfsmittel lassen ihre Tragfähigkeit aber bereits am Beispiel der klassischen Feldtheorie demonstrieren, und zwar mitunter durchsichtiger. Auch treten einige der Schwierigkeiten, mit denen die heutige Quantentheorie der Felder zu tun hat, bereits im klassischen Fall auf, wie etwa die Selbstenergie der Elementarteilchen. Alle diese Fragen werden in dem vorliegenden Werk angeschnitten und das in einer Weise, die von vornherein darauf abzielt, den Weg zur modernen Quantentheorie der Felder zu weisen. Daher unterscheidet sich dieses Buch auch ganz wesentlich von den üblichen Lehrbüchern der Elektrizität, der Relativitätstheorie usw. — So scheint das Werk sehr geeignet, demjenigen, der sich mit Feldtheorie befassen will (die natürlich letzten Endes Quantentheorie sein muß), eine Einführung und darüber hinaus auch wohl weiterer Begleiter zu sein. Wie sehr das der Fall ist, geht am besten aus einigen Stichworten zum Inhalt hervor: Allgemeine Theorie der δ -Funktion. Die Greensche Funktion. Statische Gleichungen vom elliptischen Typ (Randwertaufgaben). Zeitabhängige Gleichungen. Klassische Elektrodynamik: Grundlagen, Liénard-Wiechert-Potentiale, Tscherenkow-Effekt, Theorie der elektromagnetischen Masse, Energie-Impulstensor, Drehimpulstensor, Bewegungsgleichung der elektromagnetischen Masse (Lorentz), nichtlineare Elektrodynamik, Feldgleichungen höherer Ordnung, Theorie der nicht feldgebundenen Masse und Beispiele zur Verwendung dieser Theorien. Klassische Mesodynamik: Das Problem der Kernkräfte, das skalare, pseudoskalare, vektorielle und pseudovekterielle Mesonfeld, Streuung, Strahlungsdämpfung, Dipolschwierigkeiten. Anhang: Theorie des Vakuums in der modernen Quantenfeldtheorie. — Das Buch ist konzentriert geschrieben und setzt die Kenntnis der behandelten Materie zum Teil voraus. Das gilt vor allem für den relativistischen Lagrangeformalismus. Der Reiz des Werkes besteht

vor allem darin, daß alte und neue Probleme in eleganter Weise mit den jetzt gebräuchlichen Methoden angegriffen werden und daher das Mathematische in Kurze erledigt wird, um dafür Platz für die physikalische Diskussion zu schaffen. — Für Studenten erst ab höherer Semester geeignet, aber bei den entsprechenden Vorkenntnissen mit Genuß zu lesen. Einiges in der Einführung zur Mesodynamik ist heute schon wieder als überholt anzusehen — das kann aber am Wert des Gesamtwerkes kaum etwas ändern. Druck und Aufmachung lassen nichts zu wünschen übrig, der Preis ist erstaunlich niedrig.
R. Hagedorn.

Darling, B. T.: Field theory of equations with many masses. Phys. Review, I. Ser. **92**, 1547—1553 (1953).

Es wird ausführlich die aus dem Variationsprinzip $\delta \int \varphi D(\gamma^\lambda (\partial_\lambda - i a_\lambda)) \varphi dx = 0$ resultierende Feldtheorie untersucht. Dabei ist $D(z)$ eine für reelle Werte von z reelle ganze Funktion mit nur reellen Nullstellen. Insbesondere wird der Ladungsstromvektor und der Energieimpulstensor angegeben und die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Felde behandelt. Interessant ist vor allem folgende Feststellung: Sind z_n die (als einfach angenommenen) Nullstellen von $D(z)$ und sind φ_n die Lösungen von $\{\gamma^\lambda (\partial_\lambda - i a_\lambda) - z_n/2\omega\} \varphi_n = 0$, so läßt sich jede Lösung φ von $D(\gamma^\lambda (\partial_\lambda - i a_\lambda)) \varphi = 0$ aus den φ_n linear kombinieren. Für den Beweis dieser Behauptung wird auf bisher unveröffentlichte Resultate von M. Leichter erwiesen. Einige Bemerkungen über die Quantisierung und die Renormierung schließen die Arbeit. Auf Zusammenhänge mit früheren Arbeiten des Verf. [irreducible volume character of events] (Darling, dies. Zbl. **39**, 426; Darling und Zilsel, dies. Zbl. **51**, 208) wird verschiedentlich hingewiesen.
F. Penzlin.

Bauer, Friedrich L.: Gruppentheoretische Untersuchungen zur Theorie der Spinwellengleichungen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1952**, 111—179 (1953).

Verf. untersucht die Form der Matrizen β^μ in einer Feldgleichung vom Typ $(\beta^\mu \partial_\mu + \kappa)\psi = 0$. Diese β^μ bilden bekanntlich zusammen mit den Infinitesimalelementen der Lorentzgruppe einen Teil einer Lieschen Algebra. Verf. beschränkt sich hier nun auf halbeinfache Liesche Algebren, für die bekanntlich jede Darstellung vollständig reduzibel ist. (Die für eine solche Beschränkung vorgebrachten Argumente scheinen dem Ref. nicht ganz überzeugend.) Nach einer knappen Skizze der Struktur- und Darstellungstheorie halbeinfacher Liescher Algebren nach Veyl und v. d. Waerden kommt der Verf. auf die Kernfrage zurück: Welche (unmittelbare) Überalgebra der Lorentzalgebra ist imstande, einen Vierervektor von Basismatrizen β^μ zu liefern? Nur die fünfdimensionale orthogonale Algebra erfüllt diese Bedingung. Somit gibt es also (unter der genannten Einschränkung) nur den schon von Lubanski [Physica **9**, 310 (1942)] und Bhabha [Reviews modern Phys. **17**, 200 (1945); Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **21**, 241 (1945)] behandelten Fall. Schließlich werden noch folgende speziellen Fragen untersucht: der Zusammenhang mit der Fusionsmethode von de Broglie (dies. Zbl. **21**, 277) und: Wann bilden die Wellenfunktionen einen Tensor, evtl. mit Quaternionen als Komponenten?
F. Penzlin.

Fujiwara, Izuru: On the Duffin-Kemmer algebra. Progress theor. Phys. **10**, 589—616 (1953).

Verf. untersucht die auf n Dimensionen erweiterte Duffin-Kemmer-Algebra von n abstrakten Größen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, welche die Vertauschungsrelationen $\beta_i \beta_k \beta_i + \beta_i \beta_k \beta_i = \beta_i \beta_i + \beta_k \beta_k$ befriedigen. Im Sonderfall von 4 Dimensionen lassen sich mit Hilfe dieser Größen Mesonentheorien für Mesonen vom Spin 1 und 0 darstellen. Verf. konstruiert die linear unabhängigen Basen der Algebra, die sich wie antisymmetrische Tensoren gegenüber orthogonalen Transformationen des n -dimensionalen β -Raums transformieren. Dieser Tensorcharakter ist für die physikalischen Anwendungen bedeutsam, denn mit seiner Hilfe läßt sich ein mathematischer Formalismus entwickeln, in dem durch eine Anzahl von „Projektoren“ jede Komponente aus der Wellenfunktion herausgezogen werden kann. Dies geschah bisher mit Hilfe des sogenannten γ -Formalismus von Harish-Chandra [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **186**, 505 (1949)], der Matrixdarstellung der β -Größen voraussetzte; die Behandlung dieses Problems durch den Verf. benutzt dagegen nur die abstrakte Algebra und bedarf keiner Matrixdarstellung der β -Größen. Mit Hilfe seiner Projektoren zeigt der Verf. die Korrespondenz, die zwischen Partikel- und Wellenformulierung der Mesonentheorien besteht. Ein früheres, von A. Klein (dies. Zbl. **43**, 214) beschriebenes Verfahren ist in dem des Verf. enthalten. Nebenbei wendet er seine Methoden auch auf die Algebra des Diracschen Zahlenrings an.
W. Kofink.

Tokuoka, Zensuke: On the equivalence of the particle formalism and the wave formalism of meson. II. Case of interacting meson and nucleon fields. Progress theor. Phys. **10**, 137—157 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. **48**, 446.) Für die Beschreibung der Wechselwirkung geladener Mesonen mit dem Nukleon verwendet Verf. den Kemmerschen β -For-

malismus. Invariante Kopplungsterme werden durch den I -Formalismus eingeführt. Die S -Matrix wird nach der Methode von Umezawa und Takahashi konstruiert. Es wird gezeigt, daß in der kovarianten Formulierung von Tomonaga und Schwinger das Wellenbild dem Duffin-Kemmer-Formalismus äquivalent ist.

F. Cap.

Goto, Shigeo, Rokuo Kawabe and Masashi Takasu: On the reaction of the mesonic proper field. *Progress theor. Phys.* **9**, 312—320 (1953).

Verf. berechnen nach der Vorschrift der Theorie von Kamefuchi und Umezawa [*Progress theor. Phys.* **7**, 551 (1952)] die korrigierte Fortpflanzungsfunktion S'_F für die pseudoskalare Mesontheorie mit pseudovektorieller Kopplung und mit deren Hilfe die Wirkungsquerschnitte für die π - n - bzw. π - p -Streuung und die γ -Produktion von π^+ . Die Ergebnisse stimmen mit der Erfahrung nicht überein, und es stellen sich Schwierigkeiten der Kamefuchi-Umezawaschen Theorie in der Frage der Eichinvarianz heraus.

G. Süßmann.

Schiff, L. I.: Lattice-space quantization of a nonlinear field theory. *Phys. Review*, II. Ser. **92**, 766—779 (1953).

Die Arbeit stellt einen Versuch dar, die bekannte nichtlineare skalare Mesongleichung des Verf. unter Aufopferung der relativistischen Invarianz so zu quantisieren, daß keinerlei Divergenzen auftreten können. Zu diesem Zwecke führt der Verf. ein Raumgitter mit endlicher Gitterkonstante l ein. Die durch das Gradientenglied vermittelte Kopplung zwischen den abzählbar vielen anharmonischen Feldoszillatoren wird als kleine Störung betrachtet. Die Existenz von Einteilchen-Zuständen mit einer angenähert relativistischen Beziehung zwischen Energie, Impuls und Ruh-masse wird nachgewiesen. Die Teilchen genügen der Einstein-Bose-Statistik und werden aneinander gestreut. Anschließend untersucht Verf. die Wechselwirkung dieser Mesonen mit Nukleonen und die durch sie vermittelte Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Im Limes $l \rightarrow 0$ werden natürlich alle physikalischen Größen unendlich.

G. Süßmann.

Cander, A. F.: Zum Mehrteilchenproblem in der Quantenmechanik. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **90**, 761—764 (1953) [Russisch].

Eine von Fock [*Zurn. eksper. teor. Fiz.* **10**, 9 (1940)] vorgeschlagene Methode wird zur Behandlung des Mehrteilchenproblems der Kerntheorie herangezogen. Diese beruht auf Verwendung von vier Gruppen von Indizes, die sich auf Protonen und Neutronen von positiver und negativer Spinrichtung beziehen. Die Einteilchen-Wellenfunktionen mit den zu einer Gruppe gehörenden Indizes tragen zu den Entwicklungsgliedern der Wellenfunktion des Gesamtsystems einen Faktor von der Form einer Determinante bei. Die Methode wird zu einer Diskussion der Abhängigkeit der kinetischen und potentiellen Energie des Atomkerns von der Zahl der Protonen und Neutronen verwendet.

E. Gora.

Jean, Maurice: Contribution à l'étude des méthodes de la seconde quantification et de l'espace de configuration en théorie relativiste des systèmes de particules. Application à la dérivation d'équations relativistes pour le deutéron. *Ann. de Physique*, XII. Sér. **8**, 338—391 (1953).

Verf. gibt zunächst eine übersichtliche Darstellung der Fockschen Konfigurationsraum-methode für freie quantisierte Felder. Für den Fall der Wechselwirkung wird die Tamm-Dancoff- und die Bethe-Salpeter-Gleichung niedrigster Näherung abgeleitet. Im letzteren Fall ist der Verf. der wohl irrigen Meinung, daß der Vakuumzustand durch die Wechselwirkung nicht modifiziert wird.

H. Lehmann.

Gejlikman, B. T.: Zur Quantentheorie der Wellenfelder. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **90**, 359—362 (1953) [Russisch].

Der Verf. rechnet ein einfaches Modell einer quantisierten Feldtheorie durch. Das Modell enthält ein Mesonfeld mit dem Spin Null (skalares oder pseudoskalares), das mit einer klassischen, ausgedehnten Quelle in Wechselwirkung steht. Die Quelle hat auch einen inneren Freiheitsgrad, weshalb das Problem sich nicht exakt lösen läßt. Der Verf. verwendet eine Störungsrechnung, wobei die nullte Näherung des Problems mit Hilfe einer klassischen Feldfunktion des Mesonfeldes beschrieben wird. Unter der Annahme, daß der Operator $\Phi(x)$ des Mesonfeldes sich als $\Phi(x) = q^{(0)}(x) + q(x)$ schreiben läßt, wo $q^{(0)}(x)$ das klassische Feld ist, und wo $q(x)$ als „klein“ behandelt werden kann, werden die Eigenwerte des Systems, die Streuquerschnitte der Mesonen und das anomale magnetische Moment der Quelle ausgerechnet. Als Bedingung für die Gültigkeit der Rechnung gibt der Verf. die Gleichung $g^2/\hbar c \gg 1$ für das skalare Feld und $g^2/\hbar c \gg k^2 a^2$ für das pseudoskalare Feld an. Hier ist g die Kopplungs-

onstante und a der „Radius“ der Quelle, der als geeigneter Mittelwert des Formfaktors definiert worden ist.

G. Källen.

Cook, J. M.: The mathematics of second quantization. Trans. Amer. math. Soc. **74**, 222—245 (1953).

Der Verf. gibt eine mathematisch exakte Formulierung der Quantentheorie der Wellenfelder (ohne Wechselwirkung) auf der Grundlage der J. v. Neumannschen Arbeiten zur Quantentheorie des Einteilchenproblems. Der Hilbertraum der Observablen wird untersucht. Er läßt sich so wählen, daß die (unendliche) Selbstenergie der freien Teilchen gar nicht erst auftritt. Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren werden definiert. Dann läßt sich z. B. das Yukawa-Potential ableiten. Die Zerlegung des Lichtes in Transversal, Longitudinal und skalarteil (s. Gupta, dies. Zbl. **40**, 424) wird durchgeführt, die Polarisations-eigenschaften werden analysiert. Schließlich werden aus dem Formalismus unter Verwendung der Gruppeneigenschaften der Lorentztransformationen die Maxwellschen Gleichungen (ohne Ladungen) abgeleitet.

H. Kümmel.

Rivier, Dominique: On the quantum theory of fields. Progress theor. Phys. **9**, 633—662 (1953).

Es wird die Quantentheorie der Materiefelder (nichtverschwindender Ruhmasse) auf die folgenden Postulate aufgebaut: 1. Die Feldgleichungen folgen aus einem Variationsprinzip mit relativistisch invarianter und eichinvarianter Lagrangedichte. 2. Die in der Theorie auftretenden Größen sind von der speziellen Wahl der (von Schwinger, dies. Zbl. **32**, 94 eingeführten) raumartigen Flächen unabhängig. 3. Die den Bewegungskonstanten entsprechenden Funktionale liefern eine Darstellung der Infinitesimalelemente der inhomogenen Lorentzgruppe und der Eichgruppe im Hilbertraum. Dieses Programm wird unter besonderer Berücksichtigung der Wellenfelder durchgeführt. Für diese wird die Widerspruchsfreiheit der Postulate, die eine Einschränkung der Lagrange-funktionen der quantisierbaren Feldtheorien darstellen, explizit gezeigt, wobei sich ergibt: Die Vertauschungsrelationen für die Feldfunktionen und die Ordnung der Faktoren in den Operatoren der Bewegungskonstanten sind eindeutig bestimmt. Es ergibt sich also der bekannte Zusammenhang zwischen Spin und Statistik. Ferner ist die Methode des kanonischen Formalismus äquivalent, obwohl dieser explizit noch implizit auf ihn Bezug genommen wurde.

F. Penzlin.

Rivier, Dominique: Note sur le lien entre spin et statistique dans la théorie des particules élémentaires. Helvet. phys. Acta **26**, 300—306 (1953).

Zusammenstellung der sich auf den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik beziehenden Ergebnisse in der vorsteh. referierten Arbeit.

F. Penzlin.

Visconti, A.: Sur quelques applications du formalisme de l'opérateur d'évolution. J. Phys. Radium **14**, 591—603 (1953).

Ein in früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **43**, 424); These, Paris 1953) entwickelter Formalismus wird weiter ausgearbeitet. Er beruht im wesentlichen auf Verwendung von Entwicklungsoperatoren $U(t, t_0)$, die durch die Gleichung $\dot{U}(t) = U(t, t_0) \dot{U}(t_0)$ definiert werden. Zunächst wird ein Überblick über die bisher zur Bestimmung dieser Operatoren verwendeten Integralgleichungen und ihrer Lösungen für freie Teilchensysteme gegeben. Der Formalismus wird dann zur Entwicklung einer S-Matrixmethode für zeitabhängige Wechselwirkungen und zur Beschreibung von Dirac-teilchen in einem vierdimensionalen Impulsraum verwendet. Dabei ergeben sich bekannte Formeln von Feynman (dies. Zbl. **37**, 124; **44**, 233). Durch Aufspaltung des Hilbertschen Zustandsraumes in zwei komplementäre Subräume lassen sich die Gleichungen der Theorie in zwei Gruppen aufspalten, die sich auf Übergänge innerhalb und außerhalb einer Energieschale beziehen und den Gora-Paulischen Gleichungen der Quantentheorie der Strahlungsdampfung (W. Pauli, Meson Theory, New York 1948) entsprechen. Ist die Wechselwirkung explizit zeitabhängig, so ergibt sich für diese Gleichungen die von Arnous und Zienau (dies. Zbl. **43**, 423) angegebene Form. Schließlich wird gezeigt, daß sich die Gleichungen der Theorie auch aus Variationsprinzipien ableiten lassen.

E. Gora.

Utiyama, Ryôû: On the convergence of the perturbation method in the quantum field theory. Progress theor. Phys. **9**, 593—606 (1953).

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. **50**, 429), wo der Verf. (zusammen mit T. Imamura) bewiesen hat, daß die Störungsreihe für ein spezielles Modell einer Feldtheorie eine divergente Reihe ist. Hier schlägt der Verf. eine Modifikation der Definition des

sogenannten Vertexoperators vor, wodurch erreicht wird, daß die Störungsreihe konvergiert. Nach der Ansicht des Ref. ist es zwar dadurch möglich, eine konvergente Reihe zu erhalten, aber die so konstruierte Theorie hat keinen Zusammenhang mit den ursprünglichen Bewegungsgleichungen oder mit der ursprünglichen Lagrange-Funktion. Sehr tiefliegende Fragen über Kausalität und Unitarität der S -Matrix müssen erst untersucht werden, bevor eine solche Theorie als befriedigend angesehen werden kann. *G. Källén.*

Hu, Ning and Min Yu: Further investigation on the S -Matrix theory. Chinese J. Phys. 9, 36—41 u. engl. Zusammenfassg. 42—44 (1953) [Chinesisch].

Ergänzung zu einer Arbeit von N. Hu [Chinese J. Phys. 8, 40 (1951)]. Durch die Ersetzung der Feynmanschen Funktion D_F durch D_F werden neue Singularitäten eingeführt. Verf. zeigen an einem Beispiel, wie diese zu umgehen sind.

Salam, Abdus: Modified propagation functions in perturbation theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 638—641 (1953).

Während man in der Quantenfeldtheorie üblicherweise nur Matrixelemente mit wenigen Teilchen im Anfangs- und Endzustand betrachtet, stellt sich Verf. die Aufgabe, die Matrixelemente beim Vorhandensein vieler Teilchen (mit bekannter Verteilung im Impulsraum) zu berechnen. In dem Extremfall einer Fermionenverteilung, bei der alle Niveaus mit $|k| < K$ besetzt und alle Niveaus mit $|k| > K$ leer sind, gelingt es ihm, durch eine leichte Umdefinition des Wick'schen Normalproduktes eine modifizierte Ausbreitungsfunktion S' zu finden, die überall an die Stelle der Feynmanschen S -Funktion zu setzen ist. Im Bosonenfall ist ein entsprechendes Verfahren nicht möglich. Es treten dort in jeder Näherung neue Zusätze zur Ausbreitungsfunktion auf. *F. Penzlin.*

Ôneda, Sadao and Hiroomi Umezawa: On the families of spinor fields. Progress theor. Phys. 9, 685—687 (1953).

Verf. definiert: zwei Spinorfelder, deren Feldfunktionen miteinander antikommutieren, gehören zur selben „Familie“. Nach der Zusammenstellung einiger Sätze über solche Familien versucht er, an Hand der bisher beobachteten Reaktionen die heute bekannten Teilchen zu klassifizieren. Es ergeben sich mehrere Möglichkeiten, zwischen denen zur Zeit noch keine Entscheidung möglich ist. *F. Penzlin.*

El Nadi, M.: The wave equation of the complementary particle. Proc. math. phys. Soc. Egypt 4, Nr. 4, 1—7 (1953).

S. dies. Zbl. 48, 446.

Takano, Yoshirô and Itaru Suzuki: New description of field. Progress theor. Phys. 10, 110—111 (1953).

Ohnuki, Y. and O. Hara: On the relation between non-local Urmaterie field and irreducible local field. Progress theor. Phys. 10, 697—698 (1953).

Jordan, Hermann L. und Wilhelm F. Frahn: Nichtlokale Feldtheorie auf der Grundlage der Salpeter-Bethe-Gleichung. I. „Freie“ Teilchen. Z. Naturforsch. 8a, 620—628 (1953).

Verf. versuchen aus der Bethe-Salpeter-Gleichung Schlüsse zu ziehen auf die Wellengleichungen, denen freie Elementarteilchen genügen. *H. Lehmann.*

Jouvet, Bernard: Introduction à une théorie électro-neutrinienne du photon. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1642—1644 (1953).

Die von de Broglie (dies. Zbl. 35, 424) vorgeschlagene Deutung des Photons als Neutrinopaar wird erweitert, indem Paarbildung von Elektronen und Neutrinos betrachtet wird. In einer einfachen Modelltheorie (Fermi-Kopplung zwischen Neutrinos und Elektronen) lassen sich die typischen Graphen aufsummieren. Der zugehörige Kern erweist sich bei geeigneter Wahl zweier Regularisierungskonstanten mit dem renormierten Photonenkern (unter Berücksichtigung des Vakuumpolarisationsterms erster Ordnung) identisch. Die eingeführte Kopplungskonstante fällt dabei heraus; die elektromagnetische Kopplungskonstante e^2 ist abhängig von der Wahl der Renormierungskonstanten; das Verschwinden der Photonenmasse folgt aus der Eichinvarianz der Theorie. *H. Kümmel.*

Ivanenko, D. D. und N. N. Kolesnikov: Der Volumeneffekt bei der Isotopenverschiebung im Wasserstoff und Deuterium. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 47—50 (1953) [Russisch].

Der Volumeneffekt bei der Isotopenverschiebung im Wasserstoff und Deuterium wird unter der vereinfachenden Annahme berechnet, daß das Potential der Nukleonenwechselwirkung für $r \leq r_0$ konstant ist und für $r > r_0$ verschwindet, wo r_0 der entsprechende Kernradius ist. Unter Verwendung der für diesen Fall bekannten Lösung für die Wellenfunktion der Nukleonen wird dann das durch die räumliche Verteilung der Protonen bedingte Zusatzpotential bestimmt und innerhalb eines Bereichs vom Radius $R_0 = 5r_0$ berücksichtigt. Außerhalb dieses Bereichs wird das Coulombpotential verwendet. Um eine Lösung der Diracgleichung innerhalb des Bereichs $r \leq R_0$ zu finden, wird das Zusatzpotential näherungsweise durch eine Reihenentwicklung nach Potenzen von r/r_0 ersetzt. Die Wellenfunktionen innerhalb und außerhalb dieses Bereichs werden dann in üblicher Weise bestimmt und zur Berechnung der Niveaueverschiebungen verwendet. Die Ergebnisse werden mit der Lamb-Retherfordverschiebung und mit experimentellen Daten verglichen. Für den Volumeneffekt bei der Isotopenverschiebung $H - D$ ergibt sich der numerische Wert 0,44 MHz. E. Gora.

Francis, Norman C.: Photoproduction of π mesons in hydrogen and deuterium. Phys. Review, II. Ser. **89**, 766—774 (1953).

Frühere Berechnungen Kaplan, dies. Zbl. **43**, 425, Aidzu, dies. Zbl. **44**, 236) des Wirkungsquerschnitts für die Erzeugung neutraler Photomesonen, in denen die Wechselwirkung mit dem anomalen magnetischen Moment der Nukleonen durch einen Pauli-Term in der Hamilton-Funktion phänomenologisch berücksichtigt wird, liefern zwar die richtige Größe und Energie-Abhängigkeit, nicht aber die experimentell gefundene Winkelverteilung, die etwa durch $(2 + 3 \sin^2 \theta) \cos \theta$ im Schwerpunkt-System — wiedergegeben wird. Verf. wiederholt daher die Rechnungen mit vier verschiedenen Wechselwirkungsansätzen: Der erste Ansatz ist die nichtrelativistische Näherung der üblichen op -s, $p\pi$ -Meson-Nukleon-Kopplung; der zweite unterscheidet sich davon durch Weglassen des Terms $\sim (\vec{\sigma} \cdot \vec{U}) \vec{U}$ (U : Meson-Wellenfunktion). Der dritte Ansatz beruht auf der Annahme, das anomale Nukleonenmoment sei allein für die π -Erzeugung verantwortlich; der vierte endlich ist rein phänomenologisch auf die experimentelle Winkelverteilung zugeschnitten. Es folgt eine ausführliche Diskussion des Prozesses $\pi + D \rightarrow \pi' + D$ sowie der elastischen und unelastischen Wirkungsquerschnitte. Der Vergleich mit der Erfahrung spricht zugunsten einer Ladungsunabhängigkeit der π^0 -Erzeugung. W. Urlich.

Lipmanov, E. M.: Strahlungskorrekturen zum Zerfall der μ -Mesonen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 999—1001 (1953) [Russisch].

Es wird die Frage untersucht, ob es Wechselwirkungsansätze gibt, die unter Verwendung der üblichen Renormierungsmethoden die Beseitigung aller Divergenzen bei der Berechnung der Strahlungskorrekturen für den Zerfall eines μ -Mesons in drei Teilchen (Elektron und zwei Neutrinos) gestatten. Es zeigt sich, daß es fünf solche Ansätze gibt, und zwar entsprechen diese den in der Theorie des α -Zerfalls üblichen Ansätzen (skalar, vektoriell, usw.). Die Rechnungen werden für die skalare Wechselwirkung durchgeführt. E. Gora.

Fujita, Jun-ichi and Masami Yamada: Upper bound of the pseudoscalar coupling constant in beta-decay. Progress theor. Phys. **10**, 518—524 (1953).

Les AA. étudient la forme des spectres β permis de He^6 et B^{12} en considérant un mélange d'interactions tensorielle et pseudoscalaire. La discussion des diagrammes de Curie conduit à un rapport des valeurs des constantes de couplage tensorielle et pseudoscalaire G_T, G_P tel que $-55 \leq G_P/G_T \leq 19$. G. Petiau.

Dąbrowski, Janusz: Angular correlation of three successive gamma quanta. Acta phys. Polon. **12**, 64—75 (1953).

Verf. leitet Formeln ab für die Richtungskorrelation von drei aufeinanderfolgenden γ -Quanten beliebiger Emissionsrichtung und Multipolarität. Für Dipolübergänge und einige spezielle Fälle höherer Polarität tabuliert er die Korrelationskoeffizienten. Die Formeln gelten auch für den Fall, daß Emissionsprozesse durch Absorptionsprozesse ersetzt werden. E. Gora.

Królikowski, W.: Directional correlation for two-quanta emission. Acta phys. Polon. **11**, 233—255 (1953).

Verf. leitet Formeln ab für die Richtungskorrelation von zwei γ -Quanten,

die bei einem doppelten elektrischen, elektrisch-magnetischen oder magnetischen Dipolübergang gleichzeitig emittiert werden. Im Gegensatz zur Emission eines einzelnen Photons ist nun der Übergang $j' = 0 \rightarrow j = 0$ (j Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses des Atomkerns) erlaubt. Die Formeln gelten zunächst für die Emission von γ -Quanten durch Atomkerne, lassen sich aber durch entsprechende Modifikation der Koeffizienten leicht so abändern, daß sie auch für andere Systeme geladener Teilchen gelten (z. B. Ramaneffekt). *E. Gora.*

Kroupa, E. und H. Robl: Paarvernichtung im homogenen Magnetfeld. Acta phys. Austr. 8, 35—41 (1953).

Verff. zeigen, daß bei der Zwei-Quanten-Paarvernichtung ein äußeres homogenes Magnetfeld eine schwache Energie- und Winkelverteilung der emittierten Quanten hervorruft, die bei Feldstärken über 10^3 — 10^4 Oersted beobachtbar sein müßte. Bei der Rechnung sind einige spezielle Annahmen gemacht.

W. Urich.

Olszewski, Jan: On the electrostatic neutron-electron interaction. Acta phys. Polon. 12, 135—148 (1953).

Zur Behandlung des Problems der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen Neutron und Elektron wird eine Methode verwendet, die eine Kombination der Feynman-Dyson'schen Methode zur Berechnung der Matrixelemente und der „formalistischen Regularisierungsmethode“ von Pauli und Villars (dies. Zbl. 37, 125) zur Beseitigung von Divergenzen und Vermeidung von Mehrdeutigkeiten darstellt. Das die Wechselwirkung vermittelnde Mesonenfeld wird als pseudoskalar mit pseudoskalarer Kopplung an das Nukleonfeld angenommen. Verf. zeigt, daß neben den bisher berücksichtigten Konvektionsströmen auch Polarisationsströme einen nichtverschwindenden Beitrag zur statischen Wechselwirkung liefern, und zwar ist der letzte etwa dreimal so groß als der erste.

E. Gora.

Ivanenko, D., D. Kurdgelaidze and S. Larin: Bemerkungen zur nichtlinearen Mesodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 245—247 (1953) [Russisch].

Es werden einige Bemerkungen über die Größe des nichtlinearen Termes λq^3 in der Schiff'schen Mesogleichung gemacht. Anschließend werden einige statische Näherungslösungen dieser Gleichung angegeben.

G. Süßmann.

Gejlikman, B. T.: Zur Theorie der starken Kopplung für Mesonenfelder. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 991—994 (1953) [Russisch].

Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 52, 226) eine Störungsmethode für die Behandlung des Problems der starken Kopplung in der Theorie der Kernkräfte entwickelt, die sich anwenden läßt, wenn die Wellenfunktion so separierbar ist, daß der numerisch größere Teil ein rein klassischer Ausdruck ist. Dies ist in den bisher verwendeten Mesonentheorien der Kernkräfte der Fall. Der kleinere, Operatorengrößen enthaltende Teil der Wellenfunktion läßt sich dann als Störung behandeln. Die Methode wird auf das pseudoskalare Mesonenfeld in Wechselwirkung mit einem Nukleon im Ruhezustand und auf das entsprechende Problem der Wechselwirkung zweier Nukleonen angewandt.

E. Gora.

Gejlikman, B. T.: Zur Theorie der starken Kopplung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 39—42 (1953) [Russisch].

Eine Störungsmethode für die Behandlung der starken Kopplung (s. vorsteh. Referat) wird so verallgemeinert, daß sie nun auch die Berücksichtigung des Bewegungszustandes der schweren Teilchen gestattet. Der Gültigkeitsbereich der Methode wird diskutiert.

E. Gora.

Gejlikman, B. T.: Über die Polarisation des Vakuums in der Theorie der starken Kopplung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 225—228 (1953) [Russisch].

Verf. untersucht den Beitrag des „Nukleonenvakuums“ zur Nukleon-Nukleon- und Meson-Meson-Wechselwirkung an Hand der in früheren Arbeiten (s. vorsteh. Referate) entwickelten Methode zur Behandlung der starken Kopplung. Die erhaltenen Resultate sind im wesentlichen qualitativer Natur, da eine relativistische Behandlung des Problems bisher nicht möglich war. Die Polarisation des Vakuums führt zu nichtlinearen Gliedern in den Feldgleichungen der Mesonen und Nukleonen. Der divergenzfrie Anteil der nichtlinearen Zusatzglieder zum Mesonenfeld erweist sich als klein. Daß Jennie [Phys. Review, II, Ser. 88, 527 (1952)] eine viel größere Nichtlinearität erhielt, ist, nach Ansicht des Verf., dadurch bedingt, daß er den klassischen Teil der Wellenfunktion nicht separiert hat. Auf die Diver-

enzschwierigkeiten wird hingewiesen, aber die diesbezüglichen Fragen werden nicht eingehender untersucht.

E. Gora.

Drell, S. D. and Kerson Huang: Many-body forces and nuclear saturation. Phys. Review, II. Ser. 91, 1527—1542 (1953).

Es wird untersucht, ob die Absättigung der Kernkräfte mit Hilfe der aus der pseudoskalaren Mesonentheorie (mit pseudoskalarer Kopplung) sich ergebenden Vielkörperkräfte erklärt werden kann. Die Methode und sämtliche auftretenden Parameter werden aus der Arbeit von Lévy übernommen. Damit ergibt sich, daß der Hauptterm der n -Körperkraft nur von den Nukleonabständen abhängt und für gerade n anziehend und ungerade n abstoßend ist. Die mit den berechneten Potentialen (bis $n = 5$) durchgeführte Variation der Gesamtenergie ergibt Übereinstimmung mit der Erfahrung. Leider ist ein wesentlicher Teil der Graphen nicht mitberücksichtigt worden, insb. fehlen die Beiträge des (für die Renormierung notwendigen) nichtlinearen Schiffischen Termes. Die offenbar schlechte Konvergenz der Potentiale bezüglich n ist ein weiterer schwerer Einwand gegen die zugrunde gelegte Näherungsmethode.

G. Süßmann.

Okabayashi, Takao: On the fundamental equation for the nucleon. Progress theor. Phys. 10, 499—504 (1953).

Die Tatsache, daß die Mesonentheorie keine befriedigenden quantitativen Ergebnisse liefert, veranlaßt den Verf., eine Abänderung der Diracschen Gleichung für Nukleonen zu versuchen. Die übliche Weise, in welcher die Diracgleichung auf Nukleonen angewandt wird, enthält den Isotopenspinoperator nicht. Daher kommutieren dessen Komponenten mit der Hamiltonfunktion des Nukleons und sind Konstanten der Bewegung. Bei der Anwendung der Diracgleichung auf das Elektron dagegen kommutieren die Komponenten des gewöhnlichen Spins nicht mit der Hamiltonfunktion des freien Elektrons und sind keine Konstanten der Bewegung; darauf beruht die sogenannte Zitterbewegung. Also fordert der Verf., daß für das Nukleonenfeld ebenfalls eine solche Wellengleichung aufzustellen sei, in der der Isotopenspin eine Zitterbewegung hervorruft. Er fugt daher versuchsweise zur Diracgleichung des Nukleons im äußeren elektromagnetischen Feld zwei explizit vom Isotopenspin abhängige Glieder hinzu, wovon eines die Form eines Pauliterms mit Feldstärken hat. Daraus hofft er die Gleichung für freie Nukleonen zu finden und fuhr noch einige vorbereitende Überlegungen über Vektoren im Ladungsraum, sowie über mögliche Kombinationen dieser für die zukünftige Hamiltonfunktion der Nukleonen durch.

W. Kofink.

Kikuta, Takashi: Convergence of iterative methods. Progress theor. Phys. 10, 653—672 (1953).

Der Verf. untersucht die verschiedenen Iterationsmethoden des Eigenwertproblems hinsichtlich ihrer Konvergenz. Dabei vergleicht er insbesondere das Schwingersche Verfahren mit der Bornschen Näherungsmethode und behandelt als instruktives Beispiel die Neutron-Proton-Streuung unter der Annahme eines Topfpotentials. Er diskutiert in übersichtlicher graphischer Darstellung die Konvergenzbereiche für verschiedene Parameterwerte des Potentials.

P. Urban.

Makinson, R. E. B. and J. S. Turner: On perturbation and variation methods. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 857—865 (1953).

Diese Arbeit will zeigen, daß die Verwendung der Theorie der Funktionale und ihr Analogon zum Theorem von Taylor eine Diskussion der Methoden der Störungsrechnung sowie der Variationsrechnung der Quantenmechanik erleichtert. Dabei behandeln die Verf. sowohl freie als auch gebundene Zustände. Sie zeigen insbesondere, wie stationäre Zustände, die für Variationsmethoden erforderlich sind, aufgesucht und gefunden werden, ferner daß die Methoden der Störungs- und Variationsrechnung im wesentlichen identisch sind und daß Störungen 2. Ordnung und in 2. Ordnung stationäre Ausdrücke ähnlich gefunden werden können. Die abgeleitete Form für die Störung 2. Ordnung gebundener Zustände unterscheidet sich von der gewöhnlich verwendeten darin, daß sie explizit nur Eigenfunktionen gestörter Zustände enthält. In einem Anhang wird eine kurze Übersicht über die Bezeichnung der Funktionalrechnung und einige erforderliche Ergebnisse gegeben.

P. Urban.

Turner, J. S. and R. E. B. Makinson: A comparison of various methods of solving the central force scattering problem. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 866—872 (1953).

Die Verf. vergleichen die heute üblichen Variationsverfahren von Hulthén und Kohn in ihrer Anwendung auf die Lösung des Streuproblems bei zentralen

Kräften. Speziell die Wahl der Parameter in der Versuchsfunktion wird eingehend untersucht, und es wird gezeigt, daß diese Parameter auch auf andere Weise gefunden werden können, als es üblich war. Die Vorteile und Gültigkeitsgrenzen mehrerer vorgeschlagener Verfahren werden numerisch überprüft, wobei der spezielle Fall der Streuung durch ein Yukawapotential zugrunde gelegt wird.

P. Urban.

Sudakov, V. V.: Isotop-invariante Theorie des β -Zerfalls. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 1009—1010 (1953) [Russisch].

Verf. postuliert, daß der in der Theorie des β -Zerfalls verwendete Wechselwirkungsansatz isotop-invariant sein soll, d. h., die Wellenfunktionen der leichten Teilchen sollen in diesem Ansatz nur in der Form des Vektorprodukts $\vec{\psi} \times O \vec{\psi}$ enthalten sein; $\vec{\psi}$ ist dabei eine Vektorgröße, deren Komponenten durch $\psi_{\xi} = (\psi_{\xi}^+ + \psi_{\xi})/i \sqrt{2}$, $\psi_{\eta} = (\psi_{\eta}^+ - \psi_{\eta})/i \sqrt{2}$, $\psi_{\xi} = \psi_{\nu}$ gegeben sind, wo ψ_e , $\psi_{\bar{e}}$ und ψ_{ν} die Wellenfunktionen des Elektrons, Positrons und Neutrinos sind; O ist der in der Theorie des β -Zerfalls auch sonst verwendete Matrixoperator der Wechselwirkung. Es ergibt sich, daß dieses Vektorprodukt für die skalare, pseudoskalare und pseudovektorielle Wechselwirkung identisch Null ist. In der isotop-invarianten Theorie kommen also nur die vektorielle und die tensorielle Wechselwirkung in Frage. *E. Gora.*

Takebe, Hisao: Pseudoscalar interaction in the theory of beta-decay and Ra E. Progress theor. Phys. **10**, 673—689 (1953).

L'A. reprend le modèle théorique de la désintégration β du Ra E proposé par A. G. Petschek et R. E. Marshak [Phys. Review, II. Ser. **85**, 698 (1952)] faisant intervenir un mélange d'interactions tensorielle et pseudoscalaire. En tenant compte de l'influence des dimensions finies du noyau par un calcul analogue à celui de M. E. Rose et D. K. Holmes [Phys. Review, II. Ser. **83**, 190 (1951)] l'A. calcule tous les termes correctifs correspondant à une transition $0 \rightarrow 0$ (oui). L'ajustement des spectres calculés et expérimentaux semble pour des valeurs convenables des paramètres permettre un accord entre théorie et expérience.

G. Petiau.

Cheston, W. and H. Primakoff: „Nonmesonic“ bound V -particle decay. Phys. Review, II. Ser. **92**, 1537—1541 (1953).

Um die etwas schwer verständliche, relativ lange Halbwertszeit von instabilen Kernfragmenten, die kürzlich in der Höhenstrahlung gefunden wurden, erklären zu können, nehmen die Verf. an, daß die ganze Anregungsenergie in einem solchen Bruchstück auf ein einzelnes Nukleon konzentriert ist, d. h. daß eines der Nukleonen im Kernbruchstück ein V -Teilchen ist. Es wird nun versucht, die mittlere Lebensdauer des mesonischen oder nichtmesonischen Zerfalls eines solchen V -Teilchenkernbruchstückes in Verbindung zu bringen mit dem mesonischen Zerfall eines freien V -Teilchens von etwa 10^{-10} Sekunden. Die Verf. diskutieren auch den Einfluß einer derartigen langen Halbwertszeit der Kernbruchstücke auf den Mechanismus der V -Teilchenerzeugung. Um die vorgeschlagene Theorie verifizieren zu können, scheint es jedoch notwendig zu sein, eine Statistik der Kernfragmente anzulegen und sie nach ihren Massenzahlen, ihren Halbwertszeiten und der Natur ihrer Zerfallsteilchen zu klassifizieren.

F. Cap.

Thirring, Walter: Photoerzeugung von Mesonen in Atomkernen. Helvet. phys. Acta **26**, 465—488 (1953).

Verf. untersucht die (z. B. für eine experimentelle Entscheidung der Frage nach der Existenz von Nukleonen-Mehrkörperkräften benötigte) Impulsverteilung der Kernnukleonen mit Hilfe einer phänomenologischen Theorie der Photoerzeugung von Mesonen. Die Daten über Experimente an Kernnukleonen lassen sich in befriedigender Weise auf die an freien Nukleonen zurückführen, wenn man die empirischen Absorptionsquerschnitte von Mesonen in Kernen benutzt und eine Gaußsche Impulsverteilung der Nukleonen im Kern annimmt.

G. Süßmann.

Morita, Masato and Masami Yamada: On the β - γ angular correlation of Sb^{125} . II. Progress theor. Phys. **10**, 641—652 (1953).

Nakabayasi, K., K. Hasegawa and I. Yamamura: Fourth order calculations of meson-proton scattering in the symmetrical $Ps(Ps)$ theory. Progress theor. Phys. **10**, 694—695 (1953).

Nakabayasi, K., K. Hasegawa and I. Yamamura: Fourth order phase shifts for meson-proton scattering in the symmetrical $Ps(Ps)$ theory. Progress theor. Phys. **10**, 696—697 (1953).

Deser, Stanley: Electromagnetic effects in two-nucleon systems. Phys. Review, II. Ser. 92, 1542—1547 (1953).

Bekanntlich ist das magnetische Moment des Deuterons nicht aus dem magnetischen Moment des Protons und des Neutrons zusammengesetzt, sondern es tritt eine Abweichung von der Additivität auf. Für diese Abweichung gibt es drei Gründe: 1) die Beimischung des D-Zustandes, die von der Tensorkraft herrührt; 2) die Überlagerung der Mesonenfelder von Neutron und Proton; 3) die elektrischen Ströme, die durch den Rückstoß der Nukleonen bei der Aussendung virtueller Mesonen entstehen. — Der Verf. behandelt in dieser Arbeit unter Zuhilfenahme der relativistischen Zweikörpergleichung und unter Einführung eines Zusatzpotentials im Rahmen der systematischen pseudoskalaren-pseudoskalaren Mesonentheorie den unter Punkt 3) erwähnten Beitrag und erhält als Ergebnis für die Korrektur des Quadrupolmomentes $\Delta Q = -1.3 \cdot 10^{-28} (g_p^2/4\pi) \text{ cm}^2$. F. Cap.

Wageningen, R. van: The quadrupole moment of nuclei according to the spheroidal nuclear model. II. Physica 19, 1004—1010 (1953).

Kerman, A. K.: Nuclear surface oscillations. Phys. Review, II. Ser. 92, 1176—1183 (1953).

In dieser Arbeit werden die Oberflächenschwingungen des Kerns mit der Bewegung eines unpaarigen Nukleons gekoppelt und aus der Art des Wechselwirkungsoperators auf die allgemeinste Form der Eigenfunktionen geschlossen (wobei nur ein „Surfon“ = Schwingungsquant zugelassen wird), in welcher die Radialfunktionen noch offen bleiben. Für diese werden dann die üblichen Funktionen eingesetzt und statt dessen Variationsparameter offen gelassen und aus der Schrödingergleichung bestimmt. Eine im Anhang angedeutete andere Methode zeigt, daß das möglich ist und in welcher Richtung diese Näherung vom Ergebnis mit den richtig bestimmten Radialfunktionen abweichen würde. Es zeigt sich, daß die richtigen Funktionen (sehr wahrscheinlich) näher dem Experiment liegende magnetische Momente ergeben würden, was die Richtigkeit der physikalischen Idee unterstreicht. Mit den durch Variation der Parameter gewonnenen Näherungseigenfunktionen werden magnetische und Quadrupolmomente in passabler (nicht überall) Übereinstimmung mit dem Experiment berechnet. — Für zwei Nukleonen ergibt sich auch hier die Termordnung $L = 0, 2, 4, \dots$ (nicht trivial). R. Hagedorn.

Umezawa, Minoru: Note on a j - j coupling shell model. Progress theor. Phys. 10, 505—508 (1953).

Unter der Annahme von j - j -Kopplung und Ladungssymmetrie werden die magnetischen Momente der ungerade-ungerade Kerne Na^{24} und K^{42} berechnet, die kürzlich auch experimentell gemessen wurden. Es zeigt sich, daß die Ergebnisse mit dem Experiment in Einklang stehen, wenn für die Seniority- und Isotopenspinquantenzahl die für ungerade-ungerade Kerne in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 48, 230) vorgeschlagenen Werte verwendet werden. Weiterhin werden in einer Tabelle die experimentellen und theoretischen Quadrupolmomente leichter Kerne miteinander verglichen. Für mittelschwere und schwere Kerne schließt der Verf. aus einigen Rechnungen, daß es nicht möglich ist, mit Hilfe einer j - j -Kopplung vieler Teilchen außerhalb geschlossener Schalen die großen empirischen Quadrupolmomente zu erklären. B. Stech.

Shalit, A. de-: The energy levels of odd-odd nuclei. Phys. Review, II. Ser. 91, 1479—1486 (1953).

Es gelingt Verf., die von Nordheim gefundene empirische Regel über die Spins von u - u -Kernen mit Hilfe der (zwischen den beiden Leuchtnukleonen wirkenden) Wechselwirkung $V = (a + b \sigma_N \sigma_p) \delta(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_p)$ abzuleiten und sogar zu verschärfen. Danach sollte $J = |j_N - j_p|$ sein für gerade N und $J = j_N + j_p$ oder $= j_N + j_p - 2$ oder $= j_N - j_p - 1, \dots$ für ungerade N , wo $N = l_N + j_N + l_p + j_p$ ist. G. Süßmann.

Sengupta, S.: On the distribution of stable nuclei. Indian J. theor. Phys. 1, 47—66 (1953).

Über die — als stetig gedachten — Funktionen der Bindungsenergie des letzten Neutrons $B_N(N, Z)$ und der des letzten Protons $B_Z(N, Z)$ werden folgende Annahmen gemacht: 1. $B_{N,N} = \partial B_N / \partial N < 0$; $B_{Z,Z} = \partial B_Z / \partial Z < 0$; $B_{Z,N} = \partial B_Z / \partial N = \partial B_N / \partial Z > 0$. 2. $1 < |B_{Z,Z}| / |B_{Z,N}| \approx |B_{Z,N}| / |B_{N,N}| < 2$ und 3. die Paarungsenergie zweier gleicher Teilchen soll zwischen $|B_{Z,Z}| + 2|B_{Z,N}| + |B_{N,N}|$ und dem doppelten Wert dieses Ausdrucks liegen. Von diesen Annahmen wird

gezeigt, daß sie den ungefähr proportionalen Verlauf der gesamten Bindungsenergie mit der Nukleonenzahl liefern. Weiterhin lassen sich damit auch viele andere empirische Regelmäßigkeiten in der Verteilung der stabilen Kerne verstehen. *B. Stech.*

● **Hughes, Donald J.:** *Pile neutron research.* Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company 1953. 386 p. \$ 8,51.

Die Möglichkeit, in Kernreaktoren Neutronen hoher Intensität zu erzeugen, hat für Wissenschaft und Technik praktisch neue Forschungsgebiete erschlossen. Das oben angezeigte Buch stellt sich die Aufgabe, Physiker, Chemiker, Biologen und Techniker mit den für die praktische experimentelle Forschung wichtigen Punkten vertraut zu machen. In den ersten drei Kapiteln werden die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der Neutronenphysik, die eigentliche Reaktorphysik und -technik, und die Herstellung von Neutronenquellen bestimmter Intensität sowie Intensitätsmessungen von Neutronenquellen dargestellt. In den folgenden acht Kapiteln wird ausführlich über Meßmethoden mit Reaktorneutronen berichtet, wobei auch die verschiedenen Anwendungsgebiete berührt werden. Die Reaktor-Neutronen werden hierbei, den praktischen Gegebenheiten entsprechend, ihrer Energie nach in drei Gruppen (schnelle, mittelschnelle und thermische) eingeteilt, wobei jede Gruppe in Experimente innerhalb und außerhalb des Reaktors unterteilt ist. Ein Schlußkapitel befaßt sich mit Schutzmaßnahmen zur Verhinderung gesundheitlicher Schäden. Ferner werden noch für einen Schulungskurs besonders geeignete Experimente beschrieben. -- Von großem Wert dürfte ein bis Anfang 1953 wohl vollständiges Literaturverzeichnis des sehr umfangreichen Gebietes sein. Hervorzuheben ist ferner besonders die Tabellierung aller veröffentlichten Wirkungsquerschnitte und anderer Größen. Allgemein werden komplizierte mathematische Ableitungen vermieden und das physikalisch Wesentliche klar dargestellt. Das Buch stellt zur Zeit ohne Zweifel eine Art Standard-Werk für die Anwendung der Reaktorneutronen dar und ist für die Einarbeit in das Gebiet von besonderem Wert. *H. Gaus.*

Bau der Materie:

Suryanarayana, V. and V. Ramakrishna Rao: Term values in the spectrum of chromium II. *Indian J. Phys.* 27, 585—590 (1953).

Jucis, A. P. und G. K. Cjunajtis: Das self consistent field Eocks für die Konfiguration $1s^2 2p^2$ des Berylliumatoms. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* 23, 512—516 (1953) [Russisch].

Jucis, A. P., V. K. Šugurov und G. K. Cjunajtis: Die Triplettaufspaltung der Terme von Atomen mit zwei $2p$ -Valenzelektronen. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* 23, 517—524 (1953) [Russisch].

Sobel'man, I. I. und L. A. Vajnsťejn: Die Verbreiterung der Spektrallinien infolge des Quadrupol-Stark-Effekts. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 90, 757—760 (1953) [Russisch].

Verff. untersuchen die Frage, ob der in einem inhomogenen elektrischen Feld auftretende Quadrupol-Stark-Effekt bei der Verbreiterung der Spektrallinien durch Ionen oder Fremdatome eine merkliche Rolle spielen könnte, und leiten allgemeine theoretische Formeln für diesen Effekt ab. Als numerische Beispiele werden die Verbreiterungen einiger Linien in der Atmosphäre der Sonne unter dem Einfluß von freien Elektronen berechnet. Es zeigt sich, daß der Beitrag des Quadrupol-Stark-Effekts zur Linienbreite von der gleichen Größenordnung ist wie der Beitrag des gewöhnlichen Stark-Effekts und gegebenenfalls die beobachtete Linienbreite erheblich beeinflussen kann. *E. Gora.*

Higgs, P. W.: The vibration spectra of helical molecules. Infra-red Raman selection rules, intensities and approximate frequencies. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 220, 472—485 (1953).

Die vorliegende Behandlung eines idealen Spiralenmoleküls, wie es seit kurzem als Diskussionsgrundlage für die Faserproteine vielfach benutzt wird, wird vom Verf. hinsichtlich der Raman- und Infrarotspektren untersucht. Unter Voraussetzung einer schwachen Kopplung werden mittels einer Störungsrechnung Beziehungen zwischen den Intensitäten der verschiedenen polarisierten

Spektralkomponenten abgeleitet, welche von einer einzelnen Schwingungsfrequenz der Einheit (Peptid-Reste) herrühren, aus welcher die Spirale aufgebaut wird. Dann werden Auswahlregeln für das Infrarot- und Ramanspektrum für ein unendlich langes Kettenmolekül mit Spiralsymmetrie diskutiert und die Grundtypen der Schwingungen unter Benutzung der Gruppentheorie klassifiziert.

P. Urban.

Rahman, A.: Calculation of perturbations from approximate unperturbed wave functions. Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 186—195 (1953).

Verf. berechnet eine speziell definierte Störungsenergie einmal mit Hilfe einer Wellenfunktion, die einer „ungestörten“ Schrödingergleichung genügt, zum andern mit einer „genäherten ungestörten“ Funktion. Er stellt eine Formel für die relative Abweichung der beiden so gewonnenen Störungsenergien auf und gewinnt aus ihr eine Fehlerabschätzung. Ferner wird ein Grenzprozeß angegeben, um die „angenäherten“ Wellenfunktionen zu verbessern, d. h. um tiefere Energien zu erreichen.

H. Haken.

Gombás, P.: Über eine kinetische Energiekorrektur des statistischen Atommodells. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 3, 127—153 (1953).

Die Einführung des Weizsäckerschen Korrekturgliedes zur kinetischen Energie des Fermigas, welches proportional zu $(\text{grad } |\bar{\varphi}|)^2$ ist, hat im Fall des Atomkerns ein quantitatives Verständnis des oberflächenproportionalen Anteils der Kernenergie ermöglicht. Im Fall des statistischen Atoms nach Thomas-Fermi ergab seine Einführung eine Dichteverteilung $\varrho(r)$ der Elektronen, welche bei $r = 0$ endlich bleibt und nach $r \rightarrow \infty$ hin exponentiell abfällt, was den wirklichen physikalischen Verhältnissen besser gerecht wird als die frühere Theorie. Quantitativ ergaben sich jedoch für die Gesamtenergie zu hohe Werte. Da in einer voraufgehenden Arbeit gezeigt werden konnte, daß zum Weizsäckerschen Korrekturglied noch ein weiterer negativer Term hinzutritt, wird hier der Versuch unternommen, diesen letzten Term für die zu hohen Energien verantwortlich zu machen. Eine näherungsweise Berücksichtigung dieses Terms führt in der Tat zu überraschend guten Energiewerten.

W. Macke.

Gombás, P.: Über die Weizsäckersche Inhomogenitätskorrektur der statistisch berechneten kinetischen Energie. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 3, 105—125 (1953).

Es wird darauf hingewiesen, daß das von Weizsäcker berechnete Korrekturglied zur Fermischen kinetischen Energie eines Fermigas nur eine obere Grenze darstellt. Am Beispiel eines in eine Kugelschale eingeschlossenen Fermigas wird gezeigt, daß eine äußere Störung, die alle Wellenfunktionen in gleicher Weise beeinflußt und die Teilchendichte von ϱ_0 auf ϱ transformiert, zur kinetischen Energie des Gases den Zusatz $\Delta E = \int d\tau (\hbar^2/2m) \{(\text{grad } |\varphi|)^2 - (\text{grad } |\bar{\varphi}_0|)^2\}$ liefert, dessen erster Term allein das Weizsäckersche Korrekturglied liefert. Vom zweiten, negativen Glied wird gezeigt, daß es sich in dem gewählten Beispiel genähert berücksichtigen läßt durch Verringerung der Fermienergie des Gases um den Faktor $\lambda = (2N - 2)/(2N - 1)$.

W. Macke.

Hurley, A. C., John Lennard-Jones and J. A. Pople: The molecular orbital theory of chemical valency. XVI. A theory of paired-electrons in polyatomic molecules. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 446—455 (1953).

With molecular orbital theory as basis, allowance is made for pairs of electrons in the same orbital keeping apart under their mutual repulsive field. This generalization refers in particular to the spatial part of the wave function. Using such paired electron orbitals, this extended theory is shown to lead to improvements, containing the previous results of these papers [cf. part XV, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 333—344 (1953)] as special cases. The valence bond wave function also can be considered as another special approximation of the general wave function.

J. Jacobs.

Kerner, Edward H.: The dissociation of H_2 by electron impact. Phys. Review, II. Ser. 92, 1441—1447 (1953).

Rules giving the characteristics of the angular distribution of the dissociated atoms are stated, and the excitation of the molecule to a state of definite

angular momentum is investigated. In particular, the example of initial state $l = 1$, final state $l = 0$, stresses the scope of the Franck-Condon principle; near the dissociation energy, giving the Franck-Condon maximum of scattering amplitude, other maxima occur, leading to a „fine structure“ of the Franck-Condon principle.

J. Jacobs.

Kihara, Taro: Virial coefficients and models of molecules in gases. Reviews modern Phys. 25, 831—843 (1953).

In der verallgemeinerten Zustandsgleichung für Gase $p v = k T (1 + B v^{-1} + C v^{-2} + \dots)$ (p = Druck, v = Volumen pro Mol, k = Boltzmannsche Konstante, T = absolute Temperatur) heißen $B(T)$ und $C(T)$ die zweiten und dritten Virialkoeffizienten. Sie können für kugelsymmetrische Moleküle wie die Edelgase gemäß den Lehren der statistischen Mechanik als Integrale über eine Funktion des gegenseitigen Wechselwirkungspotentials zweier Moleküle dargestellt werden. Verf. diskutiert den Einfluß der verschiedenen Ansätze für das Wechselwirkungspotential (Muldenpotential; Lennard-Jones-Potential $= \lambda/r^n - \mu/r^m$; abstoßendes Potential nach einer negativen Potenz von r , nämlich $- \alpha/r^n$), wie sie in den letzten Jahren von verschiedenen japanischen Forschern gemacht wurden, auf die Berechnung der beiden Virialkoeffizienten B und C . Da auch die Transportphänomene (Reibung, Wärmeleitung, Diffusion) ganz wesentlich von dem im Gase herrschenden Wechselwirkungspotential abhängen, ist die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den verschiedenen Formen des Wechselwirkungspotentials gegeben.

Th. Sexl.

Boer, J. de, F. van der Maesen and C. A. Ten Seldam: The molecular polarisation of compressed non-polar gases. Physica 19, 265—278 (1953).

Es wird die Clausius-Mosotti-Gleichung für ein Gas, dessen Moleküle die isotrope Polarisierbarkeit α besitzen, in der Form $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = \frac{3}{4} \pi n \alpha (1 + s)$

erweitert. Die auftretende Größe s hängt von der Dichte n und der Temperatur ab und wird in der Entwicklung $s = B_2 n + C_2 n^2 + \dots$ angegeben. Die Koeffizienten B_2 und C_2 werden unter Benützung der molekularen Verteilungsfunktion n_2 und des Lennard-Jones 6—12-Potentials bzw. des Herzfeld-Potentials berechnet. Die Theorie wird mit den Messungen von Michels, Ten Seldam und Overdijk verglichen und zeigt das charakteristische Maximum.

H. Falkenhagen — G. Kelbg.

Barnard, A. J.: The theory of condensation of supersaturated vapours in the absence of ions. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 132—141 (1953).

Verf. gibt in seiner Arbeit einen Überblick über die Kondensationstheorie von Becker und Döring und Frenkel. Er weist auch auf ihre Grenzen hin. Beim Vergleich der Becker-Döringschen Formel mit den Nebelkammermessungen von Volmer und Flood zeigt es sich, daß für Wasser und einige Alkohole gute Übereinstimmung mit dem Experiment vorhanden ist, während bei Methylalkohol, Benzol und Tetrachlorkohlenstoff beträchtliche Abweichungen auftreten.

H. Falkenhagen — G. Kelbg.

● **Falkenhagen, Hans: Elektrolyte.** — 2., neubearbeitete Auflage. Leipzig, S. Hirzel Verlag 1953. XI, 263 S. mit 94 Fig.; DM 15,60.

Der etwas geringere Umfang der neuen Auflage resultiert aus dem Verzicht auf die Darstellung der experimentellen Methoden und der Kürzung von Darlegungen von mehr historischer Bedeutung. Das Werk ist dadurch eine ausgesprochen theoretisch-physikalische Monographie geworden, die jedoch den Ergebnissen der experimentellen Prüfung der Theorie einen noch breiteren Raum gibt, was schon in der Änderung einiger Kapitelüberschriften zum Ausdruck kommt. Die Gliederung ist im wesentlichen dieselbe geblieben; umgestaltet und durch Aufnahme neuer theoretischer Arbeiten und McErgenisse erweitert sind die Kapitel über die Theorie der Leitfähigkeit, der Viskosität und Diffusion sowie auf Grund der neueren Arbeiten des Autors die Behandlung des Gebiets der höheren Konzentrationen. Neu aufgenommen ist ebenfalls die Matrixtheorie der Leitfähigkeit von Onsager-Fuoss für Mischungen starker Elektrolyte bei sehr großer Verdünnung. — Die Neuaufgabe des bekannten Buches stellt damit eine auf den heutigen Stand gebrachte einheitliche Darstellung der Theorie der Elektrolyte dar, die jedem an diesem Gebiet Interessierten sowohl zur allgemeinen Einführung als auch — insbesondere durch zahlreiche Literaturhinweise auch hinsichtlich der Randgebiete — für spezielle Studien sehr willkommen sein wird.

G. Klages.

Bayet, Michel, Jean-Loup Delcroix et Jean-François Denisse: Sur le tenseur de conductivité des plasmas électroniques présence d'un champ magnétique constant. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1503—1505 (1953).

Nakamura, Tutô: Statistical theory of hindered rotation in molecular crystals. II. Progress theor. Phys. 10, 95—107 (1953).

[Teil I, J. Phys. Soc. Japan 7, 264 (1952).] Verf. erweitert die Kirkwoodsche Theorie der Rotationsumwandlung mit Hilfe der Quantentheorie. Er benutzt die Hartreesche Näherung und führt in den Hamiltonschen Operator das Kirkwood'sche Potential ein. Der Umwandlungspunkt und der Sprung in den Rotationswärmen werden erhalten, wobei die Formeln das Trägheitsmoment der Moleküle enthalten. Indem der Verf. die experimentell bekannten Umwandlungstemperaturen von HBr und HJ benutzt, berechnet er die von DBr und DJ zu $91,8^\circ\text{K}$ und $71,7^\circ\text{K}$ und vergleicht sie mit den beobachteten Werten von K. Clusius und G. Wolf, welche $93,5^\circ\text{K}$ und $77,3^\circ\text{K}$ betragen. Es erfolgt auch ein Vergleich mit der klassischen Theorie.

H. Falkenhagen — G. Kelbg.

Huzinaga, Sigeru and Tasuke Hasino: On the elastic frequency distribution function of simple crystals. Progress theor. Phys. 10, 279—295 (1953).

Zwei Näherungsmethoden (Montroll, Houston) zur Berechnung der Gitterschwingungsspektren von Kristallen werden miteinander und mit der exakten Lösung kritisch verglichen.

G. Leibfried.

Meñ, A. N. und A. N. Orlov: Das Schwingungsspektrum des einfachsten Modells einer geordneten Legierung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 753—756 (1953) [Russisch].

Das Schwingungsspektrum einer linearen Kette mit 2 Massen wird in Abhängigkeit vom Ordnungsgrad und der relativen Häufigkeit der beiden Massen untersucht. Die Federkonstanten der Bindung benachbarter Atome sind gleich. Es wird gezeigt, daß man bei kleiner Massendifferenz das Problem auf die normale zweiatomige Kette reduzieren kann, wobei nun die beteiligten Massen von Ordnungsgrad und Häufigkeit abhängen. Auch die charakteristische Temperatur der Kette hängt dann von Ordnungsgrad und Häufigkeit ab. Der Verlauf der spezifischen Wärme und des elektrischen Widerstandes wird diskutiert. (Hier ist zu bemerken, daß die Debyesche charakteristische Temperatur von den Massen unabhängig ist. Die Verf. definieren ihre charakteristische Temperatur durch die maximale Gitterfrequenz und identifizieren sie mit der Debyetemperatur in den üblichen Formeln für spezifische Wärme und Leitfähigkeit, wobei die Berechtigung für dieses Verfahren offenbleibt.)

G. Leibfried.

Dyson, Freeman J.: The dynamics of a disordered linear chain. Phys. Review, II. Ser. 92, 1331—1338 (1953).

Das Frequenzspektrum einer linearen Kette mit verschiedenen Massen und verschiedenen Federn zwischen benachbarten Massenpunkten wird berechnet. Das Spektrum wird ausgedrückt durch die Spur von $1/(1 + xA)$, wobei A die Kopplungsmatrix zwischen den Verschiebungen der Massenpunkte ist. Das Spektrum erhält man entweder durch eine analytische Fortsetzung der Spur direkt oder über eine Integraldarstellung mit der Spur als Kern. Die Methode wird angewandt zur Berechnung von Spektren, bei denen die Massen und Federn statistisch verteilt sind.

G. Leibfried.

Kröner, Ekkehart: Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen. Z. Phys. 136, 402—410 (1953).

Das elastische Verschiebungsfeld einer Einzelkraft in einem Kristall kann im hexagonalen Kristall durch elementare Funktionen dargestellt werden. Für Kristalle anderer Symmetrie werden Näherungslösungen angegeben.

G. Leibfried.

Fumi, F. G.: Macrofisica dei cristalli. Un campo di applicazione della simmetria in fisica. Rend. Sem. mat. fis. Milano 23, 3—20 (1953).

● Cottrell, A. H.: Dislocations and plastic flow in crystals. (Internat. Ser. of Monographs on Physics.) Oxford: Clarendon Press 1953. X, 223 p.; 8 plates. 25 s net.

Kochanovská, Adéla: The size determination of dislocations of powder-substances and of crystallites. Czechosl. J. Phys. 2, 143—145 (1953) [Russisch].

Hodge jr., P. G.: The effect of strain hardening in an annular slab. J. appl. Mech. 20, 530—536 (1953).

Ekstein, H.: Multiple scattering and radiation damping. II. Phys. Review, II. Ser. 89, 490—501 (1953).

In Teil I [Phys. Review, II. Ser. 83, 721 (1951)] wurde die elastische Vielfachstreuung an einem System fester Streuer auf die Zweiteilchenstreuung zurückgeführt. Die Theorie wird hier auf einen unendlich ausgedehnten Streuer erweitert, und zwar einerseits auf Kristalle, wobei sich eine Verallgemeinerung der Theorie von Ewald [Ann. Inst. Henri Poincaré 8, 79 (1932)] ergibt, andererseits auf Medien mit statistisch verteilten Streuern. Die grundlegende Matrix β ist auch hier im wesentlichen die Greensche Funktion des Einzelprozesses.

F. Penzlin.

● **Pinsker, Z. G.:** Electron diffraction. Translated by J. A. Spink and E. Feigl. London: Butterworths Scientific Publications Ltd. 1953. XIV, 443 p. and 25 plates. 63 s. net.

Das Buch behandelt hauptsächlich Strukturuntersuchungen an festen Stoffen durch Elektronenbeugung. Die benötigten theoretischen Zusammenhänge werden meist in einfacher und verständlicher Weise erläutert, in einigen Fällen wird auch nur das Ergebnis der Theorie angegeben. Es ist wohl weniger die Absicht des Verf., in die theoretischen Grundlagen einzuführen, als vielmehr die experimentellen Verfahren und Ergebnisse darzustellen und zu diskutieren. Diese Darstellung des experimentellen Tatbestands bildet den Hauptinhalt des Buches. Die Strukturuntersuchungen an Kristallen werden ausführlich besprochen. Aus der Vielzahl der sonst behandelten Probleme können hier nur einige wenige herausgegriffen werden. Man findet sehr interessante Ausführungen über Struktur und Kristallisation dünner Filme, sowie über die Struktur von Oxydschichten und polierten Oberflächen. Auch die Streuung am Atom und Molekül wird sehr ausführlich behandelt. So enthält das Kapitel über Moleküle eine Tabelle von 30 Seiten, die alle bisherigen Messungen mit Elektroneninterferenzen über Molekülstrukturen zusammenfaßt. Im ganzen erhält man einen ausgezeichneten Überblick über die experimentellen Arbeiten und Möglichkeiten. Verf. zieht bei der Darstellung mehr die ihm näher liegende russische Literatur heran. Auf diese Weise erhält man auch eine gute Übersicht über die sonst so schwer zugänglichen russischen Arbeiten auf diesem Gebiet, was vor allem für den Spezialisten außerordentlich wichtig ist. Das war auch einer der Gründe für die Übersetzung dieses Buches aus dem Russischen. Aber auch zur Einarbeitung, z. B. für Studierende höherer Semester, kann das Buch sehr empfohlen werden.

G. Leibfried.

D'jakov, G. P.: Zur Theorie der Magnetostriktion und anderer gerader Effekte in starken Magnetfeldern. Žurn. eksper. teor. Fiz. 23, 525—531 (1953) [Russisch].

Trammell, G. T.: Magnetic scattering of neutrons from rare ions. Phys. Review, II. Ser. 92, 1387—1393 (1953).

Bhagavantam, S. and K. V. Krishna Rao: Photo-elastic behaviour of cubic crystals. Displacement of principal axes caused by linear stresses. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 37, 589—591 (1953).

Bhagavantam, S.: Photo-elastic behaviour of cubic crystals. New methods of distinguishing between different classes. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 37, 585—588 (1953).

Saffren, M. M. and J. C. Slater: An augmented plane-wave method for the periodic potential problem. II. Phys. Review, II. Ser. 92, 1126—1128 (1953).

Die Methode von Slater, dies. Zbl. 51, 452, wird analytisch einfacher formuliert.

W. Brenig.

Hunter, S. C. and F. R. N. Nabarro: The propagation of electrons in a strained metallic lattice. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 542—561 (1953).

Die Streuung von Elektronen in verzerrten Gittern wird untersucht. Das Störpotential wird nicht als Funktion der Verschiebungen der Atome aus ihren Gleichgewichtslagen im ungestörten Gitter angegeben, sondern direkt als Funktion der makroskopischen Spannungen. Die Methode wird angewandt zur Abschätzung des Einflusses von Versetzungen auf den elektrischen Widerstand. In

Cu liefern nicht nur Stufen-, sondern auch Schraubenversetzungen merkbare Beiträge zum Widerstand. *W. Brenig.*

Miller jr., S. C. and R. H. Good jr.: Periodic deviations in the Schottky effect. Phys. Review, II. Ser. 92, 1367—1372 (1953).

Bei der Feldemission von Elektronen aus Metallen beobachtet man bekanntlich bei einer logarithmischen Auftragung der Stromdichte in Abhängigkeit von der Wurzel aus der elektrischen Feldstärke periodische Abweichungen von der nach der Schottkyschen Theorie zu erwartenden Kurve, die erstmalig von Guth und Mullin als ein wellenmechanischer Effekt gedeutet wurden. In der vorliegenden Arbeit gehen Verff. von den gleichen Grundgedanken wie Guth, Mullin und später Juenker, Colladay und Coomes aus, verwenden aber bei ihren Berechnungen die WKB-Methode. Nach Ansicht der Verff. werden dadurch gewisse Unsicherheiten in der Herleitung der Beziehungen beseitigt. Die Ergebnisse decken sich im wesentlichen mit denen von Juenker, Colladay und Coomes; Verff. erhalten jedoch für die Amplitude der Abweichungen doppelt so große Werte und eine etwas andere Feldabhängigkeit. *W. Oldekop.*

Tauc, Jan: The theory of the thermal EMF of semi-conductors. Czechosl. J. Phys. 3, 282—302 u. russ. Zusammenfassg. 302—303 (1953).

Nach einer Diskussion der allgemeinen Elektronentheorie der Thermokräfte werden insbesondere die Verhältnisse in inhomogenen Halbleitern untersucht und die gewonnenen Erkenntnisse auf die Behandlung von Potentialschwellen angewandt. Ferner werden Nichtgleichgewichtszustände in der Elektronenverteilung betrachtet, was bei Diodenrandschichten und Ladungsträgerinjektionen von Bedeutung ist. Der Einfluß starker Temperaturgradienten wird besprochen. Aus der Theorie ergeben sich einige Effekte, die bisher experimentell noch nicht beobachtet worden sind. *W. Oldekop.*

Schmid, L. A.: Calculation of the cohesive energy of diamond. Phys. Review, II. Ser. 92, 1373—1379 (1953).

Es wird eine Verbesserung der Heitler-London-Slater-Paulingschen Theorie der chemischen Bindung angegeben: Die Gesamtwellenfunktion wird nicht als Slaterdeterminante von Einteilchenfunktionen, sondern als antisymmetrische Kombination von Zweiteilchenfunktionen aufgestellt. Die Zweiteilchenfunktionen sind Linearkombinationen aus einer Heitler-London-Funktion und einer polaren Zweiteilchenfunktion. Diese beiden Funktionen sind aus Einteilchenfunktionen aufgebaut, welche bei jeweils zwei benachbarten Atomen lokalisiert und zueinander orthogonal sind. Rechnungen für das Diamantgitter zeigen, daß das Minimum der Energie bei einer Beimischung von etwa 80% des polaren Zustandes zum Heitler-London-Zustand liegt. *W. Brenig.*

Osborne, M. F. M. and M. C. Steele: The magnetic properties of an electronic Einstein model solid. Phys. Review, II. Ser. 92, 1403—1419 (1953).

Verff. schlagen eine phänomenologische Beschreibung der Elektronen im Festkörper vor. Der Festkörper wird in Gebiete unterteilt, in denen die Elektronen jeweils ohne Wechselwirkung in einem Parabelpotential laufen. Parameter des Modells sind die Dichte dieser Gebiete, die Konstante des Parabelpotentials, die Masse der Elektronen und ihre Anzahl pro Gebiet. Mit diesen Parametern können die Eigenschaften von Supraleitern und paramagnetischen Salzen beschrieben werden. Eine physikalische Begründung des Modells wird nicht gegeben. *G. Leibfried.*

Valenta, Lubos: A derivation of the Curie-Weiss and Weiss laws from Heisenberg's theory of ferromagnetism. Czechosl. J. Phys. 3, 188—192 u. russ. Zusammenfassg. 192 (1953).

Der Inhalt dieser Arbeit ist bekannt. Siehe: R. Becker, W. Döring, „Ferromagnetismus“, Berlin 1939, S. 40 (dies. Zbl. 21, 365). *W. Brenig.*

Moriya, Tôru and Kei Yosida: On the origin of the anisotropy energy of $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Progress theor. Phys. 9, 663—675 (1953).

Auf der Basis der Molekularfeldtheorie wird gezeigt, daß magnetische Dipol- und anisotrope Austausch-Wechselwirkungen gemeinsam die richtige Größenordnung für die magnetische Anisotropie von $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ geben. *G. Heber.*

Néel, Louis: Les surstructures d'orientation. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 1613—1616 (1953).

Verf. weist auf folgendes hin: Angenommen, die magnetische Wechselwirkung zwischen 2 Nachbaratomen einer ferromagnetischen Legierung hängt in bestimmter Weise von dem Winkel zwischen der spontanen Magnetisierung und der Verbindungslinie der beiden Atome ab. Dann können durch Wärmebehandlung im magnetisierten Zustand „Überstrukturen der Orientierung“ entstehen, in welchen die Nachbarn sich in bestimmter Weise anisotrop so anordnen, daß auf Grund obiger Wechselwirkung ihre Orientierung möglichst günstig ist. Kühlt man danach ab, so bleibt dieser Zustand erhalten, unabhängig von der jetzigen Richtung der spontanen Magnetisierung. Diese Überstruktur bedingt natürlich eine ausgeprägte, einachsige magnetische Anisotropie, wie sie verschiedentlich beobachtet wurde. Sie konnte bisher aber nicht befriedigend erklärt werden.

G. Heber.

Astrophysik. Geophysik.

Finlay-Freundlich, E.: Über die Rotverschiebung der Spektrallinien. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1953, 95—102 (1953).

Verf. glaubt zeigen zu können, daß die übliche relativistische Deutung der stellaren Rotverschiebung durch die Beobachtung nicht bestätigt wird, und er stellt eine Arbeitshypothese auf, nach der es sich sowohl bei der stellaren als auch bei der kosmologischen, in den Spektren der außergalaktischen Nebel auftretenden Rotverschiebung um einen Energieverlust handelt, den das Licht durch eine Photonen-Wechselwirkung erleidet.

H. Vogt.

Born, Max: Theoretische Bemerkungen zu Freundlichs Formel für die stellare Rotverschiebung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1953, 102—108 (1953).

Verf. nimmt zu Freundlichs Hypothese über die Ursache der Rotverschiebung (s. vorsteh. Referat) Stellung und kommt zu dem Schluß, daß diese auf jeden Fall erst zu nehmen sei, wenn sie auch anscheinend eine Abweichung von den bisher anerkannten Gesetzen der Physik bedeute. Er sucht auch zu zeigen, daß die Hypothese eine Deutung von Erscheinungen der Radioastronomie zulasse.

H. Vogt.

Alpher, Ralph A., James W. Follin jr., and Robert C. Herman: Physical conditions in the initial stages of the expanding universe. Phys. Review, II. Ser. 92, 1347—1361 (1953).

Es wird versucht, ins einzelne gehende Aussagen zu machen über den physikalischen Zustand des nicht-statischen Universums in der Zeit kurz nach Beginn der Expansion, und zwar unter der Voraussetzung, daß Elementarteilchen und Strahlung ineinander übergehen können. Der Zeitraum, auf den sich die Untersuchung bezieht und in dem wegen der hohen Temperatur die Dichte der Strahlung sehr viel größer ist als die der Materie, liegt zwischen der Epoche $t \cong 10^{-4}$ sec, bei der ein Zustand thermodynamischen Gleichgewichts zwischen Elementarteilchen und Strahlung besteht, und der Epoche $t \cong 600$ sec, bei der die Atomkernbildung bereits begonnen hat. Das Studium der Elementarpartikel-Reaktionen führt insbesondere auch zur Kenntnis der Zeitabhängigkeit des Konzentrationsverhältnisses von Protonen zu Neutronen, einer Größe, die bei dem Problem der Atomkernentstehung eine wichtige Rolle spielt. Dieses Verhältnis lag zu dem Zeitpunkt, an dem die Kernbildung begann, in dem Bereich $\sim 4,5:1$ bis $\sim 6,0:1$.

H. Vogt.

Dungen, F. H. van den, J. F. Cox et J. van Mieghem: Sur les déplacements par rapport aux étoiles de l'axe de rotation instantané de la lithosphère, sous la sollicitation des vents méridiens. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 590—611 (1953).

Kárník, Vít: The effect of the earth's ellipticity on the precision of seismological calculations. Czechosl. J. Phys. 2, 64—69 und engl. Zusammenfassg. 70 (1953) [Russisch].